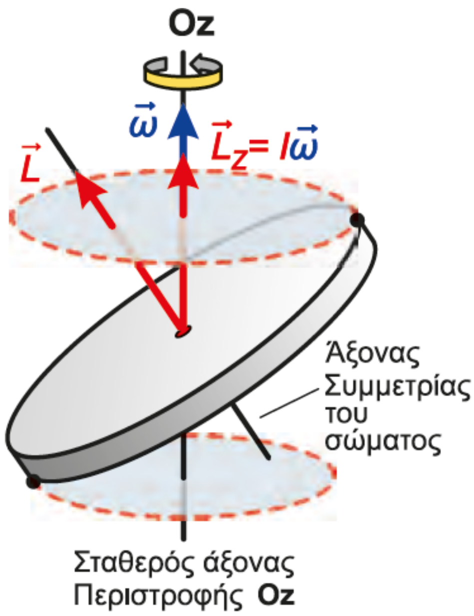
Περιστροφή στερεού γύρω από άξονα που δεν είναι ο άξονας συμμετρίας του

Στο σχολικό εγχειρίδιο Φυσικής Κατεύθυνσης, Γ τάξης Λυκείου, με τίτλο Μηχανική Στερεού Σώματος, στη σελίδα 107, παρουσιάζεται ομογενής δίσκος να περιστρέφεται ως προς ακλόνητο άξονα που δεν είναι ο άξονας συμμετρίας του (Εικόνα 1). Στο εν λόγω σχήμα είναι σχεδιασμένες η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ τού δίσκου, καθώς και η στροφορμή $\vec{L}$ της οποίας η διεύθυνση μεταπίπτει καθώς ο δίσκος περιστρέφεται. Στο σχήμα η γωνιακή ταχύτητα έχει σχεδιαστεί κατά μήκος τού άξονα περιστροφής z, ενώ η στροφορμή παρουσιάζεται στη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας τού δίσκου (κάθετος στον δίσκο).

Προφανώς, όταν ο δίσκος περιστρέφεται ως προς μια από τις διαγωνίους του (ο άξονας περιστροφής κάθετος στον άξονας συμμετρίας τού δίσκου) η στροφορμή δεν μπορεί να έχει διεύθυνση αυτή της καθέτου στον δίσκο. Συνεπώς, η εν λόγω αναπαράσταση της στροφορμής στο σχολικό βιβλίο κρίνεται προβληματική.



