Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 4 - ampliación a sistemas de ecuaciones con un parámetro y a problemas con enunciado

1. a) Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones.

- **Utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros.**
- **Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas.**
- **Tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.**

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35€, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

a) El número de monedas de 50 céntimos será x, el número de monedas de 1 euro será y, el número de monedas de 2 euros será z. Con estas incógnitas montamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, con cada una de las condiciones.

$$\left\{\begin{array}{c} 0{,}5\,x+y+2\,z=34{,}50 \\ x+y+z=30 \\ y=x+z \end{array}\right\}$$

Llevamos el valor de y de la tercera ecuación a las otras dos.

$$\left\{\begin{array}{c} 0{,}5\,x+(x+z)+2\,z=34{,}50 \\ x+(x+z)+z=30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1{,}5\,x+3\,z=34{,}50 \\ 2\,x+2\,z=30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1{,}5\,x+3\,z=34{,}50 \\ x+z=15 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación despejamos el valor de $z=15-x$ y lo llevamos a la primera ecuación.

$$1{,}5\,x+3(15-x)=34{,}50 \rightarrow -1{,}5\,x=-10{,}50 \rightarrow x=7$$

Y resolviendo el resto de incógnitas → $z=8$, $y=15$

Solución: Podemos pagar de forma única con 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de 1 euro y 8 monedas de 2 euros.

b) Si el total a pagar es de 35 euros, de la primera ecuación del sistema del apartado anterior, llegaríamos a la condición → $1{,}5\,x+3(15-x)=35$ → $-1{,}5\,x=-10$ → $x=\frac{20}{3}$ → No podremos pagar, al necesitar siempre un número entero de monedas.

2. Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15€, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20€.

a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25€, ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona tu respuesta.

b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices, ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

a) Llamaremos al precio de un lápiz L, al precio de un rotulador R y al precio de una carpeta C. Por lo que las dos ecuaciones primeras del enunciado resultan:

$$\begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Si añadimos la tercera condición} \rightarrow \begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \\ L+7R=25 \end{Bmatrix}$$

O bien resolvemos por Gauss o bien nos damos cuenta que $F_3=2F_2-F_1$ → Podemos obviar la tercera ecuación, por ser combinación lineal de las otras dos.

$\begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \end{Bmatrix}$ → Las dos ecuaciones no son proporcionales, por lo que tendremos un parámetro libre. Por ejemplo, $C=\lambda$. El sistema resulta:

$$\begin{Bmatrix} 3L+R=15-2\lambda \\ 2L+4R=20-\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow F_1'=-4F_1 \rightarrow \begin{Bmatrix} -12L-4R=-60+8\lambda \\ 2L+4R=20-\lambda \end{Bmatrix}$$

Sumamos ambas ecuaciones → $-10L=-40+7\lambda \rightarrow L=4-\frac{7}{10}\lambda$

Y el precio del rotulador podremos escribirlo como → $3\left(4-\frac{7}{10}\lambda\right)+R=15-2\lambda \rightarrow R=3+\frac{1}{10}\lambda$

Es decir, tenemos un sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones dependientes del parámetro libre.

$\begin{Bmatrix} L=4-\frac{7}{10}\lambda \\ R=3+\frac{1}{10}\lambda \\ C=\lambda \end{Bmatrix}$ → Los precios no están definidos de manera única. Dependen de un parámetro libre.

b) El nuevo sistema que tendremos es → $\begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \\ C=10L \end{Bmatrix}$

Llevamos el resultado $C=10L$ a las dos primeras ecuaciones → $\begin{Bmatrix} 23L+R=15 \\ 12L+4R=20 \end{Bmatrix}$ → $F_1'=-4F_1$ → $\begin{Bmatrix} -92L-4R=-60 \\ 12L+4R=20 \end{Bmatrix}$ → Sumamos ambas ecuaciones → $-80L=-40$ → El precio de un lápiz resulta $L=0{,}5€$.

El precio del rotulador es → $R=15-23L$ → $R=3{,}5€$.

El precio del cuaderno es → $C=10L$ → $C=5€$

En esta ocasión sí podemos determinar de manera única el precio de los tres artículos.

