ESERCIZI SVOLTI DI GEOMETRIA ANALITICA

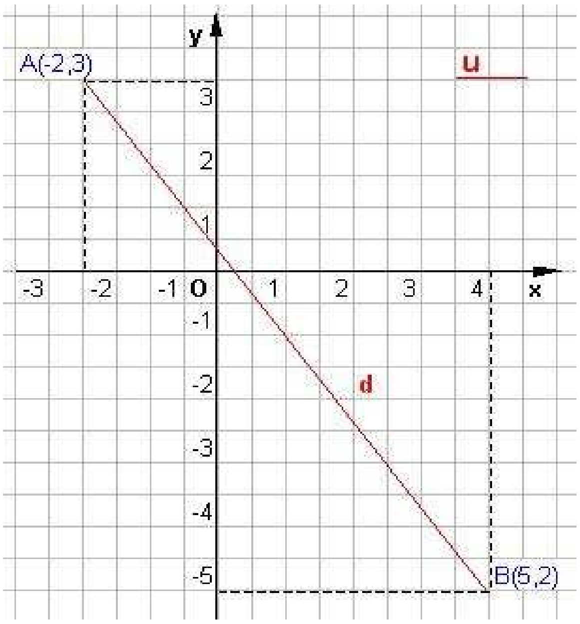
A cura di Valter Gentile

Biblioteca di Ingegneria
Università degli studi di Siena

LA RETTA E LE SUE APPLICAZIONI

Problema 1

Determinare la distanza tra i punti A(– 2 ; 3) e B(4 ; – 5).



Applicando la formula

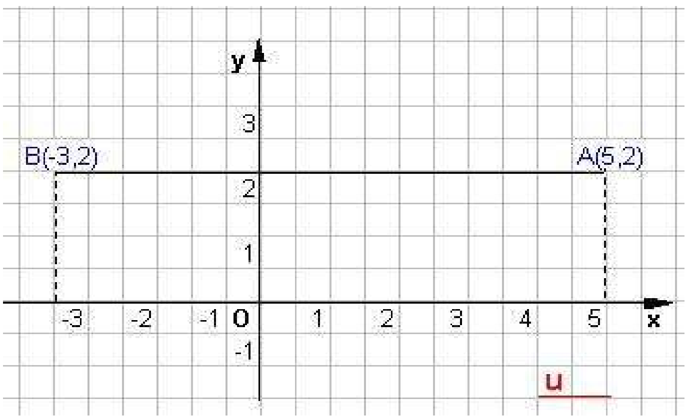
$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

della distanza tra due punti, si ottiene

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4+2)^2 + (-5-3)^2} =$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

Problema 2

Determinare la distanza tra i punti A(5 ; 2) e B(–3 ; 2) .



Applicando la formula :

$$d = |x_B - x_A|$$

della distanza tra due punti aventi la stessa ordinata, si ottiene

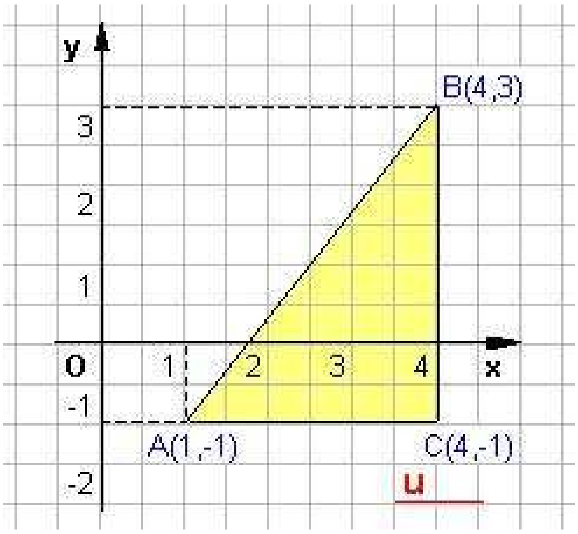
$$d = |x_B - x_A| = |-3-5| = |-8| = 8$$

Problema 3

Determinare il perimetro del triangolo di vertici A(1 ; –1), B(4 ; 3) e C(4 ; – 1).

