Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 5 - Interpretación geométrica de la derivada

1. Determina el punto (x, y) de la función $f(x)=x^3-x$ donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a 74 .

La pendiente de la recta tangente en un punto coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f'(x_0)=m \quad \rightarrow \quad f'(x)=3x^2-1 \quad , \quad m=74 \quad \rightarrow \quad x=\pm 5$$

Los puntos son → $(5, f(5))=(5, 120)$, $(-5, f(-5))=(-5, -120)$

2. Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ **en** $x=-2$ **.**

La ecuación punto pendiente de la recta relaciona el punto del enunciado con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto → $m=\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$

$x_0=-2 \quad \rightarrow \quad f(-2)=\frac{-2}{5}$

$m=f'(-2) \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} \quad \rightarrow \quad f'(-2)=\frac{4+1-8}{(4+1)^2}=\frac{-3}{25}$

La recta resulta → $\frac{-3}{25}=\frac{y+\frac{2}{5}}{x+2} \quad \rightarrow \quad \frac{-3}{25}x-\frac{6}{25}-\frac{2}{5}=y \quad \rightarrow \quad y=\frac{-3}{25}x-\frac{16}{25}$

3. Calcula la ecuación explícita de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)=arcotg(x)$ en el punto de valor de abscisa $x=1$.

De la ecuación punto pendiente de la recta → $m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$

$$x_0=1 \rightarrow y_0=f(x_0)=f(1)=arcotg(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$m=f'(x_0)=f'(1) \rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$$

Sustituyendo → $\frac{1}{2}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{x-1} \rightarrow \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=y-\frac{\pi}{4} \rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ → Recta tangente

La pendiente de la recta normal, al ser perpendicular a la tangente, cumple:

$$m_{normal}=\frac{-1}{m_{tangente}} \rightarrow m_{normal}=\frac{-1}{1/2} \rightarrow m_{normal}=-2$$

Por lo que la recta normal queda:

$$-2=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{x-1} \rightarrow -2x+2=y-\frac{\pi}{4} \rightarrow y=-2x+\frac{\pi}{4}+2$$

4. Determina en qué punto de la gráfica de la función $f(x)=3\sqrt{6x}$, la recta tangente forma un ángulo de 45^{o} con el eje de abscisas.

La tangente de 45^{o} nos da la pendiente de la recta tangente a la función → $m=tg(45^{o})=1$.
Hacemos la primera derivada e igualamos a 1.

$$f'(x)=1 \quad \rightarrow \quad f'(x)=3\frac{6}{2\sqrt{6x}}=\frac{9}{\sqrt{6x}} \quad \rightarrow \quad \frac{9}{\sqrt{6x}}=1 \quad \rightarrow \quad 9=\sqrt{6x} \quad \rightarrow \quad x=\frac{81}{6}=\frac{27}{2}$$

El punto será $\left(\frac{27}{2}, f\left(\frac{27}{2}\right)\right)=\left(\frac{27}{2}, 27\right)$

5. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica de la función $f(x)=\frac{3x}{x^2+2}$ **en los que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.**

Una recta paralela al eje de abscisas tiene pendiente nula, al ser una recta horizontal.

Como la derivada de la función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, debemos derivar e igualar a cero.

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{3(x^2+2)-3x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{3x^2+6-6x^2}{(x^2+2)^2}=\frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2} \quad \rightarrow \quad -3x^2+6=0$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

Las coordenadas de los puntos solución son:

$$(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))=(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4}) \quad , \quad (-\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))=(-\sqrt{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{4})$$

6. Sea la función $g(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2-\frac{2x}{3}-4$. Hallar los valores x de la curva en que la recta tangente es paralela a la recta $0=2x+3y-4$.