3. a) Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2018. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros en 2018. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil euros por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros. Con estos datos, ¿es posible saber cuántos combates ganó, cuantos hizo nulo y cuantos perdió? En caso afirmativo, calcúlalos.

b) Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado del apartado anterior, y que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los número reales.

a) Planteamos el siguiente sistema a partir del enunciado:

$$\left\{\begin{array}{r} g+n+p=20 \\ 3g+2n+p=40 \\ 6g+4n+p=72 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 40 \\ 6 & 4 & 1 & 72 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-3F_1 \quad , \quad F'_3=F_3-6F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & -2 & -5 & -48 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3-2F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

Tras aplicar Gauss, llegamos a 3 ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo y 3 incógnitas. Por lo tanto, SCD con solución única que podemos resolver:

$$z=8 \quad , \quad y=4 \quad , \quad x=8$$

b) El nuevo sistema resulta:

$$\left\{\begin{array}{r} g+n+p=20 \\ 3g+2n+p=40 \\ kg+4n+p=72 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 40 \\ k & 4 & 1 & 72 \end{array}\right) \rightarrow C_1 \Leftrightarrow C_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 40 \\ 1 & 4 & k & 72 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \quad ,$$

$$F'_3=F_3-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 3 & k-1 & 52 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3-3F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & k-7 & -8 \end{array}\right)$$

El valor para realizar la discusión de casos sería: $k-7=0$

- Si $k=7$ → En la matriz final de Gauss $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$ → En la tercera fila aparece el siguiente absurdo matemático: $0=-8$ → Sistema Incompatible, no habría solución.

Si $k \neq 7$ → SCD con solución única.

4. Tenemos tres grifos para llenar un depósito de agua y suponemos que el caudal que cae por cada grifo es constante. Si utilizamos el grifo 1, tardamos 10 horas en llenar el depósito. Si utilizamos el grifo 1 y 2, tardamos 4 horas. Si utilizamos los tres grifos, tardamos una hora.

Suponiendo que la suma de los caudales de los tres grifos es de 10 litros por minuto, calcule el caudal de cada grifo y el volumen del depósito.

Caudal = volumen / tiempo

Volumen del depósito → V

Caudal del grifo 1 → $c_1 = V/x$

Caudal del grifo 2 → $c_2 = V/y$

Caudal del grifo 3 → $c_3 = V/z$

Tenemos cuatro incógnitas: el volumen del depósito y el tiempo que tarda cada grifo en llenar el depósito.

Si con el primer grifo tardamos 10 horas en llenar el depósito → $x = 10\, horas$

Si empleamos los dos primeros grifos, estamos sumando sus caudales, y por el enunciado sabemos que tardamos 4 horas en llenar el depósito → $c_1 + c_2 = V/4$ → $V/10 + V/y = V/4$ → Hacemos mínimo común múltiplo y simplificamos el valor del volumen V → $\frac{y+10}{10y} = \frac{1}{4}$ → $4y + 40 = 10y$ → $y = \frac{20}{3}\, horas$

Con los tres grifos, sumamos el caudal de cada grifo, y el enunciado afirma que tardamos una hora en llenar el depósito → $c_1 + c_2 + c_3 = V/1$ → $V/10 + 3V/20 + V/z = V$ → Hacemos mínimo común múltiplo y simplificamos el valor del volumen V → $\frac{2z + 3z + 20}{20z} = 1$ → $5z + 20 = 20z$ → $z = \frac{20}{15}\, horas$

Finalmente, si la suma de los tres caudales es de 10 litros por minuto, o lo que es lo mismo, 600 litros por hora, podemos obtener el valor del volumen V → $c_1 + c_2 + c_3 = 600$ → $V/10 + 3V/20 + 15V/20 = 600$ → Hacemos mínimo común múltiplo → $\frac{2V + 3V + 15V}{20} = 600$ → $20V = 12000$ → $V = 600\, litros$

Por lo tanto:

