hoofdstuk 3 irrationale functies

www.karelappeltans.be

October 7, 2026

Contents

1 Voorbeelden **2**

2 Definitie **2**

3 Basisfuncties **2**
3.1 $f(x) = \sqrt{x}$ . . . 2
3.2 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . . . 3

4 Domein, nulpunten, tekentabel **3**

5 Inverse functies **5**
5.1 voorbeeld . . . 5
5.2 horizontale lijntest . . . 5
5.3 injectieve functie . . . 5
5.4 algebraisch . . . 6

6 Samengestelde functies **6**

7 Rekenen met n-de machtswortels en rationale exponenten **7**
7.1 rationale exponenten . . . 7
7.2 Rekenregels . . . 7
7.3 wortelvormen vereenvoudigen . . . 8

8 Toepassingen **9**
8.1 beeldverwerking . . . 9
8.2 zevenkamp . . . 9

9 oefeningen **9**
9.1 irrationale functies . . . 9
9.2 inverse functies . . . 9
9.3 samengestelde functies . . . 10
9.4 rationale exponenten . . . 11

1 Voorbeelden

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $f(x) = x - \sqrt{x}$ $f(x) = \frac{\sqrt{169-x^2}-x-7}{\sqrt[3]{x}}$ ~~$f(x) = \sqrt{2x^2}$~~

2 Definitie

Een irrationale functie is een functie waarbij er minstens één x onder een n-de machtswortel staat.

