Rechenregeln für Integrale

Faktorregel:

$$\boxed{\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{für } c \in \mathbb{R}}$$

Merke: Ein konstanter Faktor kann vor das Integral gezogen werden, umgekehrt auch hinein multipliziert werden.

Beweis: $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = [c \cdot F(x)]_a^b = c \cdot F(b) - c \cdot F(a) = c \cdot (F(b) - F(a)) = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ q.e.d.

Beispiel: $\int_0^2 (30x^2 + 5x)\,dx = \int_0^2 5 \cdot (6x^2 + x)\,dx = 5 \cdot \int_0^2 (6x^2 + x)\,dx = 5 \cdot \left[2x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 5 \cdot ((16 + 2) - (0)) = 90$

Probe: $\int_0^2 (30x^2 + 5x)\,dx = \left[10x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^2 = (80 + 10) - (0) = 90 \ \checkmark$

Summenregel:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx}$$

Merke: Bei identischen Integrationsgrenzen lässt sich eine Summe von Integralen zu einem Integral über eine Summe zusammenfassen. Umgekehrt lässt sich ein Integral über eine Summe auch als Summe von Integralen schreiben.

Beweis: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$ q.e.d.

Beispiel: $\int_0^1 (6x^2 + 5)\,dx + \int_0^1 2x\,dx = \int_0^1 (6x^2 + 2x + 5)\,dx = \left[2x^3 + x^2 + 5x\right]_0^1 = (2 + 1 + 5) - (0) = 8$

Probe: $\int_0^1 (6x^2 + 5)\,dx + \int_0^1 2x\,dx = \left[2x^3 + 5x\right]_0^1 + \left[x^2\right]_0^1 = ((2 + 5) - (0)) + ((1) - (0)) = 7 + 1 = 8 \ \checkmark$

Intervall-Addidivität:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx}$$

Merke: Zusammenhängende Teil-Integrale über eine Funktion lassen sich zu einem Integral zusammenfassen. Umgekehrt: Ein Integral lässt sich auch in x -Richtung aufsplitten.

Beweis: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = (F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx$ q.e.d.

Beispiel: $\int_1^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx = \int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$

Probe: $\int_1^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3 = (\frac{8}{3} - \frac{1}{3}) + (\frac{27}{3} - \frac{8}{3}) = \frac{7}{3} + \frac{19}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$ ✓

Vertauschung der Integrationsgrenzen:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

Merke: Das Vertauschen der Integrationsgrenzen führt zum Vorzeichenwechsel des Integralwerts. Umgekehrt: Das negative eines Integrals entspricht dem in x -Richtung umgedrehten Integral.

Beweis: $-\int_b^a f(x)\,dx = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$q.e.d.

Beispiel: $\int_2^1 x^3\,dx = -\int_1^2 x^3\,dx = -\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = -(4 - \frac{1}{4}) = -3\frac{3}{4}$

Probe: $\int_2^1 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^1 = \frac{1}{4} - 4 = -3\frac{3}{4}$ ✓