Caudal 1 → $c_1 = 600/10 = 60\, litros/hora$

Caudal 2 → $c_2 = 3 \cdot 600/20 = 90\, litros/hora$

Caudal 3 → $c_3 = 15 \cdot 600/20 = 450\, litros/hora$

5. Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z=8 \end{matrix}\right\}$ **.**

a) Discute según los valores del parámetro m **.**

b) Resuelve el sistema para $m=-2$ **.**

a) Pasamos el sistema a notación matricial.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3(m+1) & 8 \end{array}\right)$ → Resolvemos por Gauss → $F'_2=F_2-F_1$, $F'_3=F_3-2F_2$ →

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & -1 & -m-2 & 3m-3 \\ 0 & 2 & 3m+1 & 8-6m \end{array}\right)$ → $F'_3=F_3+2F_2$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & -1 & -m-2 & 3m-3 \\ 0 & 0 & m-3 & 2 \end{array}\right)$

Igualamos los coeficientes de la diagonal principal que dependen del parámetro: $m-3=0$ → $m=3$

Realizamos una discusión de casos, en función el parámetro, para determinar el tipo de solución.

- Si $m=3$ → El sistema, tras aplicar Gauss, queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ → En la tercera ecuación aparece el absurdo matemático $0=2$ – No hay solución → Sistema Incompatible.
- Si $m\neq 3$ → Tras aplicar Gauss obtenemos tres ecuaciones de coeficientes no nulos y tres incógnitas, por lo que podemos despejar de manera única cada incógnita → Sistema Compatible determinado

b) Para $m=-2$ estamos, según la discusión del apartado anterior, en solución única. El sistema, tras aplicar Gauss, queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right)$ → De cada fila podemos resolver una incógnita.

Tercera fila → $-5z=2$ → $z=\frac{-2}{5}$

Segunda fila → $-y=-9$ → $y=9$

Primera fila → $x+2y+z=3$ → $x+18-\frac{2}{5}=3$ → $x=\frac{-73}{5}$

6. Discute la solución en función del parámetro λ .

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=\lambda \\ x-y+\lambda z=1 \\ 2x+\lambda y+z=\lambda \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -2 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 2 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_3=F_3-2F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -2 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-2 & -1 & -\lambda \end{array}\right) \rightarrow F'_3=(-2)F_3-(\lambda-2)F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -2 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2-(\lambda-2)(\lambda-1) & 2\cdot\lambda-(\lambda-2)(1-\lambda) \end{array}\right)$$

Discutimos los siguientes casos:

$$2-(\lambda-2)(\lambda-1)=0 \rightarrow 2-(\lambda^2-\lambda-2\cdot\lambda+2)=0 \rightarrow -\lambda^2+3\cdot\lambda=0 \rightarrow \lambda=0 \quad , \quad \lambda=3$$

Si $\lambda=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ → Absurdo en 3ª ecuación → Sistema Incompatible: sin solución

Si $\lambda=3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$ → Absurdo en 3ª ecuación → Sistema Incompatible: sin solución

Para el resto de valores del parámetro λ siempre tendremos un sistema triangular de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, con ninguna ecuación con absurdo matemático y sin ecuaciones proporcionales. Por lo tanto, para $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 3$ → Sistema Compatible Determinado → solución única

7. En un estudio de mercado, se eligen tres productos, A, B y C y cuatro tiendas. En la primera, por una unidad de cada producto cobran, en total, 4.25 euros. En la segunda, 2 unidades de A y 3 de C valen 8.25 euros más que una unidad de B. En la tercera, una unidad de A y 2 de C valen 4 euros más que 2 unidades de B y, en la cuarta, una unidad de B vale 1.25 euros menos que una de C. ¿Tienen A, B y C el mismo precio en las cuatro tiendas o no? Si la respuesta es no, justifique por qué y si la respuesta es sí, diga cuál es ese precio.

Tenemos tres productos A, B, y C, cada uno con su precio. Las incógnitas van a ser los precios de los productos.

Y tenemos cuatro tiendas donde se venden esos productos.