3 Basisfuncties

3.1 $f(x) = \sqrt{x}$

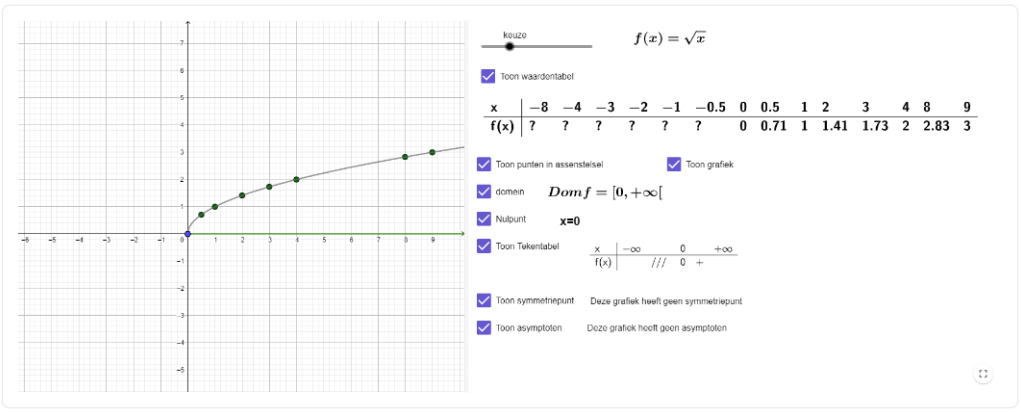


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/c3hg3FfG

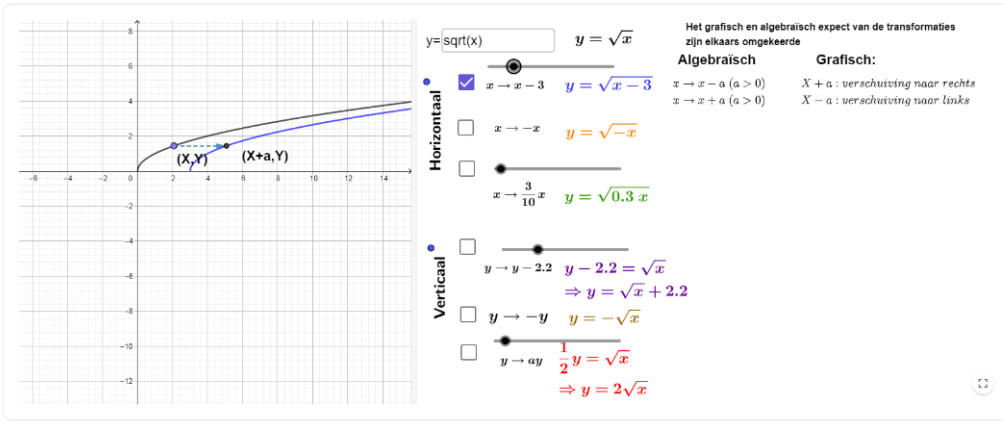


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t

3.2 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

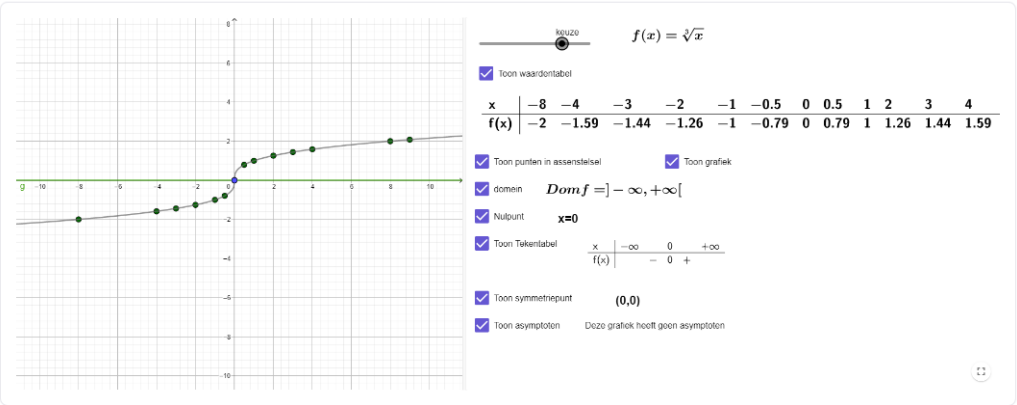


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/c3hg3FfG

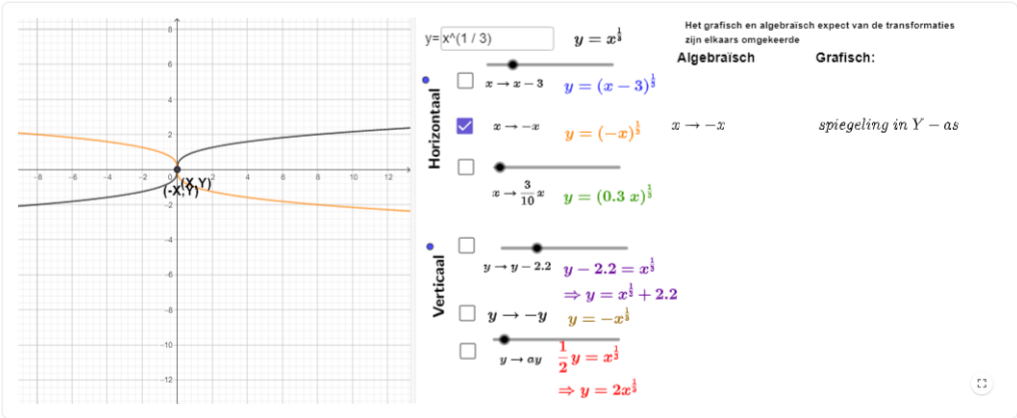