La pendiente de las rectas tangentes que buscamos coincide con la pendiente la recta:

$$0=2x+3y-4 \rightarrow y=\frac{-2}{3}x+\frac{4}{3} \rightarrow pendiente=\frac{-2}{3}$$

Derivamos la función e igualamos a este valor de la pendiente.

$$g(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2-\frac{2x}{3}-4 \rightarrow g'(x)=x^2-8x-\frac{2}{3} \quad , \quad g'(x)=\frac{-2}{3} \rightarrow x^2-8x-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3} \rightarrow$$

$$x^2-8x=0 \rightarrow x(x-8)=0 \rightarrow x=0 \quad , \quad x=8$$

7. Sea $f(x)=sen(x)$. Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{4}$.

$x=\frac{\pi}{4} \rightarrow f(\frac{\pi}{4})=sen(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ → punto $(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})$

$f(x)=sen(x) \rightarrow f'(x)=\cos(x) \rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ → pendiente $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ecuación punto-pendiente de la recta tangente:

$$\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} \rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x+\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\pi}{8}$$

8. **Obtener en forma explícita la recta tangente a la función** $f(x)=e^x \cdot \ln(x)+2x$ **en** $x=1$ **.**

$f(x)=e^x \cdot \ln(x)+2x \rightarrow f(1)=e \cdot \ln(1)+2=2$ → punto $(1,2)$

$f(x)=e^x \cdot \ln(x)+2x \rightarrow f'(x)=e^x \cdot \ln(x)+\frac{e^x}{x}+2 \rightarrow f'(1)=e \cdot \ln(1)+\frac{e}{1}+2=e+2$

La pendiente de la recta tangente en $x=1$ coincide con el valor de la derivada en ese punto:

$m=f'(1)=e+2$

Planteamos la ecuación explícita de la recta:

$y=mx+n \rightarrow y=(e+2)x+n$

Obtenemos n sustituyendo en la recta el punto $(1,2) \rightarrow 2=(e+2)1+n \rightarrow n=-e$

Recta solución:

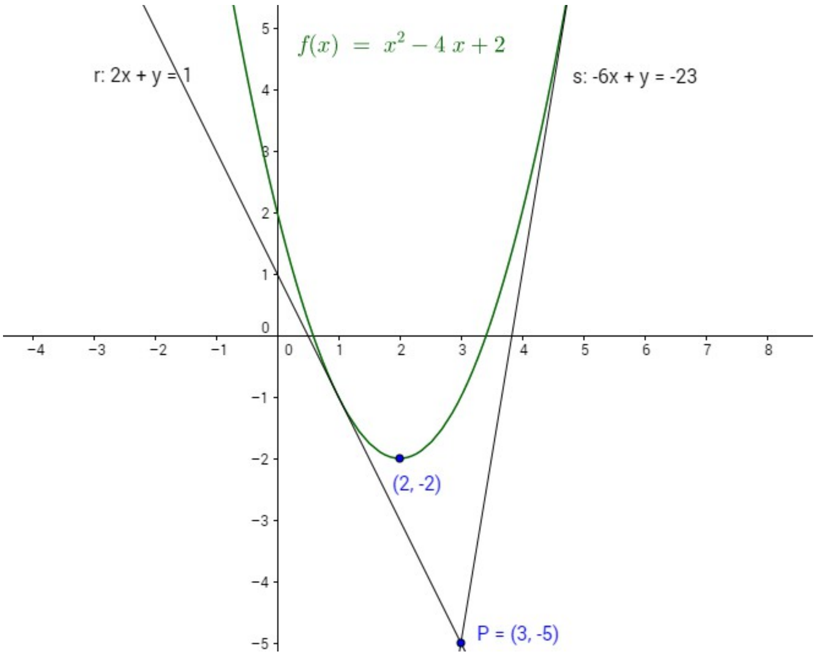
$y=(e+2)x-e$

9. Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de $f(x)=x^2-4x+2$ que pasan por el punto $P(3,-5)$.

El punto $P(3,-5)$ no pertenece a la función, como podemos comprobar al encontrar un absurdo matemático al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la función.

$$f(x)=x^2-4x+2 \;\rightarrow\; f(3)=9-12+2=-1\neq-5$$

Por lo tanto, $P(3,-5)$ es un punto externo a la parábola. La siguiente imagen nos muestra, gráficamente, las dos rectas tangentes a la función que pasan por $P(3,-5)$.



¿Cómo calcularlas?