De la tienda 1 planteamos la ecuación → $A+B+C=4{,}25$

De la tienda 2 → $2\mathrm{A}+3\mathrm{C}=8{,}25+B$

De la tienda 3 → $A+2\mathrm{C}=4+2\mathrm{B}$

De la tienda 4 → $B=C-1{,}25$

El sistema resultante de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es:

$$\begin{cases} A+B+C=4{,}25 \\ 2\mathrm{A}-B+3\mathrm{C}=8{,}25 \\ A-2\mathrm{B}+2\mathrm{C}=4 \\ B-C=-1{,}25 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 2 & -1 & 3 & 8{,}25 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-2\mathrm{F}_1 \ , \ F'_3=F_3-F_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{array}\right) \rightarrow$$ F_3 es combinación lineal de F_2 , por lo que el sistema equivalente

resulta → $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=3\mathrm{F}_3+F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow -2\mathrm{C}=-4 \rightarrow C=2€ \rightarrow B=0{,}75€ \rightarrow A=1{,}5€$$

Es decir, al existir solución única podemos afirmar que los tres productos se venden al mismo precio en las cuatro tiendas.

8. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+m\cdot y+z=-1 \end{array}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m\in\mathbb{R}$ **.**

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=2$ **.**

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \ , \ F'_3=F_3-2F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 0 & m-2 & 1-m & -1 \\ 0 & m-2 & -2m-1 & -5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_3=F_3-F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 0 & m-2 & 1-m & -1 \\ 0 & 0 & -m-2 & -4 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $-m-2=0 \rightarrow m=-2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ → Incongruencia en F_3 → No hay solución → S.I.
- Si $m-2=0 \rightarrow m=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \rightarrow$ F_3 es combinación lineal de F_2 . El sistema equivalente resulta $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$ → Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas → Infinitas soluciones → S.C.I.
- Si $m\neq-2$ y $m\neq2$ → Solución única → S.C.D.

b) Para $m=2$ ya hemos razonado que tenemos infinitas soluciones al ser S.C.I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow z=1 \ , \ y=\lambda \rightarrow x=-1-\lambda$$

9. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} 2a\cdot x+(a^2+a-2)y+2z=2 \\ a\cdot x-y+2z=0 \\ -a\cdot x+y-z=a \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ **.**

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a=-1$ **.**

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a & a^2+a-2 & 2 & 2 \\ a & -1 & 2 & 0 \\ -a & 1 & -1 & a \end{array}\right) \rightarrow F'_2=2F_2-F_1 \ , \ F'_3=F_3+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & a^2+a-2 & 2 & 2 \\ 0 & -a^2-a & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right) \rightarrow$$

Discusión de casos:

- Si $-a^2-a=0 \rightarrow a=0 \ , \ a=-1$
  - Si $a=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ → Incongruencia en el valor de z en las filas F_2 y F_3 → No hay solución → S.I.
  - Si $a=-1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$ F_3 es combinación lineal de F_2 → Obtenemos el sistema equivalente → $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$ → Infinitas soluciones con un parámetro libre → S.C.I.
- Si $a\neq 0$ y $a\neq -1$ → Solución única → S.C.D.

b) Para $a=-1$ tenemos la matriz ampliada de un S.C.I. → $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow z=-1$, $x=\lambda \rightarrow y=-\lambda-2$

10. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} a\cdot x+7y+5z=0 \\ x+a\cdot y+z=3 \\ y+z=-2 \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ **.**

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a=4$ **.**

c) Resolver el sistema, si es posible, para $a=2$ **.**

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \text{intercambiamos } F_3 \text{ con } F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=aF_3-F_1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & a^2-7 & a-5 & 3a \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3-(a^2-7)F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -a^2+a+2 & 2a^2+3a-14 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $-a^2+a+2=0 \rightarrow a=-1$, $a=2$
  - Si $a=-1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right)$ → Absurdo en F_3 → No hay solución → S.I.
  - Si $a=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ F_3 es combinación lineal de las otras filas → Infinitas soluciones → S.C.I.
- Si $a=0$ → inhabilita la transformación $F'_3=aF_3-F_1$ → Sustituimos en la matriz previa a la operación no permitida → $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ → Situamos la tercera fila en el lugar de la primera → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=7F_3-F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -14 \end{array}\right)$ → Obtenemos un sistema equivalente de 3 ecuaciones y dos incógnitas y , z con solución única, que en el sistema inicial generan un único valor para x → S.C.D.
- En general, si $a\neq-1$, $a\neq 2$ → Solución única → S.C.D.