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t

4 Domein, nulpunten, tekentabel

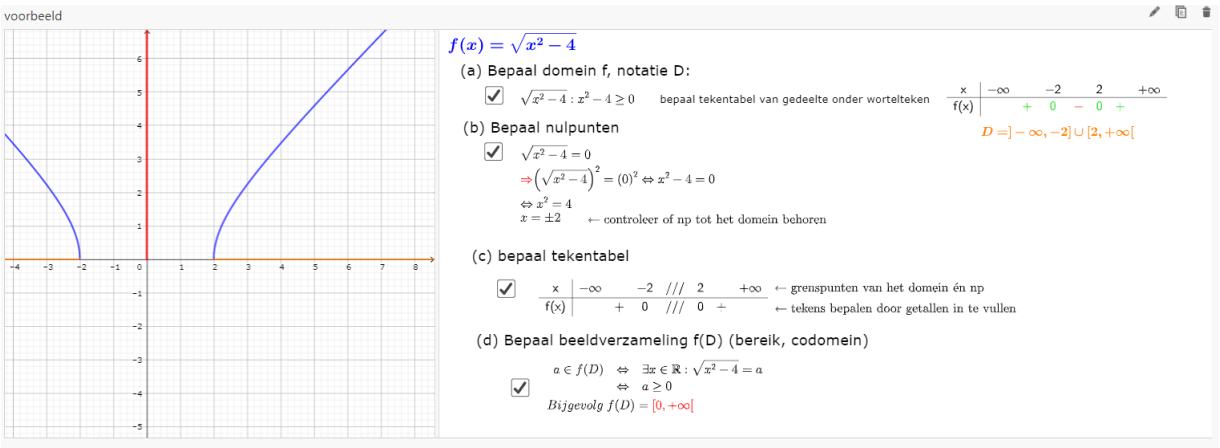


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/yarbCjsw

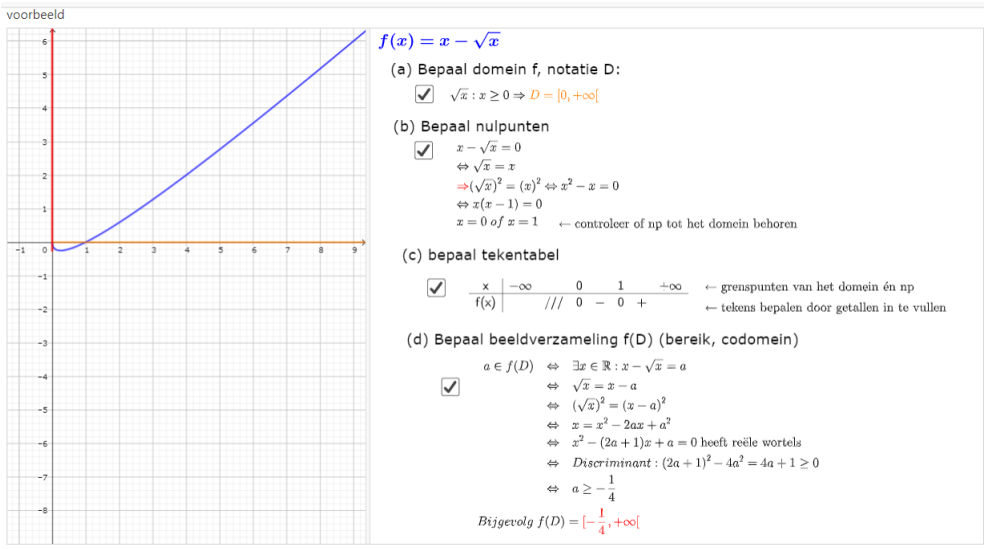


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/yarbCjsw

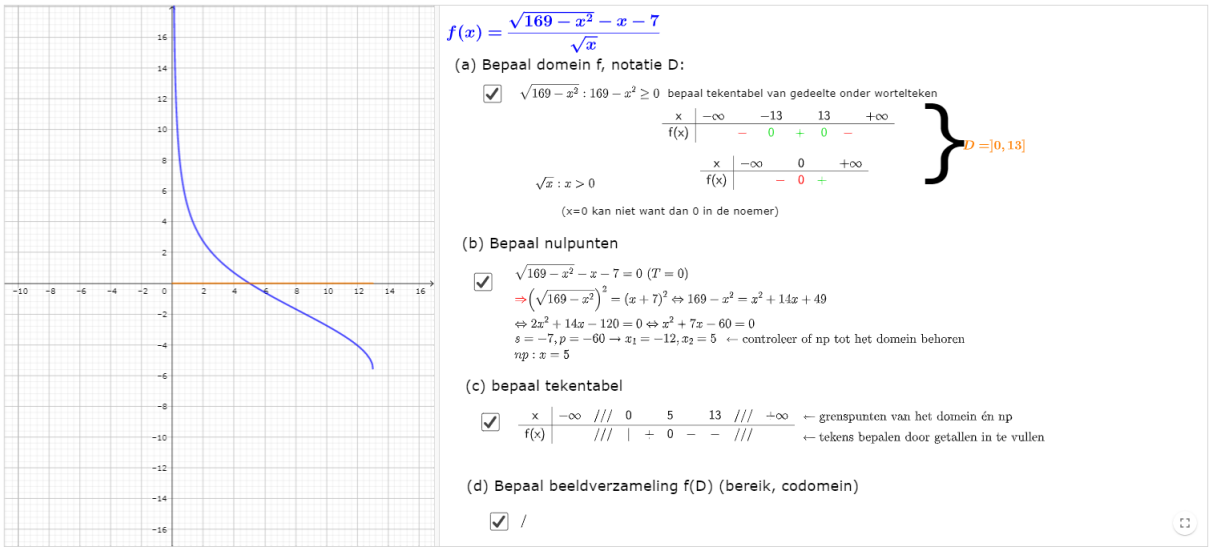


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/yarbCjsw

5 Inverse functies

5.1 voorbeeld

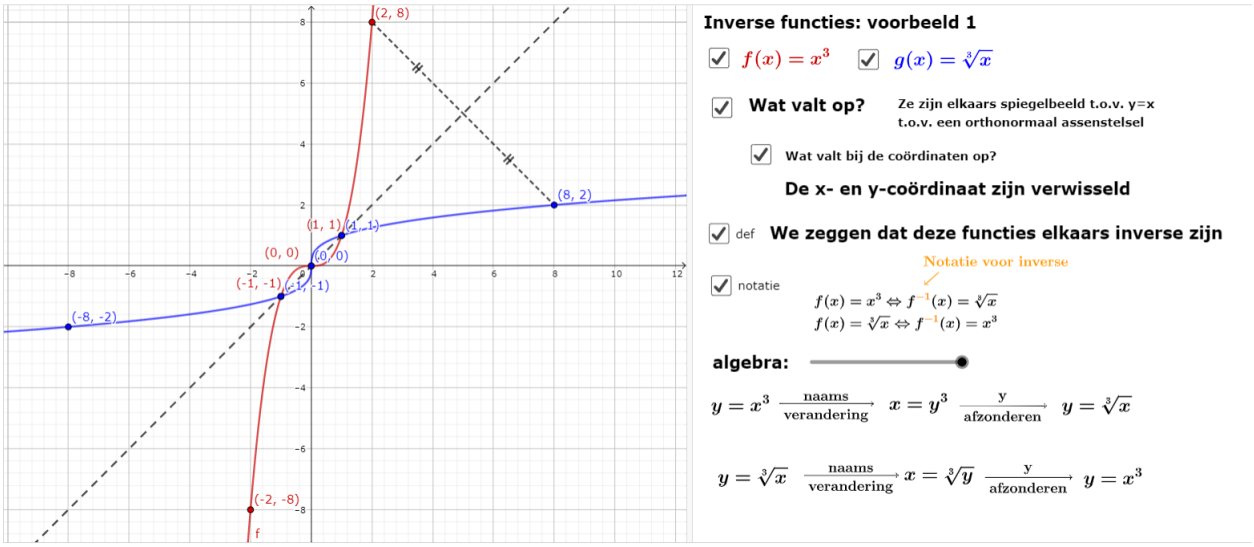