Si applicano le formule della distanza tra due punti per trovare le misure dei lati AB, AC, BC del triangolo cioè **d =** $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, e per punti che hanno ugual ordinata $d = |x_B - x_A|$ e per quelli che hanno ugual ascissa $d = |y_B - y_A|$. Si ottiene:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2} =$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



AC = | $x_C - x_A$ | = | 4 –1 | = | 3| = 3
BC = | $y_B - y_C$ | = | 3 + 1 | = |4| = 4

Il perimetro del triangolo ABC è

2p (ABC) = 5 + 3 + 4 = 12

Problema 4

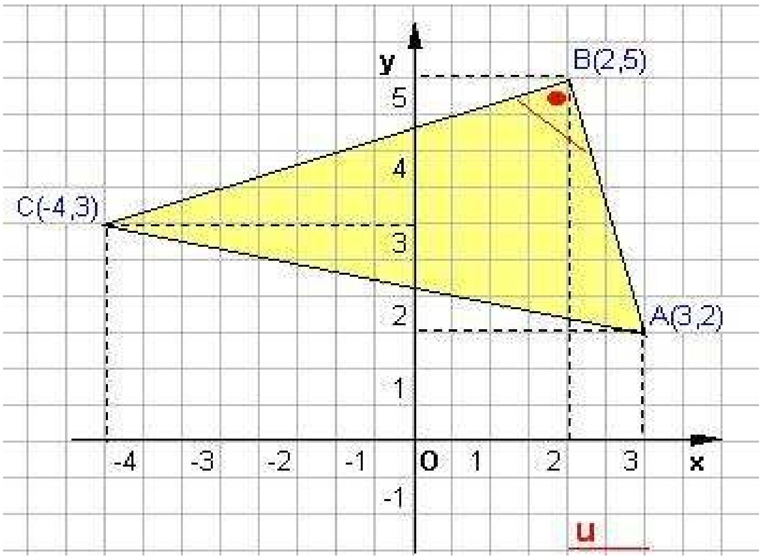
Verificare che il triangolo di vertici A(3 ; 2) , B(2 ; 5),C(– 4; 3) è rettangolo e determinarne l'area .

Applicando la formula **d** = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, della distanza tra due punti, si ottiene:

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

AC = $\sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2} = \sqrt{(-4-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-4-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$



Per verificare che il triangolo ABC è rettangolo, basta verificare il teorema di Pitagora , cioè l'identità

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Si ottiene 50 = 10 + 40 ; 50 = 50 .

Dunque il triangolo ABC è rettangolo con ipotenusa AC.

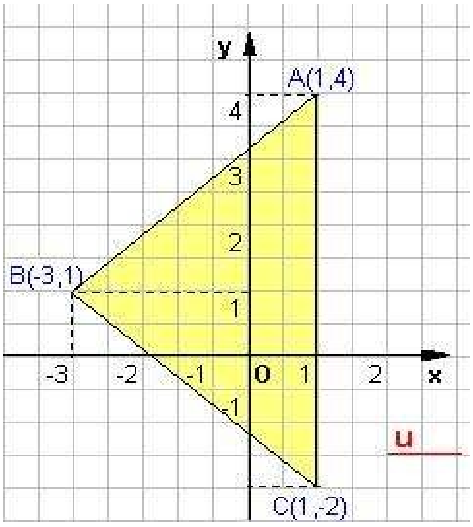
L'area del triangolo è:

$$As = \frac{ABxBC}{2} = \frac{\sqrt{10}x\sqrt{40}}{2} = \frac{\sqrt{400}}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Problema 5

Verificare che il triangolo di vertici A(1 ; 4) , B(–3 ; 1), C(1 ; –2) è isoscele e determinarne il perimetro.

Applicando le formule per trovare la distanza tra due punti, si ottiene



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-4)^2} =$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$
$$AC = \sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-4)^2} =$$
$$= \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$$
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-1)^2} =$$
$$= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Poichè risulta AB = BC, il triangolo è isoscele sulla base AC.