b) Para $a=4 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 30 \end{array}\right) \rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow z=-3 \rightarrow y=1 \rightarrow x=2$

c) Para $a=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow x=\lambda \rightarrow y=5+\lambda \rightarrow z=-7-\lambda$

11. Sea el sistema $\left\{\begin{matrix} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=k \end{matrix}\right\}$

a) Discutir las soluciones del sistema.

b) Resolver en todos los casos que sea compatible.

a) En la web www.matrixcalc.org/es podemos comprobar los pasos del método de Gauss:

https://matrixcalc.org/es/slu.html#solve-using-Gaussian-elimination%28%7B%7B1,1,1,0,4%7D,%7B3,4,5,0,5%7D,%7B7,9,11,0,k%7D%7D%29

La matriz triangular resulta:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |4 \\ 0 & 1 & 2 & |-7 \\ 0 & 0 & 0 & |k-14 \end{pmatrix}$ → Explicar Teoría de Gauss

Discusión de casos:

Si $k=14$ → $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |4 \\ 0 & 1 & 2 & |-7 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$ → Rango 2 y 3 incógnitas → SCI con 1 parámetro libre

Si $k \neq 14$ → Absurdo matemático en la tercera fila → S.I. sin solución

b) Solo debemos resolver en el caso de SCI para $k=14$

Si $z=\lambda \in \mathbb{R}$ → $x=11+\lambda$, $y=-7-2\lambda$

12. Sea $\left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x-a\cdot y+z=1 \\ a\cdot x+y+z=4 \end{matrix}\right\}$ **. Discutir las soluciones en función del valor de** $a\in\mathbb{R}$ **.**

Planteamos la matriz ampliada del sistema y triangulamos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \quad F'_2=F_2-F_1 \quad , \quad F'_3=F_3-a\cdot F_1 \quad \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \end{array}\right) \to$$

→ Intercambiamos C_2 con C_3 (**el cambio de columnas afecta al orden de las incógnitas**) →

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \end{array}\right) \to \text{Intercambiamos } F_2 \text{ con } F_3 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $-a-1=0 \to \quad a=-1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Podemos obviar la tercera fila (al hacerse todos los términos nulos significa que es combinación lineal de las otras filas). Llegamos a un sistema equivalente de dos ecuaciones y tres incógnitas → Un parámetro libre → infinitas soluciones → Sistema Compatible Indeterminado al tener un sistema de rango 2 con 3 incógnitas.
- Si $1-a=0 \to \quad a=1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$ → Absurdo en F_2 → No hay solución → Sistema incompatible, ya que $0\neq 4$.
- Si $a\neq -1$ y $a\neq 1$ → Solución única → Sistema Compatible Determinado, ya que **llegamos a tres ecuaciones no nulas tras triangular la matriz, que no son combinación lineal entre sí**. Sistema de rango 3 con 3 incógnitas.

13. a) Discute las soluciones del siguiente sistema en función del parámetro m .

$$\left\{\begin{array}{l} x+m\,y+z=2 \\ m\,x-y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{array}\right\}$$

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $m=1$.

a) Escribimos la notación matricial del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ m & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow C_1 \Leftrightarrow C_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & -1 & m & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F_2{}'=F_2-F_1 \ , \ F_3{}'=F_3-2F_2 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 0 & -(1+m) & m-1 & -2 \\ 0 & 1 & 2-2m & 1 \end{array}\right) \rightarrow F_3{}'=(1+m)F_3+F_2 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 0 & -(1+m) & m-1 & -2 \\ 0 & 0 & -2m^2+m+1 & m-1 \end{array}\right)$$

Para discusión de casos tomamos:

$-(1+m)=0 \rightarrow m=-1 \rightarrow$ Ojo, este valor inhabilita la transformación $F_3{}'=(1+m)F_3+F_2 \rightarrow$ Tendremos que sustituir $m=-1$ en un paso anterior a esa transformación