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/Faj58x3m

5.2 horizontale lijntest

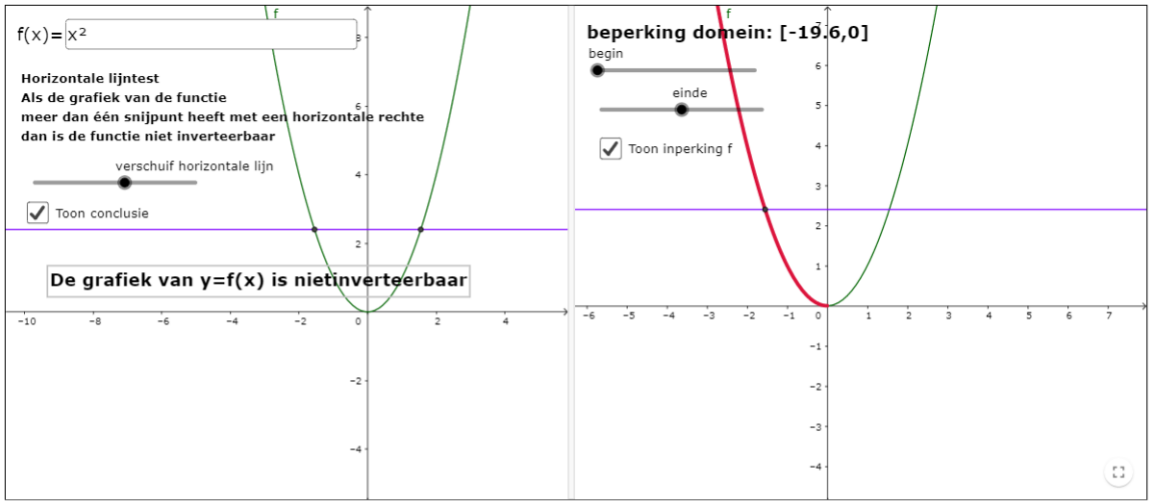


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/Faj58x3m

5.3 injectieve functie

Een functie die 'slaagt' in de horizontale lijntest wordt een injectieve functie genoemd. Dit is de definitie:
We noemen een functie $f : A \to B$ injectief als er voor elke $y \in B$ (B: bereik) hoogstens één $x \in A$ (A domein) bestaat waarvoor $f(x) = y$