Necesitamos el conjunto de rectas que pasan por el punto $P(3,-5)$. Es lo que se conoce como haz de rectas. Usando la ecuación punto-pendiente, podemos obtener este haz en función de la pendiente m .

$$m=\frac{y+5}{x-3}$$ → Haz de rectas: infinitas rectas que pasan por $P(3,-5)$

De todas la rectas posibles que pasan por $P(3,-5)$, necesitamos las que cortan de manera tangente a la función $f(x)=x^2-4x+2$.

Supongamos que una de esas rectas corta a la función en el punto $(x_0, f(x_0))=(x_0, x_0^2-4x_0+2)$.

La pendiente de la recta tangente a la función en un punto, coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto. Es decir:

$$m=f'(x_0) \rightarrow m=2x_0-4$$

Es decir, por un lado tenemos el haz de rectas → $m=\frac{y+5}{x-3}$.

Por otro lado tenemos la relación que debe cumplir la pendiente para que la recta sea tangente a la función:

$$m=2x_0-4$$

Igualamos ambos valores de la pendiente, sabiendo que en $m=\frac{y+5}{x-3}$ necesitamos $x=x_0$, $y=f(x_0)=x_0^2-4x_0+2$ para forzar que la recta pase por el punto $(x_0, f(x_0))$.

$$\frac{x_0^2-4x_0+2+5}{x_0-3}=2x_0-4$$

Llegamos a una ecuación con una sola incógnita: x_0 . Resolvamos.

$$\frac{x_0^2-4x_0+2+5}{x_0-3}=2x_0-4 \rightarrow x_0^2-4x_0+7=2x_0^2-10x_0+12 \rightarrow -x_0^2+6x_0-5=0$$

$$x_0=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{-2} \rightarrow x_0=1 \quad , \quad x_0=5$$

Tenemos dos soluciones.

Si $x_0=1 \rightarrow f(1)=1-4+2=-1 \rightarrow m=f'(1)=-2 \rightarrow r: -2=\frac{y+1}{x-1}$

Si $x_0=5 \rightarrow f(5)=25-20+2=7 \rightarrow m=f'(5)=6 \rightarrow r: 6=\frac{y-7}{x-5}$

10. Sea la función definida por $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ **para** $x>0$ **y** $x\neq 1$ **.**

Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=e$ **.**

El punto $x=e$ evaluado en la función da lugar a:

$$f(e)=\frac{e}{\ln(e)}=e$$

La pendiente de la recta tangente será la derivada de la función en el punto.

$$f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{(lnx)^2}$$

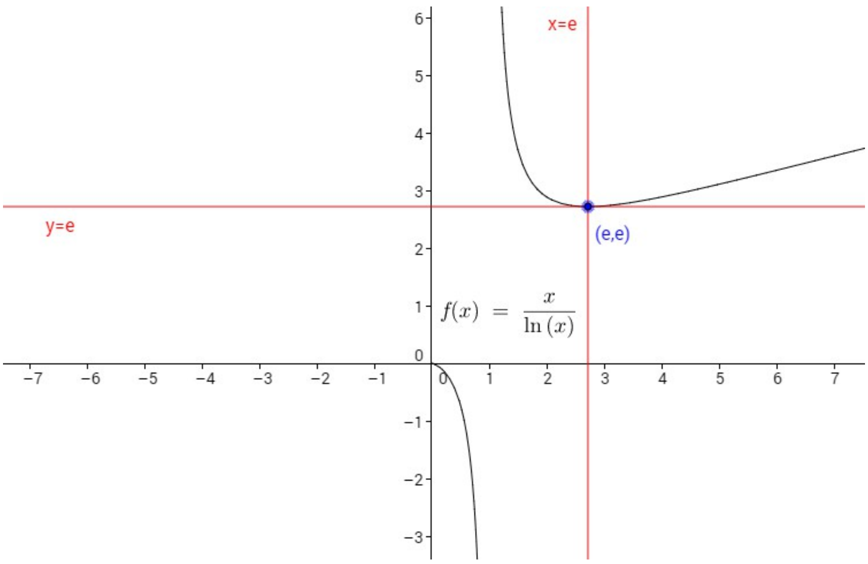
$f'(e)=0 \rightarrow x=e$ → Al ser la derivada nula tendremos en $x=e$ un candidato a extremo relativo.