$-2m^2+m+1=0 \rightarrow m=1 \ , \ m=\frac{-1}{2}$

- Si $m=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Dos filas no nulas tras aplicar Gauss y tres incógnitas → SCI infinitas soluciones con un parámetro libre.
- Si $m=\frac{-1}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right)$ → En la tercera fila encontramos el absurdo $0=-3/2$ → SI sin solución
- Si $m=-1$ → Sustituimos antes de la transformación no permitida →

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$ → Intercambiamos Fila 2 con Fila 3 → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$ → Tres ecuaciones no nulas tras aplicar Gauss y tres incógnitas → SCD solución única.

b) Para $m=1$ vimos en el apartado anterior que teníamos SCI con un parámetro libre:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$ → De las segunda fila → $-2y=-2$ → $y=1$

De la primera fila (recuerda que la primera columna es la de z y la tercera columna es la de x) →

$z+1+x=2$ → $z=\lambda$ parámetro libre → $x=1-\lambda$

14. Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} x+y=1 \\ k\,x+z=0 \\ x+(1+k)\,y+k\,z=k+1 \end{array}\right\}$

a) Estudiar las posibles soluciones según el valor de k **.**

b) Halla la solución, si existe, para $k=1$ **.**

a) Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+k & k & k+1 \end{array}\right) \rightarrow C_1 \Leftrightarrow C_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1+k & 1 & k & k+1 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3-(1+k)F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \end{array}\right)$$

Tras obtener la matriz triangular de Gauss, comprobar que no hay absurdos matemáticos y eliminar filas proporcionales, el rango del sistema coincide con el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo.

Para la discusión de casos consideramos los siguientes casos:

$k=0$, $k+1=0$

- Si $k=0$ $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ → Hay dos filas iguales → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ → Rango 2 y 3 incógnitas → SCI con infinitas soluciones y 1 parámetro libre.
- Si $k=-1$ $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Obviamos la tercera fila → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ → Rango 2 y 3 incógnitas → SCI con infinitas soluciones y 1 parámetro libre.
- Caso complementario $k\neq\{-1,0\}$ → En la matriz final de Gauss resulta Rango 3 y 3 incógnitas → SCD con solución única.

b) Si $k=1$ $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ $z=0$, $x=0$, $y=1$

15. En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

x → número de botellas

y → número de garrafas

z → número de bidones

$50x+100y+1.000z=10.000$ → expresamos las masas en gramos

$x=2y$ → doble de botellas que de garrafas

$x+y+z=52$ → 52 productos totales por hora

Si llevamos la relación $x=2y$ a las otras dos ecuaciones:

$$\left\{\begin{matrix} 100y+100y+1.000z=10.000 \\ 2y+y+z=52 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 200y+1.000z=10.000 \\ 3y+z=52 \end{matrix}\right\}$$

De la segunda ecuación del sistema → $z=52-3y$ –: sustituimos en la primera ecuación del sistema.

$$200y+1.000(52-3y)=10.000 \rightarrow 200y+52.000-3.000y=10.000$$

$$42.000=2.800y \rightarrow y=15$$ garrafas

Por lo tanto → $x=2y \rightarrow x=30$ botellas

$z=52-3y \rightarrow z=7$ bidones

16. Considera el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{matrix} mx+2y-z=1 \\ 5x-4y+2z=0 \\ x+3my=m+2/5 \end{matrix}\right\}$ **.**

a) Discute los tipos de solución en función del parámetro m **.**

b) Resuelve el sistema para $m=0$ **. ¿Hay alguna solución en la que** $x=0$ **? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.**

a) Notación matricial del sistema → $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m+2/5 \end{array}\right)$

Intercambiamos las columnas primera y tercera → $C_1 \longleftrightarrow C_3$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & m & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 3m & 1 & m+2/5 \end{array}\right)$

$F'_2=F_2+2F_1$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & m & 1 \\ 0 & 0 & 5+2m & 2 \\ 0 & 3m & 1 & m+2/5 \end{array}\right)$

Intercambiamos las filas segunda y tercera → $F_2 \longleftrightarrow F_3$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & m & 1 \\ 0 & 3m & 1 & m+2/5 \\ 0 & 0 & 5+2m & 2 \end{array}\right)$

Tras obtener la matriz final de Gauss y comprobar que no hay absurdos matemáticos, ni filas proporcionales, el rango del sistema coincide con el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo.