5.4 algebraisch

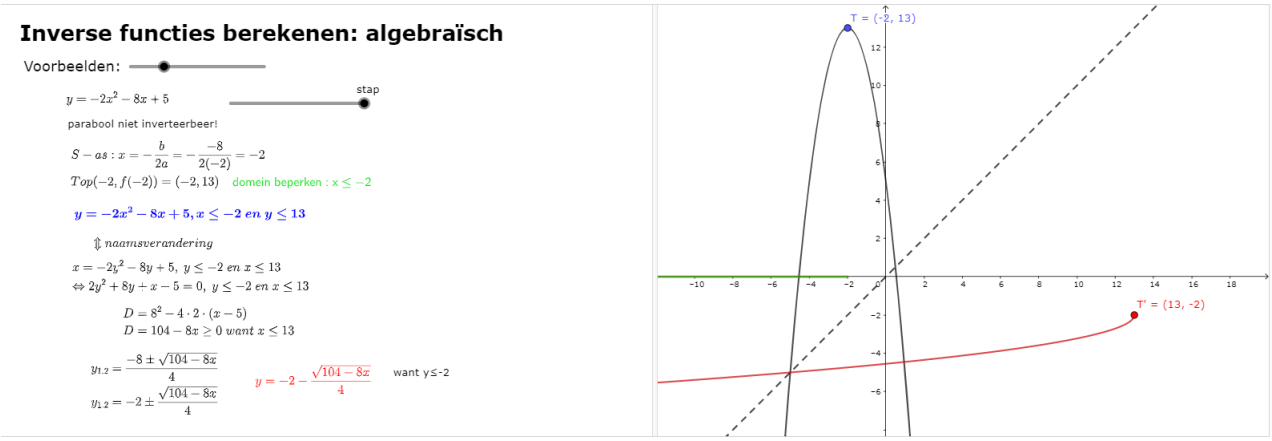


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/Faj58x3m

6 Samengestelde functies

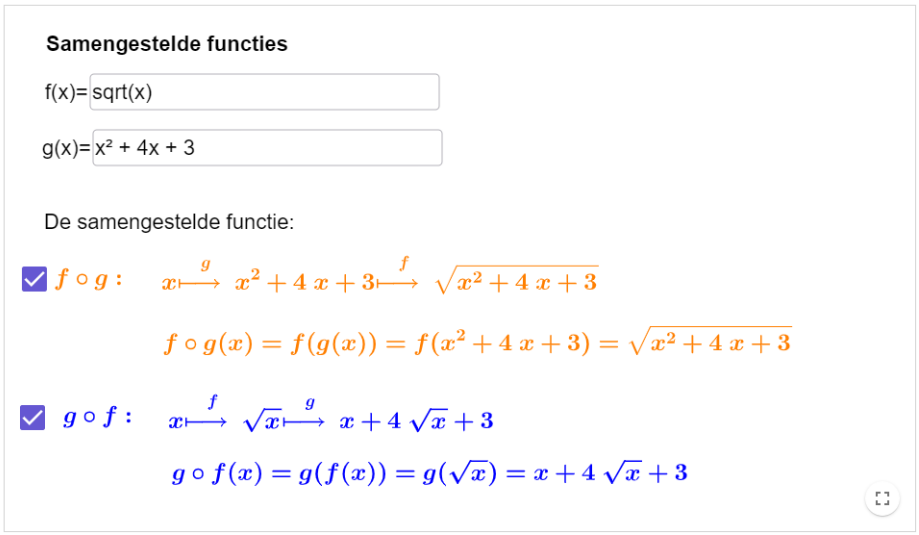


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/UvGBbgED

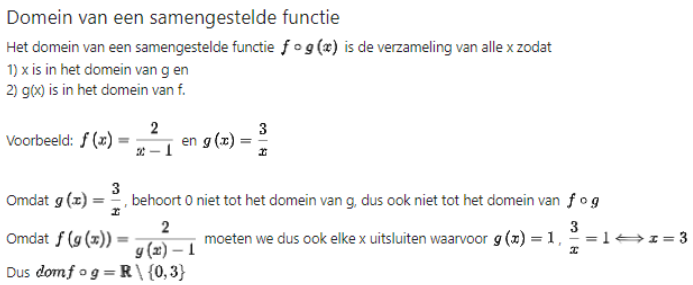


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/UvGBbgED

7 Rekenen met n-de machtswortels en rationale exponenten

7.1 rationale exponenten

n-de machtswortels

voorbeelden:

$\sqrt{9} = \sqrt[2]{9} = 3 \Leftrightarrow 3^2 = 9$ dus: $\sqrt[2]{3^2} = 3$

$\sqrt[5]{32} = 2 \Leftrightarrow 2^5 = 32$ $\sqrt[5]{2^5} = 2$

$\sqrt[3]{-27} = -3 \Leftrightarrow (-3)^3 = -27$ $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

(opgepast: als n even is moet a een positief getal zijn!)

Machten met rationale exponenten

Beschouw de volgende gelijkheden:

$\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{64} = 4 = 2^2 = 2^{\frac{3}{6}}$

$\sqrt[3]{2^9} = \sqrt[3]{512} = 8 = 2^3 = 2^{\frac{9}{3}}$

$\sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{256} = 4 = 2^2 = 2^{\frac{1}{4}}$

We merken telkens dat $\sqrt[n]{2^m} = 2^{\frac{m}{n}}$

Definitie:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} : \forall m \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{R}_0^+ : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Voorbeelden:

$5^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{5^2}$

$3^{\frac{9}{2}} = \sqrt[2]{3^9} = \sqrt{3^9} = (3^4)\sqrt{3}$

$104^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{104^1} = \sqrt[4]{104}$

12 / 12

7.2 Rekenregels

rekenregels exponenten

Regel	Voorbeeld
$a^1 = a$	$5^1 = 5$
$a^0 = 1$	$9^0 = 1$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(7^2)^4 = 7^{2 \cdot 4} = 7^8$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{5}{7}} = \frac{7}{5}$
$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$	$\sqrt[5]{2^5} = 2$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{2}{5}}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(3 \cdot 7)^n = 3^n \cdot 7^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