En $x=e$ tendremos o bien un extremo relativo o bien un punto de inflexión. En ambos casos la recta tangente a la función en el punto será una recta horizontal (pendiente nula).

Usando la ecuación punto pendiente de la recta tenemos la recta tangente.

$$\frac{y-e}{x-e}=0 \rightarrow y=e$$

Y la recta normal a $y=e$ es perpendicular a ella. Por lo tanto → $x=e$.



11. Calcula el área del triángulo que forma el eje horizontal OX con las rectas tangente y normal a la función $f(x)=-x^2$ en el punto $x=1$.

Obtengamos, en primer lugar, la recta tangente a la función en $x=1$.

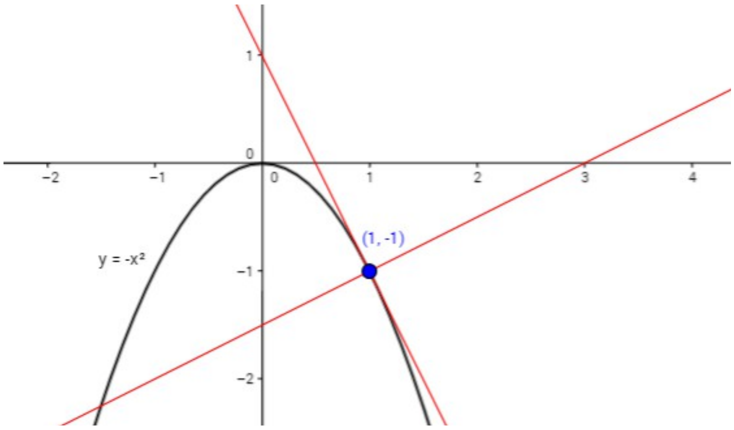
$x=1 \rightarrow f(1)=-1 \rightarrow$ punto $(1,-1)$

$f'(x)=-2x \rightarrow f'(1)=-2 \rightarrow$ pendiente de la recta tangente $m=-2$

Ecuación de la recta tangente en $x=1 \rightarrow \frac{y+1}{x-1}=-2 \rightarrow y=-2x+1$

La pendiente de la recta normal en $x=1$ es $\frac{1}{2}$, ya que el producto de las pendientes de las rectas tangente y normal es igual a -1 . Por lo tanto su ecuación resulta:

Recta normal en $x=1 \rightarrow \frac{y+1}{x-1}=\frac{1}{2} \rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$



El triángulo que forman ambas rectas tiene como base la distancia entre los puntos de corte con el eje horizontal de ambas rectas, y altura igual a 1 (valor absoluto de la ordenada del punto $(1,-1)$).

Con estos datos, podremos obtener el área como $A=\frac{base \cdot altura}{2}$

Si $y=0$, $y=-2x+1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

Si $y=0$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \rightarrow x=3$

Base del triángulo: distancia entre los puntos $(3,0)$ y $(1/2, 0)$ → $|3-\frac{1}{2}|=\frac{5}{2}$

Área del triángulo → $A=\dfrac{\frac{5}{2}\cdot 1}{2}=\dfrac{5}{4}\ u^2$

12. Sea la función $f(x)=\ln(x^3-4x)$ **.**

a) Determina el dominio de la función.

b) Halla la ecuación explícita de la recta tangente en el punto $x=-1$ **.**

a) Necesitamos que el argumento del logaritmo sea positivo. Es decir:

$x^3-4x>0 \rightarrow x(x^2-4)>0 \rightarrow x(x+2)(x-2)>0$

Las raíces de la expresión a la izquierda de la inecuación son: $x=-2,0,2$. Evaluamos en los siguientes intervalos:

$(-\infty,-2)$ → si $x=-10$, $-10(-10+2)(-10-2)<0$ → No pertenece al dominio

$(-2,0)$ → si $x=-1$, $-1(-1+2)(-1-2)>0$ → Sí pertenece al dominio

$(0,2)$ → si $x=1$, $1(1+2)(1-2)<0$ → No pertenece al dominio

$(2,+\infty)$ → si $x=10$, $10(10+2)(10-2)>0$ → Sí pertenece al dominio

Dominio: $Dom(f)=(-2,0)\cup(2,+\infty)$

b) $f(x)=\ln(x^3-4x)$, $x=-1 \rightarrow f(-1)=\ln(-1+4)=\ln(3) \rightarrow (-1,\ \ln(3))$

