1.2 数列极限的计算

【内容分析】

本节主要进行数列极限的四则运算的训练。理解并掌握无穷小、大的概念，并会利用无穷小性质进行简单计算。拓展了解无穷大的性质，并会简单的计算。高职生对无穷大的性质不做要求；非专本贯通不要求严格化的定义，对无穷大和有界的关系仅图解法要求.

【教学内容分析】

1.数列极限的四则运算

2.无穷大和无穷小

【重难点】

重点是数列极限的四则运算，无穷小的性质及计算。

难点是无穷大和无穷小的概念、无穷大的性质。

【知识目标】

1.掌握数列极限的四则运算；掌握无穷小的概念、性质及计算

2.理解无穷大的概念和性质。

3.了解无穷大和有界的关系的图解法；了解无穷大和有界严格性定义的证明。

【能力目标】

1.能熟练运用数列极限的四则运算和无穷小的性质进行数列极限的计算

2.会借助图像理解无穷大的概念、分析无穷大和有界的关系

3.尝试用$\varepsilon-\delta$*语言*表述无穷大和无穷小的概念

【过程和方法目标】

1. 首先，给出四则运算的法则，并强调其适用的条件，并给出可以拓展的范围。接着,在总结常见的收敛数列和发散数列的举出上，结合数列的敛散性法则,先分析以下数列的敛散性。然后,学生上黑板完成 1-5 的计算,**要求写出如何利用四则运算法则的过程**,学生点评，学生纠错答疑。最后，学生分组合作探究,引出无穷小的概念与性质，和下面的知识点进行连接。

2.在无穷小的学习过程中,首先,用一个数学建模案例,引出对无穷小的概念的兴趣。然后,通过多角度分析,大量举例子的方法,加强对无穷小概念的理解。接着,课上及时测试和练习，强化概念的学习，熟能生巧。最后，对接专升本真题,。

3.拓展学习难点无穷大的概念的过程中，首先，给出思维导图,对无穷大的性质和知识框架有个大致了解。接着。然后，借助 GGB，通过数学实验，掌握图像分析的方法，深度理解无穷大的概念。接着,通过对比综合分析的方法,了解无穷大和有界性的区别。最后,在掌握重点，突破难点的图解方法的基础上，适当拓展无穷大和无穷小的ε-δ *语言*,举出一到两个例题，学会数学概念的符号语言表达，适当培养抽象思维。

【情感态度和价值观目标】

1.通过举例子、举反例的方法，深刻理解相关概念和方法的思想内涵和本质，边学边练，强化练习。通过案例分析的方法培养学生对比、类比等数学思维能力。

2. 对无穷大和有界的关系用GGB图解法要求，在此基础深刻理解无穷大的概念、有界性的概念。借助数学工具GGB分析性质的过程中，培养学生数据分析、数学应用、数学的工具化意识。

3.在问题驱动、解决数学建模项目中，激发学生对数学的学习兴趣，具有数学视野。

4. 通过“$\varepsilon-\delta$”语言学习,具有基本的数学抽象素养，掌握微积分的语言。并尝试利用定义证明函数的过程中培养数学逻辑推理、数学抽象、数学计算素养。

5.在组织启发、讨论、探究、实验等活动中，培养学生自主、探究、反思的学习习惯；增加交流沟通，团队合作、竞争自信的职业素质，增强诚实认真的道德品质 。

1.2.1 数列极限的四则运算

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A + B$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A \times B$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (C \cdot b_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = C \cdot B$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^m = (\lim\limits_{n\to+\infty} a_n)^m = (A)^m$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n} = \frac{A}{B}(\mathbf{B \neq 0})$

注意：

①数列必须收敛；

②商的运算，分母的极限不能是0；

③有限次运算仍成立，无限次不适用；

④极限的运算和任何运算同级别，可以推广到复合运算；

⑤亦适用于函数极限（6 种趋向）的四则运算.

口答：在总结常见的收敛数列和发散数列的举出上，结合数列的敛散性法则，分析以下数列的敛散性.（收敛√还是发散×）

1) $\{\frac{1}{n}\}$

2) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$

3) $1-\frac{1}{2^n}$

4) $\{1+\frac{1}{n}\}$

5) $\{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$

6) $\{n+C\}$

7) $\{3+(-1)^n\}$

8) $\{n+(-1)^n\}$

9) $\{(-1)^n+(-1)^{n+1}\}$

★10) $\{\frac{n+1}{n}\}$（需化简）

11) $\{\frac{(-1)^n+(-1)^{n+1}+3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\}$

例题1.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 2 \times \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 2 \times 1 = 2$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = (\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n})^2 = 0^2 = 0$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 + 0 = 1$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} [(1-\frac{1}{2^n}) \cdot \frac{1}{n}] = \lim\limits_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{2^n}) \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{n}) = 1 \cdot 0 = 0$

练习1.学生上黑板完成1-5的计算,**要求写出如何利用四则运算法则的过程**。学生点评，学生纠错答疑；学生分组合作探究7-8.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} =$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^6 =$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2+\frac{1}{n}) =$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$ 6. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) =$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n+1}) =$ 8. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1}) =$

【历年真题】

1.(2024 数Ⅲ T6)已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -3$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(b_n+1) =$ ________.

解析：-4

2.(2022 数Ⅲ T12)已知 $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to1} g(x) = -2$, 则 $\lim\limits_{x\to1}[2f(x)\cdot g(x)] =$ ________.

解析：4

1.2.2 无穷大和无穷小

【情境】

考虑一个人走向路灯时，其影子的长度问题.其目标就是灯的正下方，则当此人越接近目标点时，其影子的长度逐渐趋于 0.（相似三角形解决）

【观察与思考】

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0, \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0, \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0, \lim\limits_{x\to+\infty} sinx = 0, \lim\limits_{x\to+0} x = 0, \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0, \lim\limits_{x\to0}|x| = 0,$

一、无穷小与无穷大的概念

1.无穷小量：在自变量的某个变化过程中，极限为零的量（或函数）。

2.无穷大量：在自变量的某个变化过程中，绝对值趋向于无穷大的量。

① **无限变小的量不是无穷小，应绝对值无穷小，极限为0；**
② **在常量中只有0是无穷小；**
③ **相对于过程而言的,都应先说明自变量的趋向.例,当$x\to1$时,$y=x-1$是无穷小,而$y=\frac{1}{x-1}$是无穷大.**
④ **无穷大是变量,任何常数不是无穷大.**
⑤ **无穷大(量)是发散的变量，常见的4种发散类型中，3种都是无穷大量.**
⑥ **无穷大一定无界，但是无界变量未必是无穷大.**
⑦ **无穷大应该是自变量的某个变化过程中，相应函数的绝对值一直在增大！而不是震荡！**

思考：

1.$\frac{1}{n}$*是无穷小量?*

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$,*所以当*$n\to+\infty$*时，*$2n$*是无穷大量?*

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$,*所以当*$n\to+\infty$*时，*$-n$*是无穷小量?*

常见数列的无穷大量和无穷小量你能举出几个例子?

二、无穷小的性质

性质1.无穷小+无穷小（有限个）=无穷小；
性质2.无穷小×无穷小（有限个）=无穷小；
性质3.无穷小×常数=无穷小；
性质4.无穷小×有界变量=无穷小；
性质5. 在同一变化过程中,无穷大倒数是无穷小,即极限为0;非0无穷小量的倒数是无穷大量.

性质1、2、3可以归结到四则运算,注意区别有限和无限.

例, $n\to+\infty, \frac{1}{n}\to+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个})=0.$

性质4是重点

例, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{sinx}{x} = ($ $)$; $\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x} = ($ $)$; $\lim\limits_{x\to0} x\cos\frac{1}{x} = ($ $)$

性质5说的是无穷小与无穷大的关系，可以理解为互为倒数，但要注意常数0.

问题：前面常见的收敛数列和发散数列，哪些是无穷小量？哪些是无穷大量?

例 1.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$.　　　　2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^3}}$.

解： 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,|\arctan x|<\frac{\pi}{2},\arctan x$为有界函数.所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$=0.

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}=0,\cos x$为有界函数.所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^3}}$=0.

【课堂练习】

1. $-1,-2,-3,-4,\cdots$. 数列趋向于$-\infty$，所以是无穷小.( )

2.$\frac{1}{n}$是无穷小.（）

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\text{有限个}})$=0.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{个}})$=0.

5.若变量x是无穷小.下面说法中错误的是（）.

A. x^2是无穷小;

B. 2x是无穷小;

C. $x-0.0001$是无穷小;

D. $-x$是无穷小.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\times\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}$=0.( )

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}]=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ =0+0=0.( )

8.下列数列极限不存在的是（）

A.10，10，10，…

B. 0，1，0，$\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{3}$，…

C. $\sqrt{1}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，...

D. 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$-\frac{1}{6}$，…

解析： 注意B.考海涅定理，**数列收敛的充要条件是任何一个子数列均收敛于同一个数.**

【作业】

1.要求：①、④简单，②、③、⑥重点练习⑤、⑦、⑧

① $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=$

② $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=$

③ $\lim\limits_{n\to+\infty}n(-1)^n=$

④ $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=$

⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=$

⑥ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)})=$

2. 多种方法试一试?

① $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+3}=$

② $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n+1}=$

③ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+5}{3n^2-2n-1}$=?

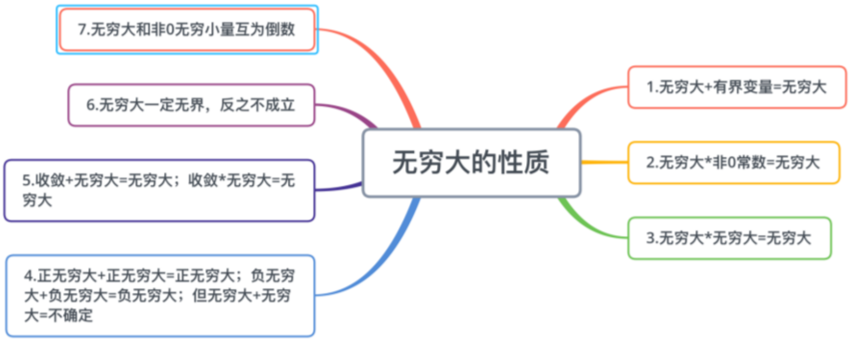
【历年真题】

1.(2024数 II T2)当$x\to0$时，以下函数是无穷小量的是(C).

A.$cosx$
B.e^x
C.$\boldsymbol{ln}\,(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})$
$D.\sqrt{x+1}$
2.(2023数ⅠT3)当$x\to 0$时，以下不是无穷小量的是(D).
A.$tanx$
B.$sin2x$
C.$\ln(1+x)$
D.$\boldsymbol{e^x+1}$

***三、无穷大的严格定义与性质【拓展】**

1 .无穷大量的性质



【竞赛与考研】

1.（1998年2）设数列x_n,y_n,满足$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n=0$,则下列断言正确的是（ D ）
$A.$若 x_n 发散，则y_n必发散
$B.$若 x_n 无界，则y_n必有界
$C.$若 x_n 有界，则y_n必为无穷小
$D.$若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则y_n必为无穷小

解析：举反例的方法

$A.$反例取$x_n=n,y_n=0;B.$反例取$x_n=\{1,0,2,0,3,\dots,0,n,\dots\},y_n=\{0,1,0,2,0,3\dots,0,n,\dots\}$
$C.$反例取$x_n=0,y_n=n$
$D.\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n\cdot\frac{1}{x_n}$根据无穷小× 有界变量=无穷小

2.（2003年1）设数列a_n,b_n,c_n,均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0,\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=1,\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=\infty$,则必有(C).
$A.a_n<b_n$对任意n都成立；
$B.b_n<c_n$对任意n都成立
$C.\lim\limits_{n\to+\infty} a_n c_n$不存在
$D.\lim\limits_{n\to+\infty} b_n c_n$不存在

解析：

$A.B.$*极限值和数列的前有限项的数值无关,*
$C.$*举反例的方法,*取$a_n=\frac{1}{n},c_n=n$
$D.\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=+\infty,\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=1$根据**无穷大 × 常数 = 无穷大**$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n c_n=+\infty.$

2.无穷大量的严格定义

无穷大量的严格定义

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X>0,$当$|x|>X$ 时$,|f(x)|>M.$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时$,|f(x)|>M.$

证明无穷大的方法：

①将$|f(x)|>M,$分别换成$f(x)>M,f(x)<M,$便得到$\lim f(x)=+\infty,\lim f(x)=-\infty$的定义.

②用定义证明无穷大的方法:

$\forall M>0,$从不等式$|f(x)|>M$出发,去分析一个不等式$|x-x_0|<\delta(M)$(一个与M有关的很小的正数),取$\delta=\delta(M)$;最后给出证明：$\forall M>0,\exists\delta=\delta(M)>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时$,|f(x)|>M.\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

例1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty$

证明：$\forall M>0,$要$\left|\frac{1}{(x-1)^2}\right|=\frac{1}{(x-1)^2}>M,$只要$(x-1)^2<\frac{1}{M},$即$|x-1|<\frac{1}{\sqrt{M}},$于是取$\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$

则当$0<|x-1|<\delta$时$,\left|\dfrac{1}{(x-1)^2}\right|>M.\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty.$

一、证明无穷大的方法：

①将$|f(x)|>M,$分别换成$f(x)>M,f(x)<M,$便得到$\lim f(x)=+\infty,\lim f(x)=-\infty$的定义.

②用定义证明无穷大的方法:

$\forall M>0,$从不等式$|f(x)|>M$出发,去分析一个不等式$|x-x_0|<\delta(M)$(一个与M有关的很小的正数),取$\delta=\delta(M)$;最后给出证明：$\forall M>0,\exists\delta=\delta(M)>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时$,|f(x)|>M.\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

二、证明不是无穷大、无界的方法：

①证明数列不是无穷大的方法，只需找到一个趋向于∞的数列$\{x_n\}$,使得$\{f(x_n)\}$是收敛数列或有界数列.

②证明函数不是无穷大的方法，只需找到一个收敛于x_0的数列$\{x_n\}$,使得$\{f(x_n)\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq\infty.$

③证明函数无界的方法,欲证函数f(x)在集合X上无界，只需找出一个数列$\{x_n\}\subset X$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty.$

【竞赛与考研】

3.(1993年2)当$x\to 0$时$,f(x)=\frac{1}{x^2}sin\frac{1}{x}$(橙色)是(C).

A.无穷小

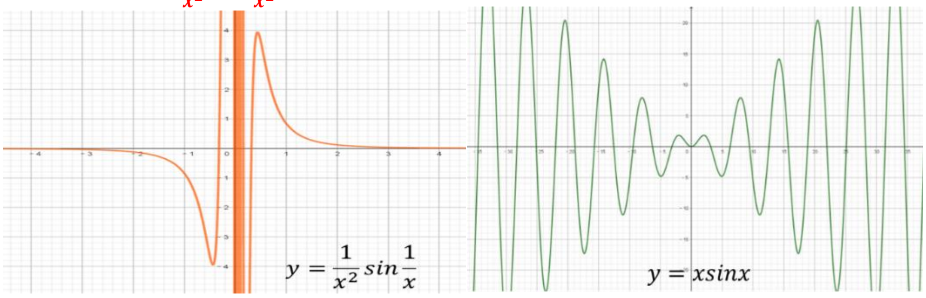
B.无穷大

C.无界的，但不是无穷大

D.有界的，但不是无穷大

解析：问题可以转化成无穷大量× 有界变量＝？,是否有类似无穷小量× 有界变量＝ 无穷小量的结论？？

相应函数$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$在0的邻域内,在$x\to 0$的过程中,绝对值一会变到无穷大，一会逐渐变到0,一会又变到无穷大，绝对值是震荡的,而不是一直变大!无穷大应该是自变量的**某个变化过程中**,相应函数的绝对值一直在增大！而有界性只看相应函数$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$*的绝对值的范围，强调结果不关注过程.*



解:

一、判断有界性

$\because \forall n\in N,\exists x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},$使得$f(x_n)=\frac{1}{{x_n}^2}\sin\frac{1}{{x_n}^2}=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2>n,$故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0,$但$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$

$\therefore$ 当$x\to 0$时$,f(x)=\dfrac{1}{x^2}sin\dfrac{1}{x}$是无界的.

二、判断无穷大

$\because \exists x'_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, 有$f(x'_n)=\dfrac{1}{{x'_n}^2}\sin\dfrac{1}{{x'_n}^2}=0$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=0$, 而$\{f(x'_n)\}$有界,

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x_n)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x^2}\neq\infty$

***无穷大必无界，无界未必是无穷大.

① 无穷大应该是自变量的某个变化过程中,相应函数的绝对值一直在增大！关注其绝对值变化的过程,还强调极限趋向无的过程,绝对值是递增的。

②而有界性只看相应函数的绝对值的范围，强掉极限的结果不关注趋向的过程.

反例1. $y=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$无界，但$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x^2}$不是无穷大量, 即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x^2}\neq\infty$.

反例2. $y=x\sin x$在$(0,+\infty)$无界，但$x\sin x$不是无穷大量, 即$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x\neq\infty$.

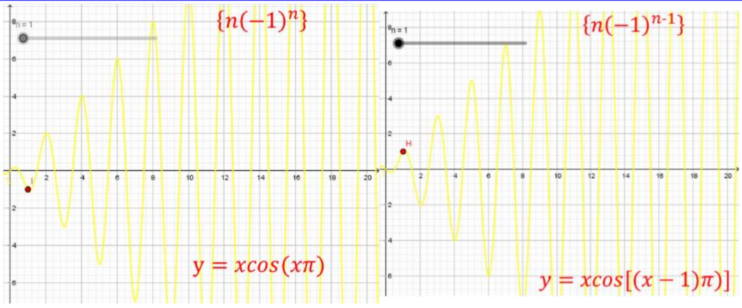
③通过数学实验,我们可以进一步发现：

反例1. $y=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$有界，但$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x^2}=0$(无穷小).

反例2. $y=x\sin x$在$(0,1)$有界，但$\lim\limits_{x\to 0}x\sin x=0$(无穷小).

利用*无穷小量×有界变量 = 无穷小量*可以证明.

④我们还注意到，函数和数列的极限还有所区别的.例如，我们在研究数列$\{n(-1)^n\}$: $-1,2,-3,\cdots,n(-1)^n,\cdots$的极限时,曾经引用了拟合函数$y=x\cos(x\pi)$,当$x\to\infty$时,*数列$\{n(-1)^n\}$是无穷大，但是$y=x\cos(x\pi)$却不是无穷大.类似的*



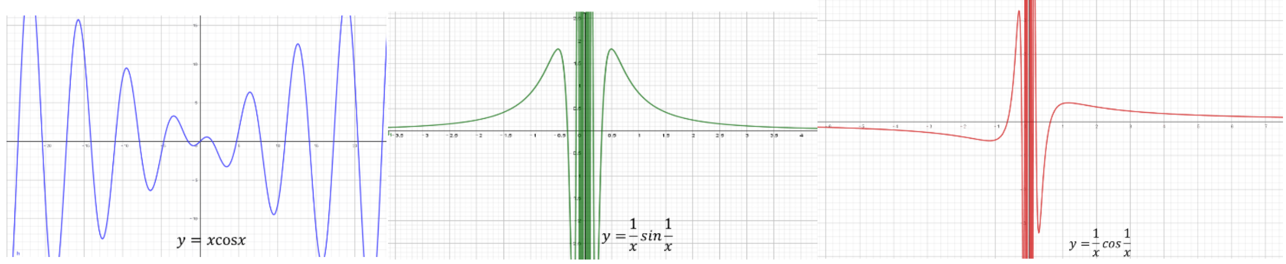
【数学实验】类似的，我们可以继续下列函数的实验

1.下列函数在指定区间的有界？指定某种趋向下是否是无穷大？

反例3. $y=x\cos x, x\in(0,+\infty)$*无界, 且*$\lim\limits_{x\to+\infty}x\cos x\neq\infty$; $y=x\cos x, x\in(0,1)$*有界, 且*$\lim\limits_{x\to+\infty}x\cos x=0$.

反例4. $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$*无界, 且*$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\neq\infty$; $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, x\in(1,+\infty)$*有界, 且*$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\neq 0$.

反例5. $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$*无界, 且*$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\neq\infty$; $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, x\in(1,+\infty)$*有界, 且*$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}=0$.



2.试判断：$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界? 这个函数是不是$x\to+\infty$时的无穷大？(同济版证明不严谨)

解：一、判断有界性

$\because \forall M>0$，*总有*$|x_0|\in(M,+\infty)$，*使得*$\cos x_0=1$, *从而*$|y|=|x_0\cos x_0|=|x_0|>M$,

$\therefore y=x\cos x$*在*$(-\infty,+\infty)$*内有界.*

二、判断无穷大

又$\because \forall M>0$，$X>0$, *总有*$x_0\in(X,+\infty)$，*使得*$\cos x_0=1$, *从而*$y=x_0\cos x_0=0<M$,

$\therefore y = x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$不是$x \to +\infty$时的无穷大
2.思考函数e^x在$x \to +\infty$时的极限？$x \to -\infty$的极限？
① $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
② $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = ?$
③ $\lim\limits_{x \to \infty} e^x$ 不存在.
【历年真题】
考点一、极限的四则运算法则
1. (2024数Ⅲ T6)已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -3$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(b_n + 1) =$ ________.
解析：-4
2. (2022数Ⅲ T12)已知 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to 1} g(x) = -2$, 则 $\lim\limits_{x\to 1}[2f(x)\cdot g(x)] =$ ________.
解析：4
考点二、无穷小的概念
1.(2024数Ⅱ T2)当$x \to 0$时，以下函数是无穷小量的是(C).
A.$\cos x$
B.e^x
C.$\ln(1+x)$
D.$\sqrt{x+1}$
2.(2023数Ⅰ T3)当$x \to 0$时，以下不是无穷小量的是(D).
A.$\tan x$
B.$\sin 2x$
C.$\ln(1+x)$
D.$e^x + 1$