23 / 23

Figure 13: https://www.geogebra.org/m/uramnnee

7.3 wortelvormen vereenvoudigen

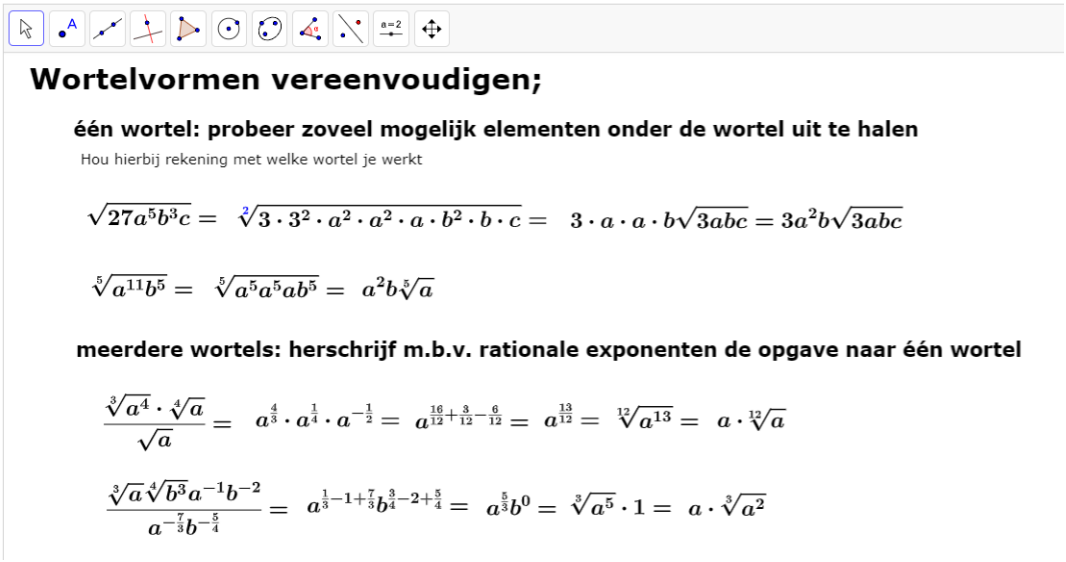


Figure 14: https://www.geogebra.org/m/uramnnee

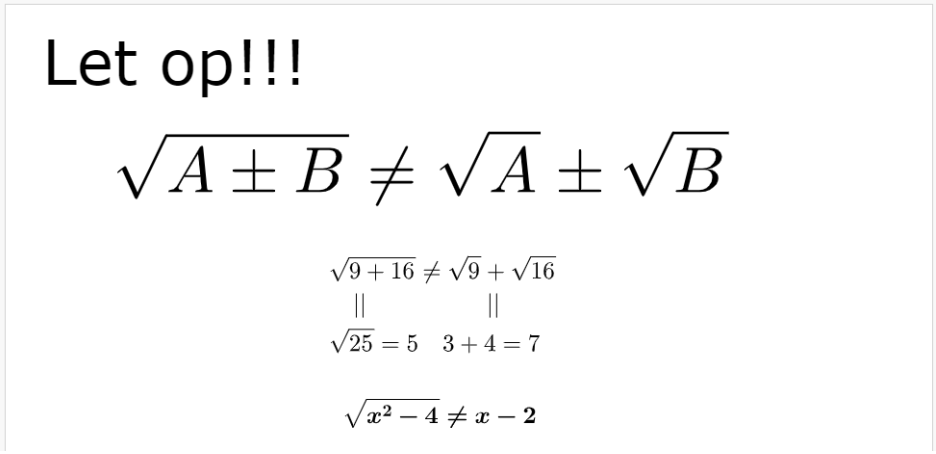


Figure 15: https://www.geogebra.org/m/uramnnee

8 Toepassingen

8.1 beeldverwerking

8.2 zevenkamp

Puntenberekening [bewerken]

De punten worden als volgt berekend:

- Punten = INT(A*(B-P)^C) voor baanonderdelen
- Punten = INT(A*(P-B)^C) voor veldonderdelen

A, B en C zijn parameters die per discipline verschillen, zoals is te zien in de tabel hieronder. P is de prestatie van de atleet in eenheden zoals deze in de laatste kolom staat weergegeven. Onderstaande variabelen vrouwen:

Event	A	B	C	Eenheden
100 m horden	9,23076	26,7	1,835	seconden
Hoogspringen	1,84523	75	1,348	centimeters
Kogelstoten	56,0211	1,5	1,05	meters
200 m	4,99087	42,5	1,81	seconden
Verspringen	0,188807	210	1,41	centimeters
Speerwerpen	15,9803	3,8	1,04	meters
800 m	0,11193	254	1,88	seconden

9 oefeningen

9.1 irrationale functies

1. Bepaal domein, nulpunten en tekentabel van
   (a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 3}$
   (c) $f(x) = \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2-4}}$
   (d) $f(x) = \frac{x-\sqrt{5-x^2}-1}{\sqrt{4x-7}}$
   (e) $f(x) = \frac{x+\sqrt{4x^2+6x}}{x+\sqrt{x^2-1}}$
   (f) $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}{\sqrt{5x-1}+x-5}$
2. Zijn de functies f en g gelijk? Verklaar jullie antwoord
   (a) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$ en $g : x \mapsto \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$
   (b) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ en $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$