$f(x)=\ln(x^3-4x) \rightarrow f'(x)=\dfrac{3x^2-4}{x^3-4x} \rightarrow f'(-1)=\dfrac{3-4}{-1+4}=\dfrac{-1}{3}$ → pendiente $m=\dfrac{-1}{3}$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente resulta:

$\dfrac{y-\ln(3)}{x+1}=\dfrac{-1}{3}$ → ecuación explícita: $y=\dfrac{-x}{3}+\ln(3)-\dfrac{1}{3}$

13. Dada la función $f(x)=\dfrac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ **escribe la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa** $x=2$ **.**

La recta que queremos calcular es tangente a la función en un punto $(2, f(2))$.

$$f(2)=\frac{2(2\cdot 2+1)}{\sqrt{2+2}}=\frac{2\cdot 5}{\sqrt{4}}=\frac{10}{2}=5$$

La recta que es tangente a la función cumple la ecuación explícita $y=mx+n$, donde m es la pendiente de la recta. Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la función coincide con el valor de la derivada evaluada en el punto $x=2$.

$$f(x)=\frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}} \rightarrow f(x)=\frac{2x^2+x}{\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x)=\frac{(4x+1)\sqrt{x+2}-(2x^2+x)\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

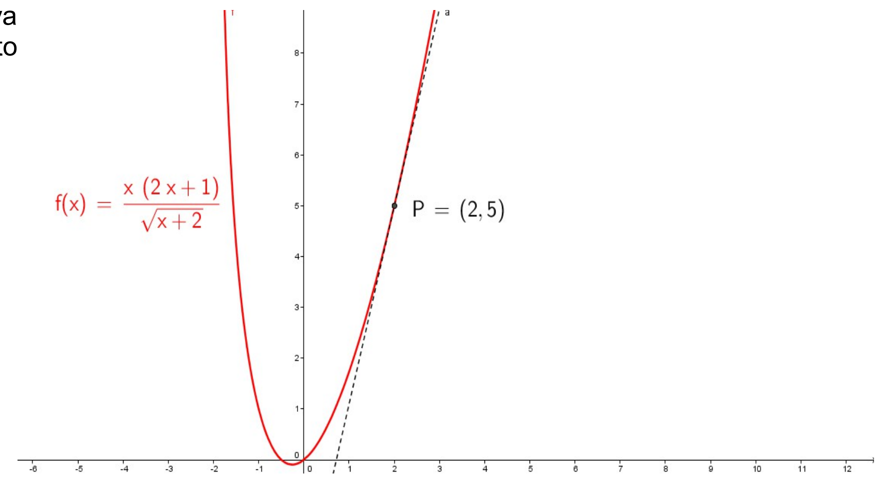
$$f'(x=2)=\frac{31}{8}$$

Sabiendo la pendiente y un punto por donde pasa la recta, podemos calcular su ecuación punto-pendiente:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-5=\frac{31}{8}(x-2) \rightarrow y=\frac{31x}{8}-\frac{31}{4}+5 \rightarrow y=\frac{31x}{8}-\frac{11}{4}$$

En la gráfica observamos la curva y la recta tangente en el punto $(2,5)$.



14. Sea la función continua $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x+k & si \quad x\leqslant 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de k .

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

a) Para que la función sea continua en $x=0$, en primer lugar debe estar definida en este valor.

$$f(0)=k$$

Además los límites laterales en $x=0$, por la izquierda y por la derecha, deben coincidir.

$$\lim_{x\rightarrow 0-}(x+k)=k$$

$$\lim_{x\rightarrow 0+}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)=\frac{0}{0}$$ → indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\rightarrow 0+}\left(\frac{2x\,e^{x^2}}{2x}\right)=(simplificar)=\lim_{x\rightarrow 0+}\left(e^{x^2}\right)=(evaluar)=1$$

Igualando los límites laterales obtenemos el valor final del límite → $L=k=1$

También se cumple que el límite coincide con el valor de la función en el punto:

$$L=f(0) \rightarrow L=k$$

b) Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f(x)=\frac{(e^{x^2}-1)}{x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{\left(e^{x^2}2x\right)\cdot\left(x^2\right)-\left(e^{x^2}-1\right)\cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x=1)=2$$

El valor de la función en $x=1$ es → $f(1)=e-1$ → La recta pasa por $(1,e-1)$.

Aplicamos la ecuación punto pendiente de la recta.

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-(e-1)=2\cdot(x-1) \rightarrow y=2x+e-3$$

15. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\frac{x^3}{(x-3)^2}$ **en el punto de abscisa** $x=2$ **.**

La imagen de la función en $x=2 \rightarrow f(2)=\frac{2^3}{(2-3)^2}=8$ → punto $(2,8)$

Recordamos que la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-3)^2-x^3\cdot 2(x-3)\cdot 1}{((x-3)^2)^2}=\frac{3x^2(x-3)-x^3\cdot 2\cdot 1}{(x-3)^3} \rightarrow f'(x)=\frac{x^3-9x^2}{(x-3)^3}$$

Evaluamos la derivada en $x=2 \rightarrow f'(2)=\frac{2^3-9\cdot 2^2}{(2-3)^3}=28$ → pendiente igual a 28.

Podemos plantear la ecuación punto-pendiente de la recta.

$\frac{y-8}{x-2}=28$ → Ecuación general de la recta tangente: $y=28x-48$

16. Calcule a y b para que la función $f(x)=x^3+a x^2+b x+2$ pase por el punto $(-1,6)$ y su recta tangente en $x=1$ forme un ángulo de 45^{o} con el eje OX.

Si la función pasa por el punto $(-1,6)$ se cumple la relación:

$$f(-1)=6 \;\rightarrow\; -1+a-b+2=6 \;\rightarrow\; a-b=5$$

La derivada de la función en $x=1$ es igual a $tg(45^{o})=1$, por ser éste el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Es decir:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \;\;,\;\; f'(1)=3+2a+b \;\;,\;\; f'(1)=1 \;\rightarrow\; 3+2a+b=1 \;\rightarrow\; 2a+b=-2$$

Obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{c} a-b=5 \\ 2a+b=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sumamos ambas ecuaciones} \rightarrow \; 3a=3 \;\rightarrow\; a=1$$

Llevando este valor a la primera ecuación del sistema:

$$b=a-5 \;\rightarrow\; b=-4$$

17. Sea $f(x)=sen(x)$.

a) Obtener la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{6}$.

b) Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{3}$.

c) El ángulo formado por las rectas de los apartados anteriores.

a) $f(x)=sen(x) \rightarrow f(\frac{\pi}{6})=sen(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ → Punto $(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$

$f'(x)=\cos(x) \rightarrow f'(\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ → Pendiente recta tangente $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la función en $x=\frac{\pi}{6}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{y-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$$

b) $f(x)=sen(x) \rightarrow f(\frac{\pi}{3})=sen(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ → Punto $(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$f'(x)=\cos(x) \rightarrow f'(\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ → Pendiente recta tangente $m=\frac{1}{2}$

El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1 . Por lo tanto $m_{normal}=-2$.

Ecuación punto-pendiente de la recta normal a la función en $x=\frac{\pi}{3}$.

$$-2=\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$$

c) La recta tangente del apartado *a)* cumple $m=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow tg(\alpha_1)=m \rightarrow \alpha_1 \simeq 40,89^o$

La recta normal del apartado b*)* cumple $m_{normal}=-2 \rightarrow tg(\alpha_2)=m_{normal} \rightarrow \alpha_2 \simeq 116,56^o$

Dos rectas se cortan formando cuatro ángulos, iguales dos a dos. El ángulo, por definición, es el menor de los dos. Por lo tanto:

$$\beta \simeq 116,56^o-40,89^o=76,67^o$$

18. Obtener la recta tangente y normal a $f(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}$ **en** $x=0$ **.**

La **interpretación geométrica de la derivada** afirma que la derivada de la función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Y con la pendiente m y un punto de la recta (x_0, y_0) , podemos obtener la recta tangente a la función en ese punto.

Primero derivamos.

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2} \rightarrow f'(0)=2 \rightarrow m=2$$

En segundo lugar obtenemos la imagen en la función del valor $x=0 \rightarrow f(0)=-1$

$$(x_0, y_0)=(0,-1)$$

Recuerda, **la pendiente se obtiene evaluando en la derivada** y **la imagen evaluando en la función de partida**. No te líes.

Podemos usar la ecuación punto-pendiente de la recta.

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow 2=\frac{y+1}{x-0} \rightarrow y=2x-1$$

También podemos llegar al mismo resultado usando directamente la ecuación explícita de la recta.

$$y=mx+n \rightarrow y=2x+n \rightarrow -1=2\cdot 0+n \rightarrow -1=n \rightarrow y=2x-1$$

Esta es la recta tangente a la función en $x=0$.

¿Qué relación hay entre la recta tangente y la recta normal? Ambas son perpendiculares entre sí. Y el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1 .

$$m_t\cdot m_n=-1 \rightarrow 2\cdot m_n=-1 \rightarrow m_n=\frac{-1}{2}$$

Con la pendiente de la recta normal y el punto ya conocido $(x_0, y_0)=(0,-1)$ podemos obtener la ecuación de la recta normal.

$$m_n=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow \frac{-1}{2}=\frac{y+1}{x-0} \rightarrow y=\frac{-1}{2}x-1$$

19. Obtener la recta tangente a $f(x)=arcotg(x)$ paralela a la recta que pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(-2,0)$.

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente m . Por lo que debemos obtener la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos dados.

Esa recta viene dada por la expresión:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1} \rightarrow \frac{0-3}{-2-1}=\frac{y-3}{x-1} \rightarrow 1=\frac{y-3}{x-1} \rightarrow m=1$$

Según la interpretación geométrica de la derivada, debemos obtener el punto de la función cuya derivada coincida con el valor de la pendiente $m=1$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \rightarrow \frac{1}{1+x^2}=1 \rightarrow 1=1+x^2 \rightarrow x=0$$

Calculamos la imagen del punto $x=0 \rightarrow f(0)=arcotg(0)=0 \rightarrow (x_0,y_0)=(0,0)$

Y con la pendiente y un punto, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la función en ese punto.

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow 1=\frac{y}{x} \rightarrow y=x$$

20. Sea $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{6}-\frac{3}{2} & si \quad x<3 \\ \ln(x-2) & si \quad x\geq 3 \end{cases}$ **. Calcular los puntos de la gráfica en que la función es paralela a la recta** $x+3y=0$ **.**

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{x}{3} & si \quad x<3 \\ \frac{1}{x-2} & si \quad x\geq 3 \end{cases}$$

La función es derivable en el primer tramo por ser polinómica, y en el segundo tramo porque el denominador de la función derivada no se anula en el intervalo $[3,\infty)$.

Además, la función es derivable en $x=3$ por coincidir las derivadas laterales: $f'(3^-)=f'(3^-)=1$

La recta tiene pendiente igual a $\frac{-1}{3}$. Recordamos que la pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada en el puntos (interpretación geométrica de la derivada). Y dos rectas paralelas tienen la misma pendiente. Por lo tanto:

$\frac{x}{3}=\frac{-1}{3} \rightarrow x=-1 \rightarrow \left(-1,-\frac{4}{3}\right)$ para $x<3$

$\frac{1}{x-2}=\frac{-1}{3} \rightarrow x=-1\notin[3,\infty)$

21. Obtener el valor de x de la función $f(x)=\ln(\sqrt{x}-1)$ donde la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ sea igual a 2 . Obtener también el valor de la ordenada para x .

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto coincide con el valor de la derivada a la función en ese punto. Es lo que se conoce como interpretación geométrica de la derivada.

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}$ → igualamos la derivada a 2 → $f'(x)=2$ → $\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}=2$

$\dfrac{1}{2x-2\sqrt{x}}=2$ → $1=4x-4\sqrt{x}$ → $1-4x=-4\sqrt{x}$ → elevamos al cuadrado → $1+16x^2-8x=16x$

$16x^2-24x+1=0$ → resolvemos → $x=\dfrac{24\pm\sqrt{576-64}}{32}=\dfrac{24\pm 16\sqrt{2}}{32}$

Soluciones dela ecuación de segundo grado → $x_1=0{,}04$, $x_2=1{,}46$

No olvides que, en ecuaciones con raíces donde se eleva al cuadrado, hay que comprobar que las soluciones no hacen negativo al discriminante e la raíz. En este caso, los dos valores obtenidos hacen positivo el discriminante de $\sqrt{x}$.

Falta obtener sus imágenes:

$x_1=0{,}04$ → $f(0{,}04)=\ln(\sqrt{0{,}04}-1)=\nexists$ → El valor $x_1=0{,}04$ no pertenece al dominio de la función

$x_2=1{,}46$ → $f(1{,}46)=\ln(\sqrt{1{,}46}-1)=-1{,}57$ → Punto solución: $(1{,}46\,,-1{,}57)$

22. Sea $f(x)=-x^2+a^2$. Obtener la ecuación explícita de recta tangente a la función en $x=-a$.

La pendiente de la recta tangente a la función en un punto coincide con el valor de la derivada evaluada en ese punto.

$$f'(x)=-2x \quad \rightarrow \quad m=f'(-a)=2a$$

Usamos la ecuación pendiente de la recta, para lo cual necesitamos la imagen de la función en el punto.

$$x=-a \quad .$$

$$f(-a)=-a^2+a^2=0$$

$$m=\frac{y-f(-a)}{x-(-a)} \quad \rightarrow \quad 2a=\frac{y-0}{x+a} \quad \rightarrow \quad y=2ax+2a^2$$

23. Considere las curvas $f(x)=3-x^2$ y $g(x)=\frac{-x^2}{4}$. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de $g(x)$. Determina el punto de tangencia con la gráfica de $g(x)$.

Obtenemos la recta tangente a $f(x)=3-x^2$ en $x=1$.

$f'(x)=-2x \to f'(1)=-2$

$f(1)=3-1=2$

$-2=\frac{y-2}{x-1} \quad \to \quad y=-2x+4$

Esta recta será tangente a la función $g(x)=\frac{-x^2}{4}$ si en el punto de tangencia, coincide la pendiente de la recta con la derivada de la función en ese punto. Para ello, primero calculamos el punto de tangencia igualando la recta a la función $g(x)$.

$y=g(x) \to -\frac{x^2}{4}=-2x+4 \to -x^2+8x-16=0 \to x=4$

El punto de tangencia resulta $(4, g(4))=(4,4)$

Nos falta comprobar que en $x=4$ el valor de la derivada de $g(x)=\frac{-x^2}{4}$ coincide con al pendiente de la recta tangente $y=-2x+4$ .Es decir, debemos comprobar si $g'(4)=-2$.

$g'(x)=\frac{-2x}{4}=\frac{-x}{2} \quad \to \quad g'(4)=-2$

24. Obtener los puntos de la función $f(x)=x^2+2x+4$ cuya recta tangente a la función pase por el $(0,0)$.

El haz de rectas es el conjunto de infinitas rectas que pasan por un punto. En nuestro caso:

$$m=\frac{y-0}{x-0} \quad \rightarrow \quad y=mx$$

La incógnita es la pendiente. Debemos obtener esa pendiente sabiendo que la recta debe ser tangente a la función. Por lo tanto, la tangente debe coincidir con la derivada de la función.

$$f'(x)=2x+2 \quad \rightarrow \quad m=2x+2$$

Sustituimos este valor de la pendiente en la ecuación de la recta:

$$y=(2x+2)x$$

Además, en el punto de tangencia, la recta y la función coinciden. Por lo que sus imágenes en ese punto deben ser iguales. Por lo tanto, sustituimos la imagen de la recta y por la imagen de la función $f(x)$.

$$x^2+2x+4=(2x+2)x$$

Resolvemos.

$$x^2+2x+4=2x^2+2x \rightarrow -x^2+4=0 \rightarrow x=\pm 2$$

Tenemos dos puntos que cumplen la condición. Obtenemos sus imágenes.

$$x=2 \rightarrow f(2)=12 \rightarrow (2,12)$$

$$x=-2 \rightarrow f(-2)=4 \rightarrow (-2,4)$$