$3m=0 \rightarrow m=0$

$5+2m=0 \rightarrow m=\frac{-5}{2}$

Discusión de casos.

- Si $m=0$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$ → Las filas dos y tres proporcionales → podemos obviar una.

  $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$ → rango del sistema igual a 2 → 3 incógnitas → SCI con un parámetro libre

- Si $m=\frac{-5}{2}$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -5/2 & 1 \\ 0 & -15/2 & 1 & -21/10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ → absurdo en la tercera fila → Sistema Incompatible sin solución

- Caso complementario → $m \neq \frac{-5}{2}, 0$ → Rango del sistema 3 → 3 incógnitas → SCD solución única.

b) En el apartado anterior hemos razonado: si $m=0$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$ → SCI con un parámetro libre

De la tercera ecuación (¡Ojo!, aplicamos un cambio de columnas en el apartado anterior, y eso provoca un cambio en el orden de las incógnitas) → $5x=2$ → $x=2/5$

La variable $x=2/5$ está determinada de manera única y su valor nunca será $x=0$.

Nuestro sistema jamás albergará una solución con $x=0$.

17. Se mezclan tres clases de vino de las siguientes maneras: 5 litros de Tenerife, 6 de las Palmas y 3 de Lanzarote, resultando una mezcla de 120 céntimo de euro el litro. 1 litro de Tenerife, 3 de Las Palmas y 6 de Lanzarote, dando un vino de 111 céntimos de euro el litro. 3 litros de Tenerife, 6 de las Palmas y 6 de Lanzarote, dando un vino de 116 céntimos de euro el litro. Hallar el precio por litro de cada clase de vino.

Planteamos el siguiente sistema, donde en cada ecuación el término independiente es igual al precio de un litro de la mezcla multiplicado por el número total de litros.

$$\begin{Bmatrix} 5T+6P+3L=14\cdot 120 \\ T+3P+6L=10\cdot 111 \\ 3T+6P+6L=15\cdot 116 \end{Bmatrix}$$

En el siguiente enlace encontramos los pasos de resolución por el método de Gauss:

https://matrixcalc.org/es/slu.html#solve-using-Gaussian-elimination(%7B%7B5,6,3,0,1680%7D,%7B1,3,6,0,1110%7D,%7B3,6,6,0,1740%7D%7D)

$T=120$, $P=130$, $L=100$ céntimos por litro para cada tipo de vino.

18. En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7,50€. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7,20€.

a) Calcula, de manera razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.

b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2€? Razona tu respuesta.

a) Planteamos las tres ecuaciones, siendo C el precio de un café, T el precio de una tostada y Z el precio de un zumo de naranja.

$$\left\{\begin{matrix} 3C+T+2Z=7{,}50 \\ 4C+T+Z=7{,}20 \\ 2C+T+3Z=k \end{matrix}\right\}$$

En la tercera ecuación no conocemos el precio total, por lo que incluimos un parámetro inicial. Según los posibles valores de ese parámetro podemos decidir si el sistema tiene solución. Por lo tanto, llegamos a un ejercicio de sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro inicial, que resolvemos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 7{,}50 \\ 4 & 1 & 1 & 7{,}20 \\ 2 & 1 & 3 & k \end{array}\right) \rightarrow \quad C_1 \leftarrow\rightarrow C_2 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7{,}50 \\ 1 & 4 & 1 & 7{,}20 \\ 1 & 2 & 3 & k \end{array}\right) \rightarrow \quad \begin{matrix} F'_2=F_2-F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \end{matrix} \quad \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7{,}50 \\ 0 & 1 & -1 & -0{,}30 \\ 0 & -1 & 1 & k-7{,}50 \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_3=F_3+F_2 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7{,}50 \\ 0 & 1 & -1 & -0{,}30 \\ 0 & 0 & 0 & k-7{,}80 \end{array}\right)$$

Tras terminar Gauss, comprobar la ausencia de absurdos matemáticos y la ausencia de filas proporcionales, el rango del sistema se define como el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo.