9.2 inverse functies

1. Welke van onderstaande functies zijn inverteerbaar? Bepaal vervolgens de eventuele inverse
   (a) $y = 2x + 3$
   (b) $y = x^2 + 4$
   (c) $y = \frac{2x+4}{x-3}$
   (d) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$
   (e) $y = \frac{1}{x^2}$
   (f) $y = \sqrt{x^2 - 1}$
2. Voor welke waarde(n) van a is de functie f met voorschrift $f(x) = -2x^2 - 8x + 5$ met $x \leq a$ inverteerbaar? Bepaal voor deze gevallen het voorschrift van de inverse functie
3. Bepaal de inverse van $f(x) = \sqrt{2x - 3} + 1$

4. juist of fout. Verklaar uw antwoord.

   (a) De verticale lijntest wordt gebruikt om te controleren of een functie inverteerbaar is

   (b) De inverse van $y = \frac{x+1}{x-2}$ is $y = \frac{x-2}{x+1}$

   (c) Elke oneven functie is inverteerbaar

   (d) Als een inverteerbare functie een HA heeft, zal haar inverse een VA hebben

   (e) het domein van de inverse functie is het bereik van de originele functie

5. De grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is de rechte door de punten $(0, 1)$ en $(7, 6)$. De functie g is de inverse functie van f. Bepaal g(3).

   A $g(3) = \frac{14}{5}$ B $g(3) = 3$ C $g(3) = \frac{17}{6}$ D $g(3) = \frac{22}{7}$

6. De grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ is de rechte door de punten $(-2, 0)$ en $(0, 1$. Verder is de functie g gegeven met $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = (f(x))^3$. Bepaal $g^{-1}(8)$. (A 2)