Il perimetro del triangolo ABC è

$$2p\,(ABC) = 5 + 5 + 6 = 16 .$$

Problema 6

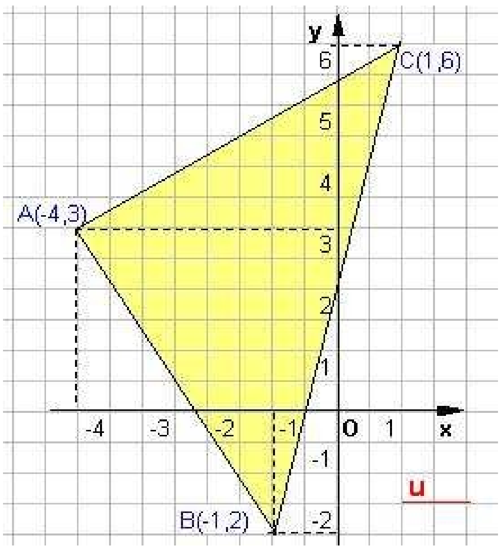
Verificare che il triangolo di vertici A(– 4 ; 3), B(–1 ; –2), C(1 ; 6) è isoscele e determinarne l'area.

Applicando la formula **d =** $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, della distanza tra due punti, si ottiene

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1+4)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

AC = $\sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2} = \sqrt{(1+4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (8)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$



Poichè risulta AB = AC, il triangolo è isoscele sulla base BC.

Inoltre il triangolo ABC è rettangolo: infatti basta verificare il teorema di Pitagora , cioè l'identità

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

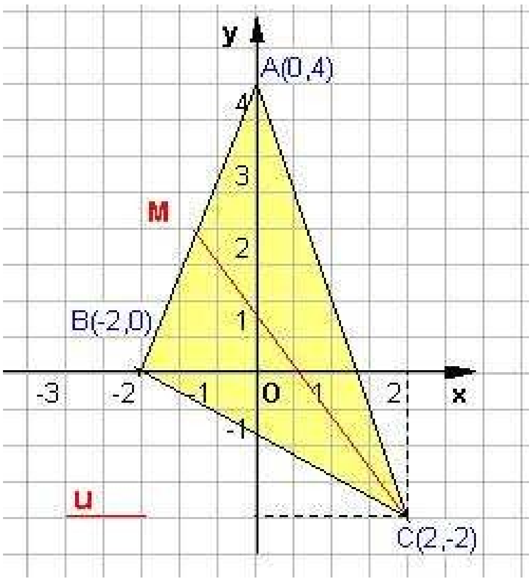
Si ottiene 68 = 34 + 34 ; 68 = 68 .
Dunque il triangolo ABC è rettangolo con ipotenusa BC.
L'area del triangolo è

$$As = \frac{ABxBC}{2} = \frac{\sqrt{34}x\sqrt{34}}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

Problema 7

Determinare la mediana relativa al lato AB del triangolo di vertici A(0;4), B(–2;0), C(2 ; –2).

Sapendo che la mediana è il segmento che unisce un vertice con il punto medio del lato opposto, avremo:



Applicando le formule:

$$x_m = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \qquad y_m = \frac{(y_2 + y_1)}{2}$$

per trovare le coordinate del punto medio di un segmento.

In questo caso per determinare le coordinate del punto medio M di AB si ha

$$x_m = \frac{(x_A + x_B)}{2} = \frac{0-2}{2} = -1$$

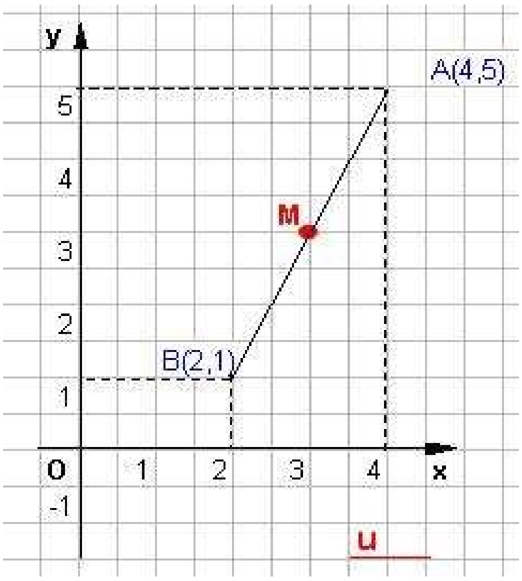
$$y_m = \frac{(y_A + y_B)}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$ da cui **M (– 1 ; 2)**.

Per trovare la lunghezza della mediana CM basta applicare la formula della distanza tra due punti: si ottiene

d = CM = $\sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Problema 8

Determinare le coordinate del punto medio M del segmento di estremi A(4 ; 5) e B(2 ; 1).