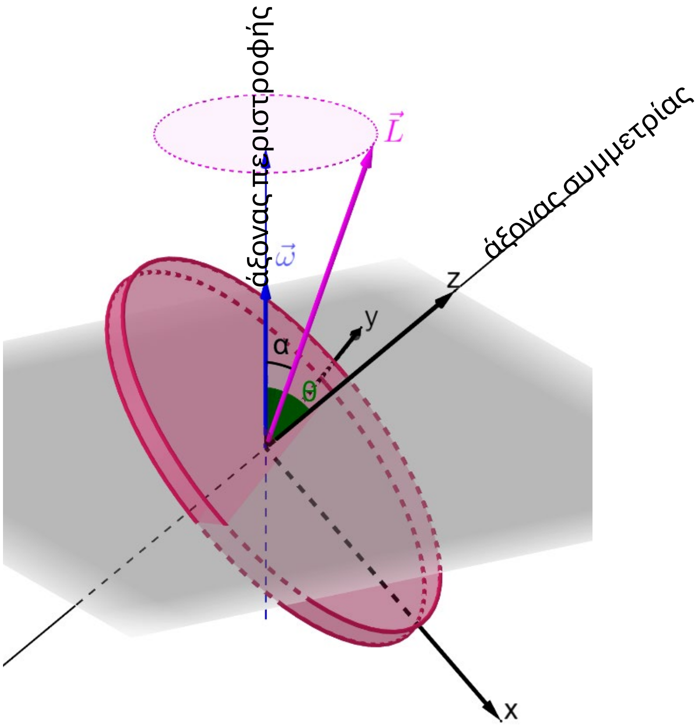
Εικόνα 1

Θα αποδείξουμε ότι το εν λόγω σχήμα δεν είναι σωστό. Συγκεκριμένα, εφόσον ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, αλλά δεν είναι κύριος άξονας αδρανείας του, θα δειχθεί ότι η διεύθυνση της στροφορμής $\vec{L}$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$\cos\alpha = \frac{\vec{L}\cdot\vec{\omega}}{|\vec{L}||\vec{\omega}|} = \frac{\left(1+\cos^2(\theta)\right)}{\sqrt{1+3\cos^2(\theta)}}$$

όπου α η γωνία που σχηματίζει η στροφορμή $\vec{L}$ με τον άξονα περιστροφής και όπου θ η γωνία που σχηματίζει ο άξονας περιστροφής του δίσκου με την κάθετο στον δίσκο (άξονας συμμετρίας του).

Η περίπτωση λεπτού ομογενούς κυκλικού δίσκου, μάζας m και ακτίνας R, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα, που σχηματίζει γωνία θ ως προς την κάθετο στον δίσκο.



https://www.geogebra.org/m/rshmgkm3

Εικόνα 3

Θεωρούμε το πάχος τού δίσκου αμελητέο και επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$.
Η ροπή αδράνειας στοιχειώδους τμήματος $\rho d\varphi d\rho$ τού δίσκου ως προς τον άξονα z είναι $\sigma\rho^3 d\varphi d\rho$. Επομένως, η ροπή αδρανείας ολόκληρου του δίσκου ως προς τον άξονα z είναι

$$I_{zz} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma\rho^3 d\varphi d\rho = \sigma \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{m}{\pi R^2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R 2\pi = \frac{1}{2}mR^2$$

Η ροπή I_{zz} μπορεί όμως να υπολογιστεί και με το ολοκλήρωμα

$$I_{zz} = \iint_m (x^2 + y^2)dm = \int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm = I_{xx} + I_{yy}$$

το οποίο προκύπτει επίσης από το θεώρημα των κάθετων αξόνων.

Προφανώς, λόγω συμμετρίας

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2} = \frac{1}{4}mR^2$$

Τα γινόμενα αδρανείας ως προς τους άξονες x και y είναι

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sigma xydydx = -\sigma \int_{-R}^{R} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = 0$$

Το γινόμενο αδρανείας του στοιχείου $dydx$ ως προς τους άξονες x και z είναι το γινόμενο $\sigma dydx$ επί τις αποστάσεις από τα επίπεδα yz και xy, που είναι x και 0, αντιστοίχως. Επομένως,

$$I_{xz} = I_{zx} = 0 \text{ και όμοια } I_{yz} = I_{zy} = 0$$

Καταλήγουμε, έτσι, στον τανυστή αδράνειας λεπτού ομογενή δίσκου I:

$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι άξονες του συστήματος συντεταγμένων x, y και z (Εικόνα 3) είναι οι κύριοι άξονες αδρανείας τού δίσκου.

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ έχει συνιστώσες ως προς τους κύριους άξονες:

$$\omega_x = -\omega \sin\theta$$

$$\omega_y = 0$$

$$\omega_z = \omega \cos\theta$$

Επομένως, η στροφορμή του δίσκου είναι

$$\vec{L} = [I]\vec{\omega} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega\sin\theta \\ 0 \\ \omega\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}mR^2\omega\sin\theta \\ 0 \\ \frac{1}{2}mR^2\omega\cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{L} = -\frac{1}{4}mR^2\omega\sin\theta\,\hat{x} + \frac{1}{2}mR^2\omega\cos\theta\,\hat{z} = \frac{1}{2}mR^2\omega\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\,\hat{x} + 0\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\right)$$

όπου $\hat{x}$, $\hat{y}$ και $\hat{z}$ τα μοναδιαία διανύσματα που ανήκουν στους κύριους άξονες και **περιστρέφονται μαζί με το σώμα**.

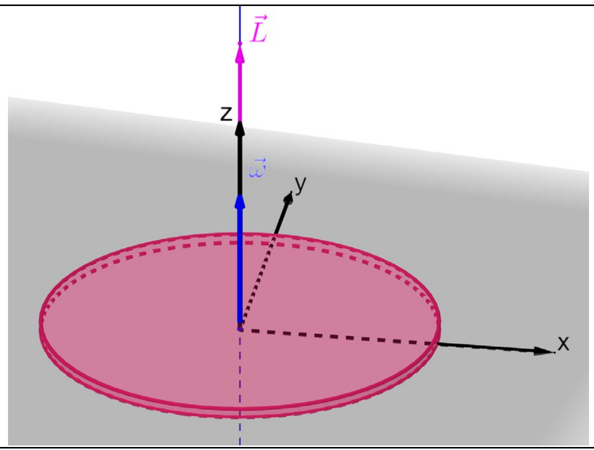
Η γωνιά α που σχηματίζει το διάνυσμα της στροφορμής $\vec{L}$ με τον άξονα περιστροφής (και άρα και το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$) υπολογίζεται από το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{L}\cdot\vec{\omega}}{|\vec{L}||\vec{\omega}|} = \frac{\left(1+\cos^2(\theta)\right)}{\sqrt{1+3\cos^2(\theta)}}$$

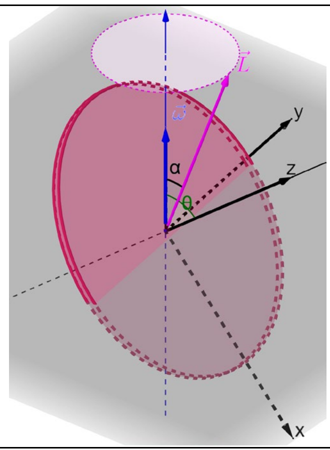
Η ροπή που απαιτείται για να διατηρηθεί αυτό το είδος της κίνησης του δίσκου (περιστροφή με σταθερή $\vec{\omega}$ γύρω από άξονα που δεν είναι κύριος άξονας αδρανείας) ισούται με

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{L}}$$

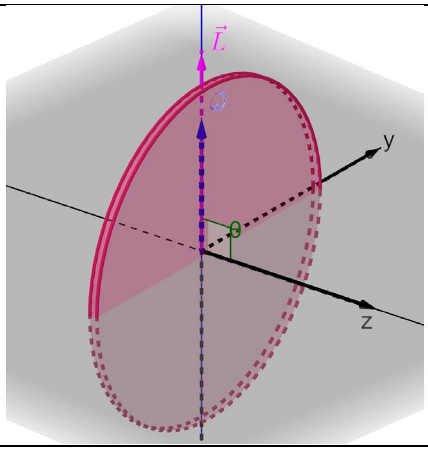
$$\vec{M} = \frac{1}{4}mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{y}$$



Για $\theta = 0°$: Περιστροφή γύρω από κύριο άξονα αδρανείας του δίσκου. Η στροφορμή $\vec{L}$ είναι συγγραμμική με τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.



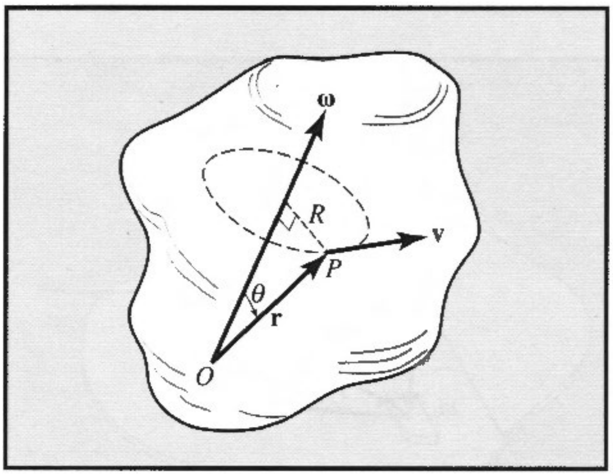
Για $0° < \theta < 90°$: Περιστροφή γύρω από άξονα που δεν είναι κύριος άξονας αδρανείας. Η στροφορμή $\vec{L}$ δεν είναι συγγραμμική με τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, αλλά σχηματίζει γωνία $\alpha \neq 0°$



Για $\theta = 90°$: Περιστροφή γύρω από κύριο άξονα αδρανείας του δίσκου(διάμετρος). Η στροφορμή $\vec{L}$ είναι συγγραμμική με τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.

Παράρτημα

Περιστροφή στερεού σώματος με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από σταθερό άξονα: Η συμπεριφορά τού διανύσματος της στροφορμής.



Εικόνα 2

Γενικά η στροφορμή ως προς σημείο O ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το O (Εικόνα 2) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i \Rightarrow$$

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \Rightarrow$$

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

όπου $\vec{r}_i$ το διάνυσμα θέσης της στοιχειώδους μάζας m_i. Από τις ιδιότητες των τριπλών διανυσματικών γινομένων παίρνουμε:

$$\vec{L} = \sum m_i [\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \Rightarrow$$

$$\vec{L} = \sum m_i \left[\vec{\omega}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \vec{r}_i \left(x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z\right)\right]$$

όπου θεωρούμε ότι οι άξονες x, y και z είναι σταθεροί ως προς το στερεό σώμα (περιστρέφονται μαζί του). Βρίσκουμε έτσι τις συνιστώσες τού διανύσματος $\vec{L}$:

$$L_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \omega_x - \sum m_i x_i y_i \omega_y - \sum m_i x_i z_i \omega_z$$

$$L_y = -\sum m_i y_i x_i \omega_x + \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) \omega_y - \sum m_i y_i z_i \omega_z$$

$$L_z = -\sum m_i z_i x_i \omega_x - \sum m_i z_i y_i \omega_y \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega_z$$

Το πιο πάνω αποτέλεσμα μπορεί να αποδοθεί σε συνοπτική μορφή:

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$[I]\vec{\omega} = \vec{L}$$

όπου οι ποσότητες I_{xx}, I_{yy} και I_{zz} λέγονται ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες x, y και z, αντιστοίχως, ενώ οι ποσότητες I_{xy}, I_{xz}, … λέγονται γινόμενα αδράνειας. Οι εννέα ποσότητες του πίνακα αποτελούν τις συνιστώσες του **τανυστή αδράνειας** στο σύστημα συντεταγμένων xyz και είναι συμμετρικές ως προς την κύρια διαγώνιο, εφόσον

$$I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{yz}$$

Τα γινόμενα αδράνειας είναι μηδέν ως προς κύριους (ή πρωτεύοντες) άξονες αδράνειας του στερεού. Εάν το σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν από τους κύριους άξονες του η διεύθυνση της στροφορμής του είναι ίδια με αυτή της γωνιακής του ταχύτητας (ορισμός κύριων αξόνων). Συνεπώς, ως κύριος άξονας ενός στερεού ορίζεται ο άξονας για τον οποίο δεν απαιτείται συνισταμένη ροπή ώστε το σώμα να έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Ένας άξονας συμμετρίας του στερεού είναι πάντοτε κύριος άξονας.

Επομένως, για περιστροφή γύρω από τους κύριους άξονες ισχύει

$$I\vec{\omega} = \vec{L}$$

όπου $\boldsymbol{I}$ **βαθμωτό μέγεθος**, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Ο προσδιορισμός των κύριων αξόνων ανάγεται σε πρόβλημα ιδιοτιμών.

Από τις (1) και (2):

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Για μη τετριμμένη λύση ($\vec{\omega} \neq \vec{0}$), θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα να είναι ίση με μηδέν

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-I \end{vmatrix} = 0$$

Η πιο πάνω τριτοβάθμια εξίσωση ως προς I έχει ως λύσεις τις τρεις κύριες ροπές αδράνειας I_1, I_2 και I_3. Θέτοντας ως $I = I_1$ στην (3), προσδιορίζουμε τους λόγους $\omega_x\!:\omega_y\!:\omega_y$ που δίνουν τη διεύθυνση του $\vec{\omega}$ και, κατ' επέκταση, τη διεύθυνση του κύριου άξονα που αντιστοιχεί στην I_1. Ομοίως, αντικαθιστώντας τα I_2 και I_3, υπολογίζουμε τις διευθύνσεις των αντίστοιχων κύριων αξόνων.

Έστω σύστημα κύριων αξόνων, οι οποίοι περιστρέφονται μαζί με το σώμα. Η γωνιακή ταχύτητα τού σώματος έχει τη μορφή

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}$$

όπου τα μοναδιαία διανύσματα ανήκουν στους κύριους άξονες και οι συνιστώσες του $\vec{\omega}$ υπολογίζονται ως προς αυτούς. Η στροφορμή $\vec{L}$ τού σώματος ως προς τους κύριους άξονες ισούται με

$$\vec{L} = I_{xx}\omega_x \hat{x} + I_{yy}\omega_y \hat{y} + I_{zz}\omega_z \hat{z}$$

Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σχέση για τον υπολογισμό της χρονικής παραγώγου στον Γενικευμένο 2^o Νόμου του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση λαμβάνουμε

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_{xx}\frac{d\omega_x}{dt}\hat{x} + I_{yy}\frac{d\omega_y}{dt}\hat{y} + I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt}\hat{z} + I_{xx}\omega_x\frac{d\hat{x}}{dt} + I_{yy}\omega_y\frac{d\hat{y}}{dt} + I_{zz}\omega_z\frac{d\hat{z}}{dt}$$

όπου οι χρονικές παραγώγοι των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{x}$, $\hat{y}$ και $\hat{z}$ (τα οποία περιστρέφονται με το σώμα) ισούνται με

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}, \frac{d\hat{\upsilon}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\upsilon} \; \textit{και} \; \frac{d\hat{z}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{z}$$

Ως εκ τούτου το διάνυσμα της ροπής μπορεί να γραφτεί ως

$$\vec{M} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} \Rightarrow \begin{cases} M_x = I_{xx}\dfrac{d\omega_x}{dt} - \left(I_{yy} - I_{zz}\right)\omega_y\omega_z \\ M_y = I_{yy}\dfrac{d\omega_y}{dt} - \left(I_{zz} - I_{xx}\right)\omega_z\omega_x \\ M_z = I_{zz}\dfrac{d\omega_z}{dt} - \left(I_{xx} - I_{yy}\right)\omega_x\omega_y \end{cases}$$

Το σύστημα των πιο πάνω τριών εξισώσεων είναι γνωστό ως *Εξισώσεις του Euler.*

Στην περίπτωση που το στερεό περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ (οπόταν και το διάνυσμα της στροφορμής $\vec{L}$ θα περιστρέφεται με την ίδια σταθερή $\vec{\omega}$), η χρονική παράγωγος τής $\vec{L}$ - από τη διανυσματική μορφή των εξισώσεων του Euler - ισούται με

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε και με απευθείας παραγώγιση της σχέσης ορισμού της $\vec{L}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i\vec{v}_i + \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right] = \sum \left[\vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right] =$$

$$\sum \left[\vec{r}_i \times m_i \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right] = \sum m_i \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)\right] = \sum m_i[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{v}_i)]$$

$$\sum m_i[-\vec{\omega} \times (\vec{v}_i \times \vec{r}_i) - \vec{v}_i \times (\vec{r}_i \times \vec{\omega})] = \sum m_i[-\vec{\omega} \times (\vec{v}_i \times \vec{r}_i) - \vec{v}_i \times (-\vec{v}_i)] =$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα Jacobi

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

οπόταν παίρνουμε:

$$\sum m_i[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)] = \vec{\omega} \times \sum m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

$$\boxed{\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}}$$