Si $k=7{,}80$ → Tendremos Rango 2 y 3 incógnitas → SCI con infinitas soluciones y un parámetro libre

Si $k\neq 7{,}80$ → Tendremos un absurdo matemático en la tercera fila → SI sin solución

El precio total de los dos cafés, la tostada y los tres zumos de naranja será igual a $7{,}80\,€$.

b) En el caso en que el sistema tiene solución, despejamos el valor de las variables.

$Z=\lambda\in\mathbb{R}$

$F_2 \rightarrow \quad C-Z=-0{,}30 \quad \rightarrow \quad C=-0{,}30+\lambda$

$F_1 \rightarrow \quad T+3C+2Z=7{,}50 \quad \rightarrow \quad T-0{,}90+3\lambda-0{,}60+2\lambda=7{,}50 \quad \rightarrow \quad T=9-5\lambda$

Si el precio de una tostada los fijamos en $\lambda=2\,€$, provocaría un precio negativo en la tostada:

$T=9-5\cdot 2=-1$

No habría solución, porque no tiene sentido precios negativos.

19. Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5€, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguna es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

Planteamos el sistema de ecuaciones, siendo L, C y A los precios de un lápiz, de un cuaderno y de una agenda respectivamente. El precio en euros la expresamos en céntimos de euros.

$$\left\{\begin{matrix} 3L+C+A=500 \\ 2C+A=500 \end{matrix}\right\}$$

Con esta información tendríamos un sistema de rango 2 y 3 incógnitas → SCI con infinitas soluciones y un parámetro libre.

$$A=\lambda\in\mathbb{R}$$

$$F_2 \;\rightarrow\; 2C+A=500 \;\rightarrow\; C=250-\frac{\lambda}{2}=\frac{500-\lambda}{2}$$

$$F_1 \;\rightarrow\; 3L+C+A=500 \;\rightarrow\; 3L+250-\frac{\lambda}{2}+\lambda=500 \;\rightarrow\; 3L=250-\frac{\lambda}{2}$$

$$L=\frac{250}{3}-\frac{\lambda}{6}=\frac{500-\lambda}{6}$$

Las condiciones del enunciado afirman que ningún artículo es gratis. Por lo tanto, las soluciones no pueden ser negativas y tampoco cero. Y todas las soluciones deben ser mútiplo de 50. Por lo que una forma práctica de razonar es ir dando valores al parámetro libre de 50 en 50 unidades, y comprobar para qué valores sa satisfacen todas las condiciones:

- Si $\lambda=50 \;\rightarrow\; A=50 \;,\; C=450/2 \;,\; L=450/6$ → NO
- Si $\lambda=100 \;\rightarrow\; A=100 \;,\; C=200 \;,\; L=400/6$ → NO
- Si $\lambda=150 \;\rightarrow\; A=150 \;,\; C=350/2 \;,\; L=350/6$ → NO
- Si $\lambda=200 \;\rightarrow\; A=200 \;,\; C=150 \;,\; L=50$ → SÍ
- Si $\lambda=250 \;\rightarrow\; A=250 \;,\; C=250/2 \;,\; L=250/6$ → NO
- Si $\lambda=300 \;\rightarrow\; A=300 \;,\; C=100 \;,\; L=200/6$ → NO
- Si $\lambda=350 \;\rightarrow\; A=350 \;,\; C=150/2 \;,\; L=150/6$ → NO
- Si $\lambda=400 \;\rightarrow\; A=400 \;,\; C=50 \;,\; L=100/6$ → NO
- Si $\lambda=450 \;\rightarrow\; A=450 \;,\; C=50/2 \;,\; L=50/6$ → NO
- Si $\lambda=500 \;\rightarrow\; A=500 \;,\; C=0 \;,\; L=0$ → NO

Para valores superiores del parámetro libre, se obtienen solucione snegativas, lo cual no tiene sentido para el precio de un producto.

Por lo tanto, la única solución válida es: $A=200 \;,\; C=150 \;,\; L=50$