Applicando le formule:

$$x_m = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \qquad y_m = \frac{(y_2 + y_1)}{2}$$

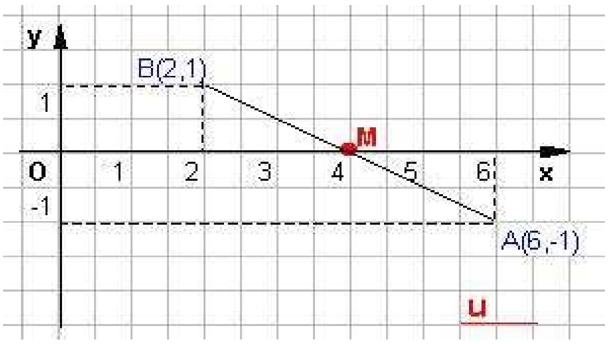
troviamo le coordinate del punto medio di un segmento.
In questo caso le coordinate del punto medio M di AB sono:

$$x_m = \frac{(x_A + x_B)}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$y_m = \frac{(y_A + y_B)}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$ da cui **M (3 ; 3)**.

Problema 9

Determinare le coordinate del punto medio M del segmento di estremi A(6; –1) e B(2;1).



Applicando le formule:

$$x_m = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \qquad y_m = \frac{(y_2 + y_1)}{2}$$

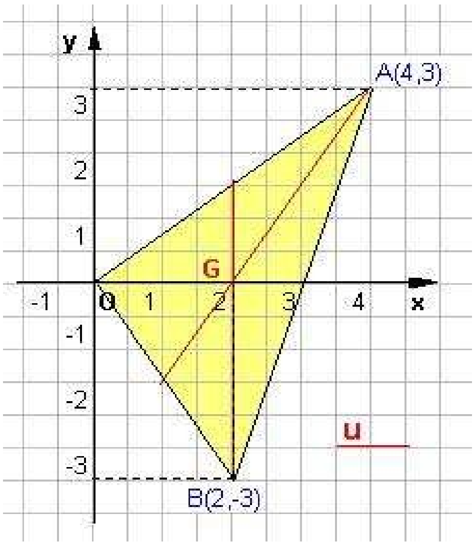
troviamo le coordinate del punto medio di un segmento.

In questo caso le coordinate del punto medio M di AB sono:

$x_m = \frac{(x_A + x_B)}{2} = \frac{6+2}{2} = 4 \qquad y_m = \frac{(y_A + y_B)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$ da cui **M (4 ; 0)**.

Problema 10

Determinare le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici O(0;0), A(4;3), B(2 ;-3).



Il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle tre mediane.

Applicando le formule rispettivamente

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};$$

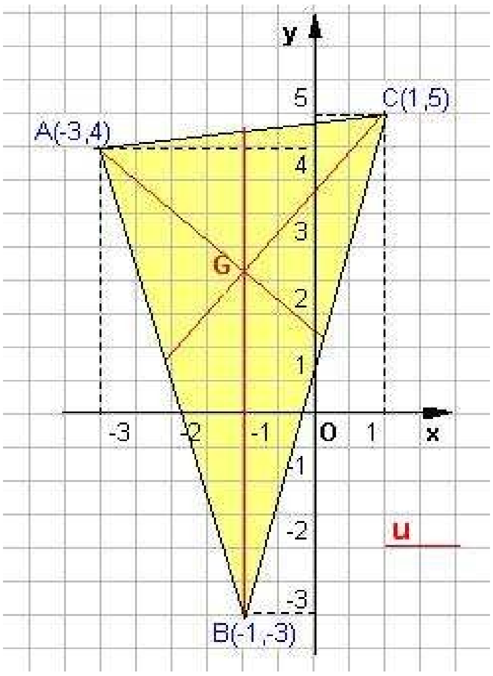
per trovare le coordinate del baricentro di un triangolo si ottiene

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{0+4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{0+3-3}{3} = 0$$ da cui **G (2 ; 0)** .

Problema 11

Determinare le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici A(–3;4), B(–1;–3), C(1;5).



Applicando le formule rispettivamente

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};$$

per trovare le coordinate del baricentro di un triangolo si ottiene

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-3-1+1}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{4-3+5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

da cui **G (–1 ; 2)** .