7. Oefen zelf op het algebraïsch berekenen van de inverse functie

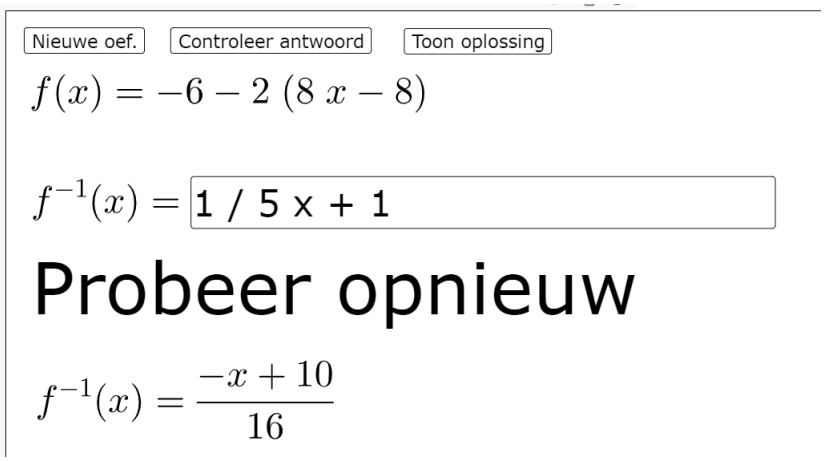


Figure 16: https://www.geogebra.org/material/edit/id/Faj58x3m

9.3 samengestelde functies

1. Kies zelf 2 functies f en en maak de samengestelde functies $f \circ g(x)$ en $g \circ f(x)$

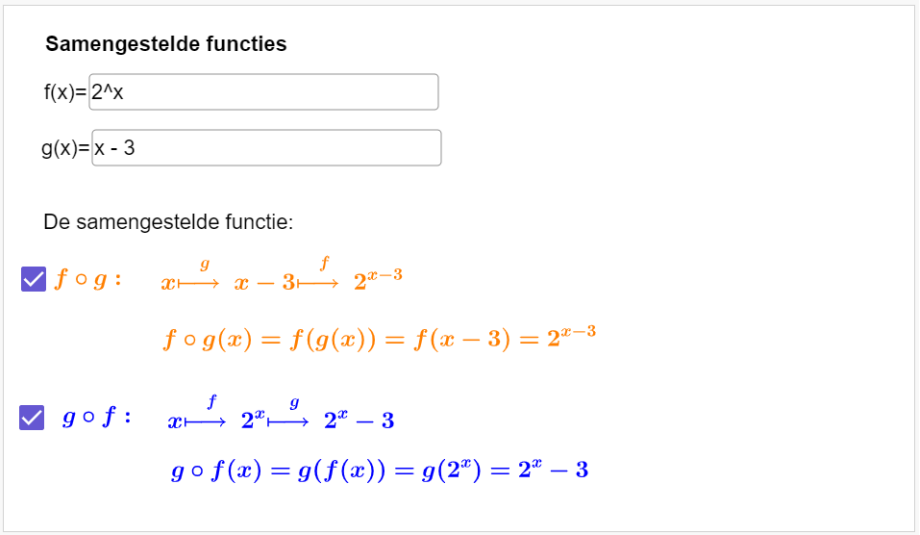


Figure 17: https://www.geogebra.org/m/UvGBbgED

2. Bepaal $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$, $f \circ f(x)$, $g \circ g(x)$ en hun respectieve domeinen met $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $g(x) = \frac{1}{1-x}$
3. Bepaal $f(f(x))$ en haar domein met $f(x) = \frac{1}{x-1}$
4. Los op: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ met $f(x) = \frac{x}{x+3}$ en $g(x) = 3x$
5. Voor welke waarden van x zal $f \circ g(x) \leq g \circ f(x)$ met $f(x) = 2x - 1$ en $g(x) = \frac{x}{x+1}$
6. Beschouw de twee functies $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}+x+1}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1$. Bepaal het domein van $f \circ g$.
7. Gegeven $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$
   (a) Bepaal domein en bereik van f
   (b) Bepaal het voorschrift van f^{-1}
   (c) Bepaal domein en bereik van f^{-1}
   (d) Ga na dat $f^{-1}(f(x)) = x$ voor elke x in het domein van f
   (e) Gan an dat $f(f^{-1}(y)) = y$ voor elke y in het bereik van f
8. Voor welke waarden van x geldt:
   (a) $f^{-1}(f(x)) = x$
   (b) $f(f^{-1}(x)) = x$

9.4 rationale exponenten

1. Schrijf telkens als een macht van 2
   (a) 1
   (b) 2
   (c) $\frac{1}{4}$
   (d) $\sqrt[3]{16}$
   (e) $\frac{4^{-\frac{1}{2}} 8^{\frac{2}{3}}}{16^{-\frac{3}{4}}}$
   (f) $\frac{2\sqrt{4}\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt[5]{8}}$
   (g) $\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}\left(\sqrt[5]{8}\right)^2}{\sqrt[5]{2}}$

2. Bepaal n als $\sqrt[5]{3^{n-5}} = 729$.

3. Welke van de vijf volgende uitdrukkingen is niet gelijk aan de overige vier?
   2^{24+3a} $4^{12}8^{a}$ $16^{6+a}2^{-a}$ 4^{12+2a} $2^{16}16^{2}2^{3a}$

4. Vereenvoudig.
   (a) $\sqrt[3]{32}$
   (b) $\sqrt[5]{160}$
   (c) $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^4}$
   (d) $216^{-\frac{2}{3}}$
   (e) $16^{-0.125}$
   (f) $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{2}{9}\right)^4}{2^{-6}3^3 4^{-2}}$

5. Vereenvoudig. Zet om in vormen zonder negatieve of gebroken exponenten. Alle uitdrukkingen zijn gedefinieerd.
   (a) $\sqrt[3]{16a^3b^4c^{16}}$
   (b) $\frac{\sqrt{a^{-5}}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3}}$
   (c) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}}$
   (d) $\left(\frac{c^{-3}}{a^{-1}b^{\frac{5}{2}}}\right)^{-\frac{3}{5}}\left(\frac{c^{\frac{8}{25}}b^{-1}}{a^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{5}{2}}$
   (e) $\frac{(-a^{-2})^{-n}a^4(ab^3)^{-2}}{\left(\frac{-b}{a^2}\right)^{-(n+2)}}\cdot\left(\frac{a}{-b^{-2}}\right)^n$
   (f) $\frac{\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[9]{x^3y}}$

6. Bij het afschrijven van een machine in de boekhouding wordt de volgende formule gebruikt:

$$\frac{p}{100} = 1 - \sqrt[n]{\frac{W_n}{W_0}}$$

   met p het afschrijvingspercentage en W_n de waarde van de machine na n jaar.
   (a) Bereken p voor een machine die na 5 jaar nog een vierde van haar aanschafprijs waard is
   (b) Een machine werd gekocht voor 10000 euro en heeft een afschrijvingspercentage van 30% . Hoeveel is de machine nog waard na 3 jaar?

7. De productie q van een bedrijf hangt af van de beschikbare hoeveelheden grondstoffen G en energie E volgens de formule

$$q = \sqrt[3]{4G}\cdot\sqrt{5E}.$$

   De hoeveelheden grondstoffen G en energie E worden bepaald door een algemene prijs P en worden berekend met de formules

$$G = 16\sqrt{P^3} \quad \text{en} \quad E = 5\sqrt[3]{P^2}.$$

   Wat is de uitdrukking van de productie q in functie van P?
   (a) $9\sqrt[5]{P}$
   (b) $20\sqrt[6]{P^5}$
   (c) $20\sqrt[5]{P^6}$
   (d) $9\sqrt[6]{P}$

8. Als a negatief is, dan is $\sqrt{(2a-1)^2}\cdot\sqrt[3]{a^9} + \sqrt{a^4}$ gelijk aan: