ENERO 2026
Vol. III, Núm. 1, pp. 109–122
ISSN: 3020-4925

Inversión esférica de nudos: el nudo trébol y el nudo ocho

Juan Carlos Ponce Campuzano,
Ivana Carrizo Molina y
Miguel Ángel Maldonado Aguilar

La geometría inversiva es una herramienta fundamental en la geometría moderna por su capacidad para transformar conformemente rectas, circunferencias, planos y esferas, revelando relaciones profundas entre distintas configuraciones geométricas. Este trabajo presenta los principios básicos de la inversión en el plano y en el espacio, junto con una breve contextualización histórica desde el siglo XIX. Asimismo, se examina la inversión esférica como extensión tridimensional y se ilustran aplicaciones en teoría de nudos mediante los casos del nudo trébol y del nudo ocho, mostrando cómo la inversión ofrece nuevas representaciones y perspectivas topológicas.

Palabras clave: Geometría inversiva, inversión esférica, modelos geométricos, topología, teoría de nudos, nudo trébol, nudo ocho.

Sphere inversion of knots: the trefoil and figure-eight knots

Inversive geometry is a fundamental tool in modern geometry due to its ability to conformally transform lines, circles, planes and spheres, revealing deep relationships between different geometric configurations. This work presents the basic principles of inversion in the plane and in space, together with a brief historical contextualization since the nineteenth century. It also examines spherical inversion as a three-dimensional extension and illustrates applications in knot theory through the cases of the trefoil knot and the figure-eight knot, showing how inversion provides new representations and topological perspectives.

Keywords: Inversive geometry, spherical inversion, geometric models, topology, knot theory, trefoil knot, figure-eight knot.

MSC2020: 51B10, 57K10, 57M25, 30C20.

Introducción

La geometría inversiva ocupa un lugar singular dentro de la geometría moderna por su capacidad para relacionar, mediante una transformación sencilla, figuras aparentemente dispares como rectas, circunferencias, planos y esferas. A través de la inversión, una transformación que preserva ángulos y transforma circunferencias y rectas en otras circunferencias o rectas, es posible analizar propiedades geométricas que trascienden las limitaciones de las transformaciones euclidianas.

El estudio de la inversión no solo ha enriquecido la comprensión de la geometría plana y espacial, sino que también ha tenido una profunda influencia en áreas como el análisis complejo (por ejemplo, transformaciones conformes) y los modelos de la geometría no euclidiana.

En el presente trabajo revisamos los fundamentos de la geometría inversiva en el plano, enfatizando su papel como herramienta unificadora en la representación y análisis de transformaciones geométricas.

Finalmente, exploramos la extensión del concepto de inversión a tres dimensiones y su aplicación al

estudio de nudos, en particular, la inversión del nudo trébol y del nudo ocho, con el fin de ilustrar cómo esta transformación puede emplearse para obtener nuevas representaciones y perspectivas topológicas dentro del espacio tridimensional.

Breve reseña histórica

De acuerdo con Yates (1947, p. 127) y Kline (1972, pp. 932–933), varios matemáticos contribuyeron al desarrollo de la geometría inversiva a lo largo del siglo XIX. Por ejemplo, Jacob Steiner (Utzenstorf, mar. 1796 – Berna, abr. 1863) fue uno de los primeros en reconocer las propiedades de la inversión geométrica en el plano (Patterson, 1933, p. 155). Por otra parte, Adolphe Quetelet (Gante, feb. 1796 – Bruselas, feb. 1874) y Germinal Pierre Dandelin (París, abr. 1794 – Ixelles, feb. 1847) exploraron aplicaciones de esta transformación en problemas geométricos (Patterson, 1933, p. 156–164). August Ferdinand Möbius (Schulpforte, nov. 1790 – Leipzig, sep. 1868) estudió de manera extensa la geometría inversiva (Möbius, 1855) e introdujo el concepto de *transformaciones de Möbius*. Finalmente, William Thomson (Lord Kelvin) (Belfast, jun. 1824 – Largs, dic. 1907) y Joseph Liouville (Saint-Omer, mar. 1809 – París, sep. 1882) destacaron la importancia de la inversión en física matemática, particularmente en problemas de potenciales y electrostática (Thomson, 1847). En conjunto, estos aportes cimentaron la base de la geometría inversiva como un área central en la geometría moderna, con aplicaciones posteriores en análisis complejo y geometría no euclidiana.

Durante el siglo XX, la geometría inversiva continuó desarrollándose en estrecha relación con el análisis complejo y la teoría de transformaciones conformes. Felix Klein (Düsseldorf, abr. 1949 – Gotinga, jun. 1925) y Henri Poincaré (Nancy, abr. 1854 – París, jun. 1912) emplearon ideas de inversión para formular modelos de la geometría hiperbólica y para profundizar en la teoría de grupos de transformaciones. En este mismo periodo, una contribución destacada fue la de Harold S. M. Coxeter (Kensington, feb. 1907 – Toronto, mar. 2003), quien relacionó de forma sistemática la geometría inversiva con la geometría proyectiva y con los modelos de la geometría hiperbólica. Sus trabajos, como *The Inversive Plane and Hyperbolic Space* (1966) e *Inversive Geometry* (1971), así como sus libros *Non-Euclidean Geometry* (1942) e *Introduction to Geometry* (1961), consolidaron el papel de la inversión dentro de una visión unificada de las geometrías (véanse Coxeter, 1966, 1969, 1971, 1998).

Inversión respecto a una circunferencia

Dado una circunferencia $\mathcal{C}$ con centro O y radio r, la inversión de un punto $P \neq O$ con respecto a $\mathcal{C}$ es el punto P' ubicado sobre la misma recta que une O y P tal que:

$$OP \times OP' = r^2,$$

donde «×» indica la multiplicación estándar entre números reales.

Los puntos dentro de la circunferencia se invierten en puntos del exterior, y viceversa, mientras que los puntos sobre la circunferencia permanecen fijos.

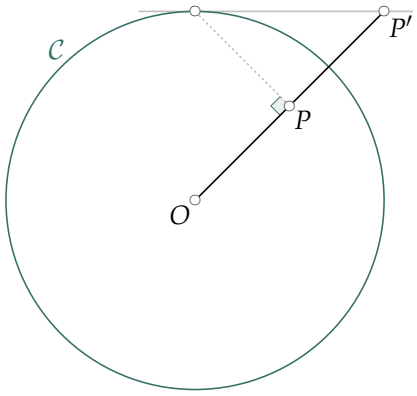


Figura 1. Inversión $OP \times OP' = r^2$.

Si el punto P está cerca de O, P' estará más alejado de O, y si P se aproxima a O, entonces P' se alejará infinitamente. Por lo cual es conveniente considerar en este contexto el *plano extendido* con un *punto en el infinito*, es decir, consideramos la inversión en la compactificación $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. De esta manera, la inversión establece una correspondencia uno a uno entre el interior de la circunferencia al exterior de la misma.

Si el punto P describe un lugar geométrico (por ejemplo, una curva), P' describe el lugar geométrico invertido. A continuación, presentamos un par de ejemplos de inversiones de curvas.

1. Ejemplo: inversión de una recta

Sea L una recta en el plano.

- Si L *no pasa por el centro* O de la circunferencia de inversión $\mathcal{C}$, su imagen es una *circunferencia que pasa por* O, como se muestra en la figura 2. En efecto, para $L : ax + by + c = 0$ con $c \neq 0$, la inversión de $P(x, y)$ es

$$P' = (u, v) = \frac{r^2}{x^2 + y^2}(x, y).$$

Sustituyendo en la ecuación de L y simplificando

se obtiene la ecuación de una circunferencia:

$$\left(u+\frac{r^2a}{2c}\right)^2+\left(v+\frac{r^2b}{2c}\right)^2=\left(\frac{r^2\sqrt{a^2+b^2}}{2|c|}\right)^2.$$

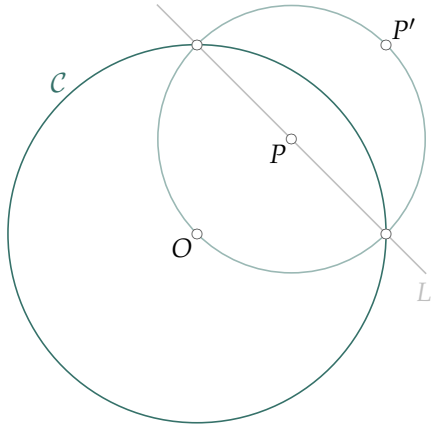


Figura 2. Inversión de una recta que no pasa por O. La imagen es una circunferencia que pasa por O.

- Si L *pasa por el centro* O de la circunferencia de inversión, es decir $ax+by=0$, la imagen es la *misma recta*, pues la sustitución anterior conduce a $au+bv=0$ (véase la figura 3).

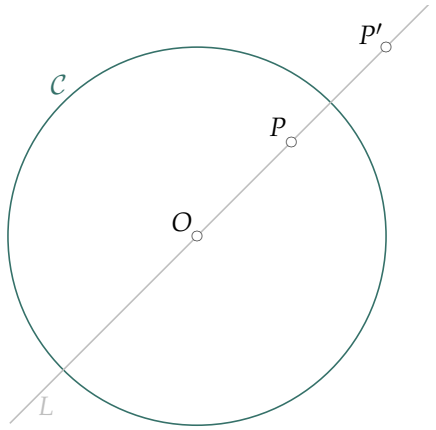


Figura 3. Inversión de una recta que pasa por O. La imagen es la misma recta.

Dado que definimos la inversión en el plano extendido, podemos interpretar que una recta se transforma en una circunferencia de radio infinito que pasa por O. Así, toda recta puede considerarse un caso particular de circunferencia bajo inversión:

- Si la recta L *no pasa por* O, su imagen es una *circunferencia* que pasa por O.
- Si la recta L *pasa por* O, su imagen es la *misma recta*, la cual representa una circunferencia de radio infinito.

En consecuencia, en el plano extendido, *toda recta puede verse como una circunferencia bajo inversión.*

2. Ejemplo: inversión de una circunferencia

Consideremos ahora la inversión de una circunferencia C_1 respecto de la circunferencia de inversión $\mathcal{C}$ de radio r y centro en el origen O. Sea la circunferencia C_1 dada por la ecuación general

$$x^2+y^2-2gx-2fy+c=0,$$

de modo que su centro es (g,f) y su radio es

$$R=\sqrt{g^2+f^2-c}.$$

Usando la relación de inversión

$$(x,y)=\frac{r^2}{u^2+v^2}(u,v),$$

se obtiene, tras simplificar:

$$c(u^2+v^2)-2r^2(gu+fv)+r^4=0.$$

- Si $c\neq 0$ (C_1 no pasa por O), la imagen es otra *circunferencia* con

$$O_{c'}=\left(\frac{r^2g}{c},\frac{r^2f}{c}\right),\quad R'=\frac{r^2\sqrt{g^2+f^2-c}}{|c|}.$$

- Si $c=0$ (C_1 pasa por O), la imagen es una *recta*, que en el plano extendido se interpreta como una circunferencia de radio infinito perpendicular a la recta que une O con el centro de C_1.

Así, rectas y circunferencias se unifican bajo inversión: *toda recta puede considerarse una circunferencia en el plano extendido.*

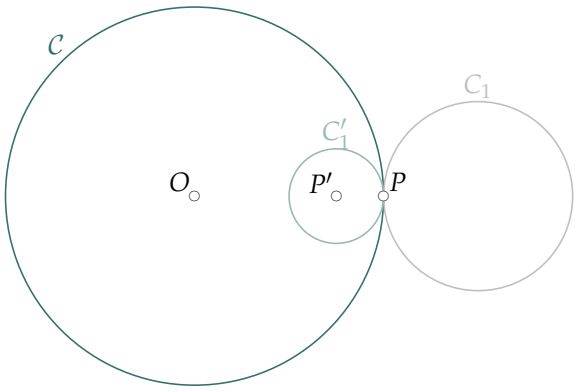


Figura 4. Inversión de una circunferencia C_1 que no pasa por O. La imagen es otra circunferencia C_1'.

Para más ejemplos y propiedades detalladas sobre la inversión en el plano, remitimos al lector al trabajo

de Pérez García-Ortega (2024).

Inversión esférica

El concepto de inversión se extiende de forma natural a tres dimensiones. Dada una esfera $\mathcal{S}$ con centro O y radio r, la inversión de un punto P se define de manera análoga al caso plano:

$$OP \times OP' = r^2.$$

Igualmente, esta transformación preserva los ángulos (es decir, es una transformación conforme) y transforma circunferencias en circunferencias y esferas en esferas.

La *n-esfera* unitaria, con centro en el origen, está definida como el espacio de los elementos de norma 1, esto es

$$S^n = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\vec{x}\| = 1 \,\},$$

donde $\|\vec{x}\|$ denota la norma euclidiana de $\vec{x}$. Observemos que S^n es la frontera del disco unitario cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$; de esto se sigue que:

- $S^0 = \{-1, 1\}$, los extremos del intervalo unitario $[-1, 1]$.
- S^1 es la circunferencia unitaria del plano euclidiano.
- S^2 es la esfera ordinaria en $\mathbb{R}^3$.
- S^3 es la hiperesfera en $\mathbb{R}^4$.

La inversión con respecto a la esfera unitaria S^2 se expresa de forma analítica como

$$I(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2},$$

donde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Algunos ejemplos clásicos de inversión esférica, que han sido estudiados ampliamente, incluyen:

- *Esfera:* su inversión produce una esfera.
- *Cilindro, cono* y *toro*: su inversión produce un *cicloide de Dupin* (véase la figura 5).
- *Esferoide:* la superficie invertida es una superficie implícita $F(x, y, z) = 0$, donde $F(x, y, z)$ es un polinomio de *grado 4* (véase la figura 6).

Dado que el objetivo de este artículo es investigar la inversión esférica del nudo trébol y del nudo ocho, necesitamos introducir un par de términos elementales de topología y teoría de nudos.

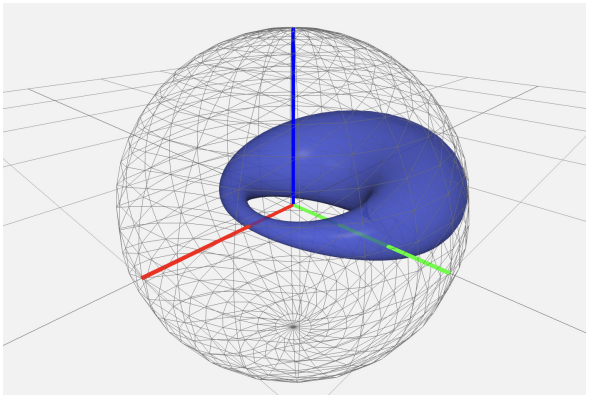


Figura 5. La inversión del toro es un cicloide de Dupin.

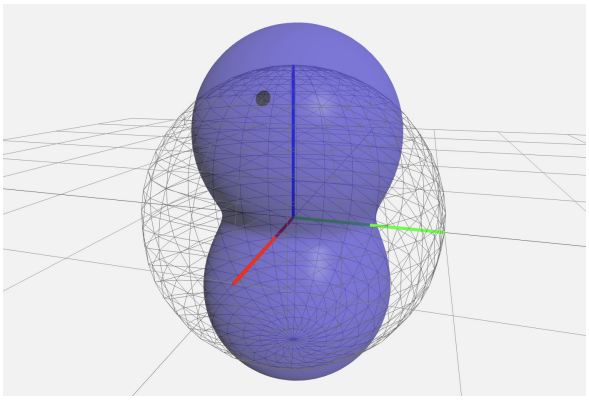


Figura 6. La inversión de un esferoide.

1. Teoría elemental de nudos

Sean X, Y espacios topológicos. Un *encaje de X en Y* es una función $f : X \to Y$ tal que X es homeomorfo a la imagen $f(X)$, donde este último es considerado como subespacio de Y. Una manera de interpretar a este tipo de encajes es pensar que en Y se tiene una copia de X (a través de f).

Un *nudo* es un encaje $S^1 \to \mathbb{R}^3$ de la circunferencia unitaria en el espacio euclidiano 3-dimensional. En la teoría de nudos, resulta importante considerar a un nudo en la *compactificación* del espacio euclidiano $R^3 \cup \{\infty\}$, la cual puede identificarse con la 3-esfera S^3.

2. El nudo trébol

El *nudo trébol* es el nudo no trivial más simple. La parametrización más conocida de este nudo está dada por

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) = \Big(\operatorname{sen}(t) + 2\operatorname{sen}(2t)\Big)\,\vec{i} + \\ + \Big(\cos(t) - 2\cos(2t)\Big)\,\vec{j} + \\ + \Big(-\operatorname{sen}(3t)\Big)\,\vec{k}, \quad (1)\end{aligned}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Aunque también un nudo trébol es un caso particular del *nudo tórico*, o (p, q)-*toro*, definido como

$$\vec{r}(t) = r\cos(p\,\phi)\vec{i} + r\,\mathrm{sen}(p\,\phi)\vec{j} - \mathrm{sen}(q\,\phi)\vec{k}, \qquad (2)$$

donde $r = \cos(q\,\phi) + 2$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. Por ejemplo, para los valores $p = 2$ y $q = 3$, obtenemos un nudo trébol.

Ahora, la inversión del nudo trébol (1) con respecto a la 2-esfera S^2 viene dada por

$$I(\vec{r}(t)) = \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|^2} = \frac{1}{\|\vec{r}(t)\|^2}\Big(x(t), y(t), z(t)\Big).$$

Usando identidades trigonométricas, obtenemos

$$\|\vec{r}(t)\|^2 = \frac{1}{2}\Big(11 - \cos(6t) - 8\cos(3t)\Big).$$

Por tanto

$$\frac{1}{\|\vec{r}(t)\|^2} = \frac{2}{11 - \cos(6t) - 8\cos(3t)}.$$

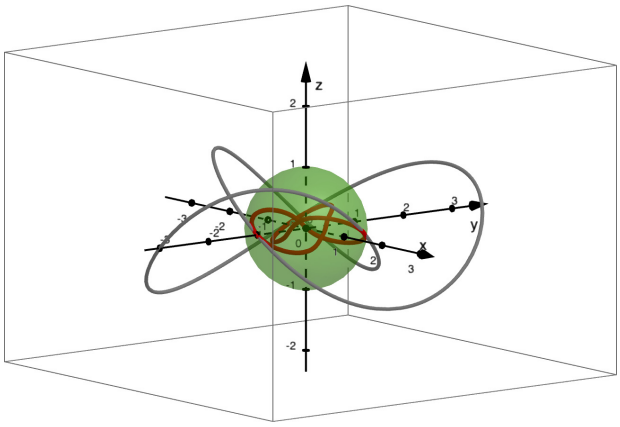


Figura 7. Nudo trébol y su inversión (en el interior de la esfera unitaria).

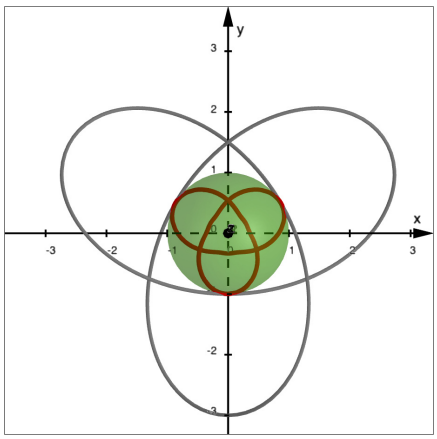


Figura 8. Nudo trébol y su inversión, vista en el plano xy.

Como es de esperar, la inversión del nudo trébol es también un nudo trébol (esto se debe a que la inversión es también un homeomorfismo). Ahora, dicha inversión se encuentra en el interior de la esfera, como se muestra en las figuras 7 y 8.

Recordemos que estamos considerando al nudo como una inmersión en la compactificación $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$; es decir, estamos admitiendo el punto del infinito. Si el nudo trébol pasa por el origen, entonces su inversión será de igual manera un nudo, cuyos extremos se extienden al punto del infinito. Por ejemplo, podemos usar el vector $\vec{u} = (0, 1, 0)$ para trasladar dicho nudo de modo que pase por $(0, 0, 0)$. Esto es

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\vec{u}}(t) = &\Big(\mathrm{sen}(t) + 2\,\mathrm{sen}(2t)\Big)\vec{i} + \\ &+ \Big(\cos(t) - 2\cos(2t) + 1\Big)\vec{j} + \\ &+ \Big(-\mathrm{sen}(3t)\Big)\vec{k}. \qquad (3)\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\|\vec{r}_{\vec{u}}(t)\|^2 = 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)\Big[&29\cos(t) + 12\cos(2t) \\ &+ 3\cos(3t) + 2\cos(4t) \qquad (4) \\ &+ \cos(5t) + 21\Big].\end{aligned}$$

Claramente, $\|\vec{r}(t)\|^2 = 0$ cuando $t = 0$ ó $t = 2\pi$. Por lo tanto

$$\frac{1}{\|\vec{r}(t)\|^2} \to \infty \ \text{ cuando } \ t \to 0.$$

Como podemos apreciar en las figuras 9 y 10, la inversión del nudo trébol da como resultado un nudo trébol alrededor del origen cuyos extremos se extienden al infinito.

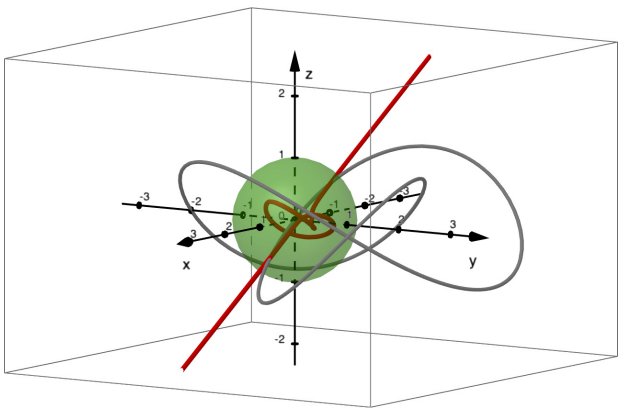


Figura 9. Nudo trébol que pasa por el origen y su inversión, cuyos extremos se extienden al infinito.

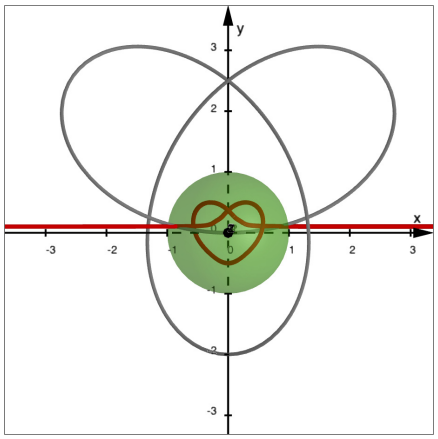


Figura 10. Nudo trébol que pasa por el origen y su inversión vista en el plano xy.

La pregunta que ahora surge es: ¿qué sucede si invertimos la superficie tubular asociada al nudo trébol?

1. *Inversión de la superficie del nudo trébol*

Consideremos la superficie tubular asociada al nudo trébol definida paramétricamente como

$$\vec{r}\,(u,v) = X(u,v)\vec{i} + Y(u,v)\vec{j} + Z(u,v)\vec{k}, \qquad (5)$$

donde

$$X = -\cos(u)\cos(v) - 3\cos(u)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3u}{2}\right)\right)$$

$$Y = \operatorname{sen}(u)\cos(v) + 3\operatorname{sen}(u)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3u}{2}\right)\right)$$

$$Z = \operatorname{sen}(v) + 2\cos\left(\frac{3u}{2}\right)$$

y $u \in [0, 4\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

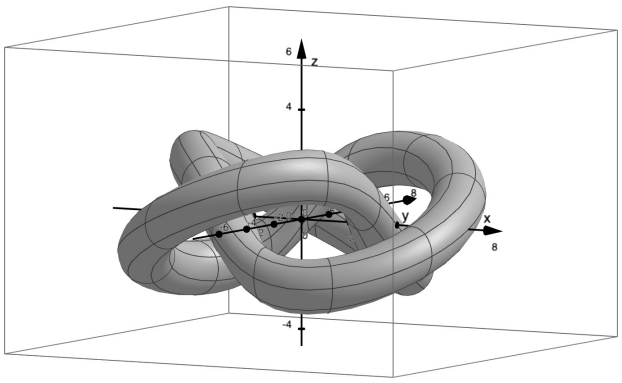


Figura 11. Superficie del nudo trébol $\vec{r}(u,v)$.

Dado que esta parametrización es esencialmente una superficie tubular, y como la inversión con respecto a la 2-esfera S^2 transforma circunferencias en circunferencias, entonces su inversión es también una superficie nudo trébol. Esto se puede apreciar en las figuras 12 y 13, las cuales fueron obtenidas con ayuda de GeoGebra, el cual también permite fácilmente calcular la inversión de la superficie del nudo trébol.

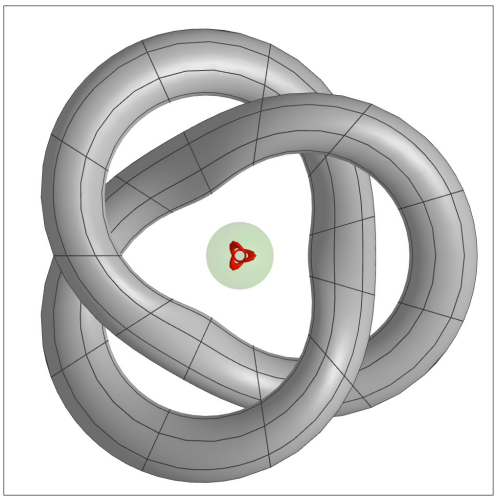


Figura 12. Superficie del nudo trébol 8 y su inversión (en el interior de la esfera).

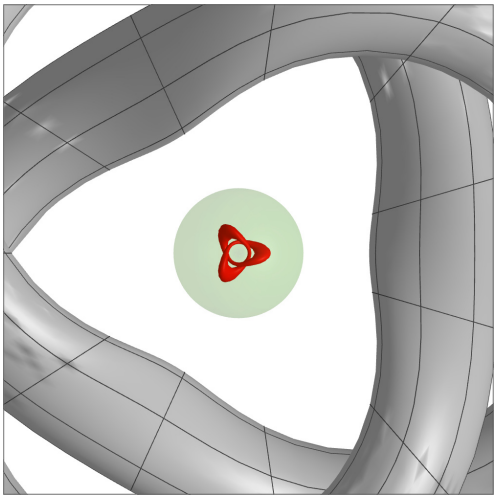


Figura 13. Acercamiento de la superficie de nudo trébol y su inversión en el interior de la esfera, vista en el plano xy.

Ahora, ¿qué sucede si esta superficie se mueve en el espacio de tal forma que el origen se encuentra en su interior? Por ejemplo, al trasladar la superficie tubular de nudo trébol definida en (5), usando el vector $\vec{u}_a = (a, 0, 0)$, obtenemos

$$\vec{r}_{\vec{u}_a}(u,v) = \big(X(u,v) + a\big)\vec{i} + Y(u,v)\vec{j} + Z(u,v)\vec{k} \quad (6)$$

con $u \in [0, 4\pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$. Notemos que $\vec{r}_{\vec{u}_a}(\pi,\pi) = (2+a, 0, 0)$ y $\vec{r}_{\vec{u}_a}(\pi, 0) = (4+a, 0, 0)$. De lo cual podemos deducir los siguientes casos:

- Si $-2 < a$, el origen está en el exterior de $\vec{r}_{\vec{u}_a}$.
- Si $a = -2$, el origen está en $\vec{r}_{\vec{u}_a}$.
- Si $-4 < a < -2$, el origen está en el interior de $\vec{r}_{\vec{u}_a}$.

En particular, podemos elegir $a = -3$ para calcular su inversión. Consecuentemente, cuando $a = -3$, la superficie del nudo trébol tubular (6) contiene al origen en su interior y, por lo tanto, su inversión envolverá también al origen, dejando en su interior el nudo trébol tubular, véase la figura 14 (en este caso usamos Python para obtener esta figura, el código fuente se puede consultar en Ponce Campuzano, 2025b).

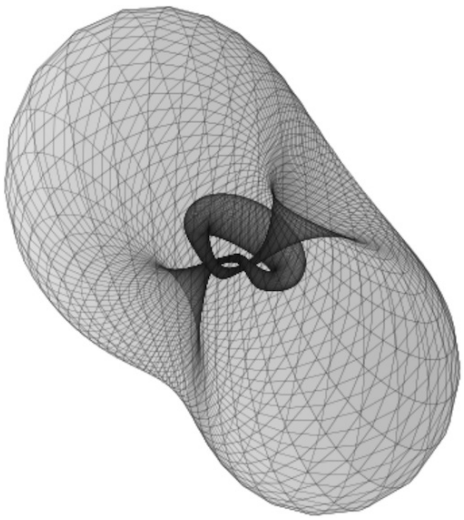


Figura 14. La inversión de $\vec{r}_{\vec{u}_a}$ con $a = -3$.

En la figura 15, se puede apreciar mejor el resultado de invertir la superficie del nudo trébol tubular que envuelve al origen. En este caso, usamos un factor de dilatación uniforme $\sigma = 1/10$ y trasladamos con respecto al vector $\vec{v} = \left(-\frac{35}{100}, 0, 0\right)$.

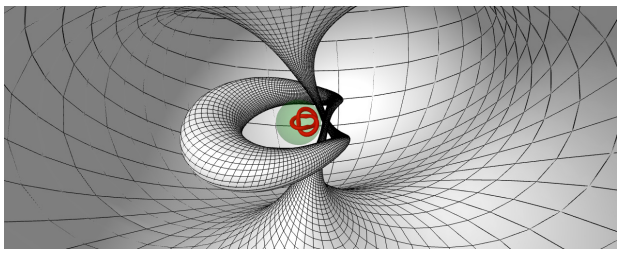


Figura 15. El nudo trébol (en el interior de la esfera) y su inversión.

3. El nudo ocho

Veamos ahora lo que sucede al invertir el nudo ocho. La parametrización que usaremos aquí está definida en $\mathbb{R}^4$ como

$$w(t) = \Big(\lambda \operatorname{sen} t - (1-\lambda)\operatorname{sen}(3t)\Big)\frac{1-A(t)^2}{1+A(t)^2},$$
$$x(t) = \Big(\lambda \cos t + (1-\lambda)\cos(3t)\Big)\frac{1-A(t)^2}{1+A(t)^2},$$
$$y(t) = \operatorname{sen}(2t)\frac{1-A(t)^2}{1+A(t)^2},$$
$$z(t) = \frac{2A(t)}{1+A(t)^2}, \tag{7}$$

donde $A(t) = \varepsilon \operatorname{sen} 4t$; $\varepsilon, \lambda \in [0, 1/2)$ y $t \in [0, 2\pi]$. Esta expresión está basada en el trabajo de Henry Segerman, François Guŕitaud y Saul Schleimer Segerman (2016). Al igual que los nudos tóricos, esta se trata de una inmersión en la 3-esfera S^3. El tipo de simetría de este nudo en el espacio tridimensional es de orden 2. Esta parametrización tiene todas las simetrías posibles de cualquier parametrización del nudo ocho (Segerman, 2016, p. 169).

Para poder utilizar la parametrización definida en (7), necesitamos proyectarla al espacio $\mathbb{R}^3$. Consideremos la proyección estereográfica

$$\Sigma : S^3 \setminus \{(0,0,0,1)\} \to \mathbb{R}^3, \tag{8}$$
$$\Sigma(w,x,y,z) = \left(\frac{w}{1-z}, \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right). \tag{9}$$

Definamos las funciones

$$v_1(t) = \lambda \operatorname{sen} t - (1-\lambda)\operatorname{sen}(3t),$$
$$v_2(t) = \lambda \cos t + (1-\lambda)\cos(3t),$$
$$v_3(t) = \operatorname{sen}(2t).$$

Entonces, el punto en S^3 es

$$\big(w(t), x(t), y(t), z(t)\big) = \\ = \left(\frac{1-A(t)^2}{1+A(t)^2}v_1(t), \frac{1-A(t)^2}{1+A(t)^2}v_2(t), \frac{1-A(t)^2}{1+A(t)^2}v_3(t), \frac{2A(t)}{1+A(t)^2}\right).$$

Calculemos el denominador

$$1 - z(t) = 1 - \frac{2A(t)}{1+A(t)^2} = \frac{1+A(t)^2-2A(t)}{1+A(t)^2} \\ = \frac{\big(1-A(t)\big)^2}{1+A(t)^2}.$$

Por lo tanto, la imagen estereográfica

$$\big(X(t), Y(t), Z(t)\big) = \Sigma\big(w(t), x(t), y(t), z(t)\big)$$

satisface

$$X(t) = \frac{w(t)}{1-z(t)} = \frac{\dfrac{1-A(t)^2}{1+A(t)^2}v_1(t)}{\dfrac{\big(1-A(t)\big)^2}{1+A(t)^2}}$$

$$= \frac{1-A(t)^2}{(1-A(t))^2}\, v_1(t) = \frac{1+A(t)}{1-A(t)}\, v_1(t),$$

$$Y(t) = \frac{x(t)}{1-z(t)} = \frac{1+A(t)}{1-A(t)}\, v_2(t),$$

$$Z(t) = \frac{y(t)}{1-z(t)} = \frac{1+A(t)}{1-A(t)}\, v_3(t).$$

Sean $\varepsilon, \lambda \in [0, 1/2)$. Entonces, definimos la parametrización del nudo ocho como

$$\vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}(t) = \frac{1+A(t)}{1-A(t)} \Big(v_1(t), v_2(t), v_3(t)\Big), \qquad (10)$$

donde $t \in [0, 2\pi]$, y $A(t) = \varepsilon \operatorname{sen}(4t)$.

De aquí en adelante, usaremos los valores $\varepsilon = {}^{16}/_{100}$ y $\lambda = {}^{25}/_{100}$, a menos que se indique de otra forma. La inversión de este nudo será igualmente un nudo ocho. Esto se puede apreciar en las figuras 16 y 17, en donde hemos incluido un factor de dilatación $\sigma = {}^{3}/_{2}$ para que la inversión quede dentro de la esfera.

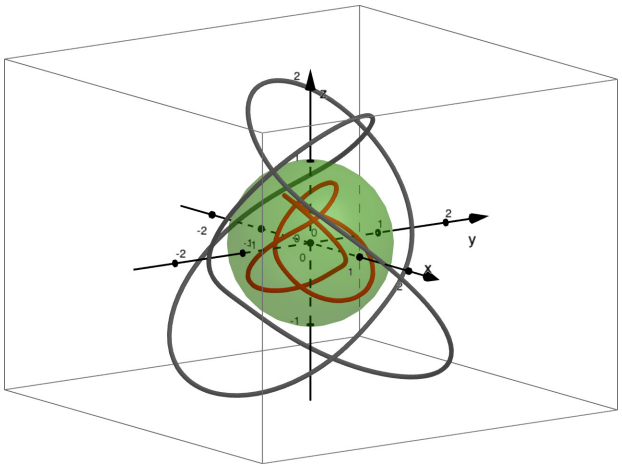


Figura 16. El nudo ocho $\frac{3}{2}\vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}(t)$ y su inversión, en el interior de la esfera.

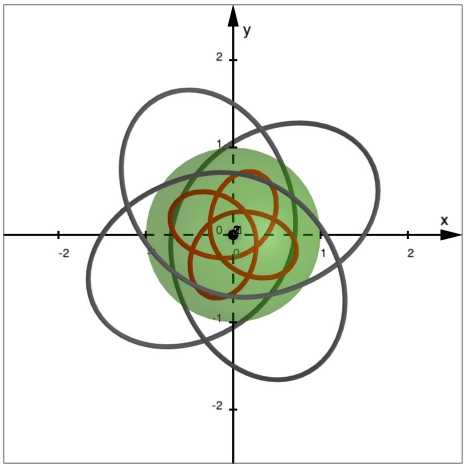


Figura 17. El nudo ocho $\frac{3}{2}\vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}(t)$ y su inversión. Vista en el plano xy.

Observemos que $\frac{3}{2}\vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$. Es decir, el nudo $\frac{3}{2}\vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}(t)$ pasa por el punto $\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$ cuando $t = \frac{\pi}{2}$. Esto implica que el nudo ocho pasa por el origen cuando es trasladado con el vector $\vec{u} = \left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$ y su inversión será nuevamente un nudo ocho, pero cuyos extremos se extienden al infinito, como se aprecia en las figuras 18 y 19.

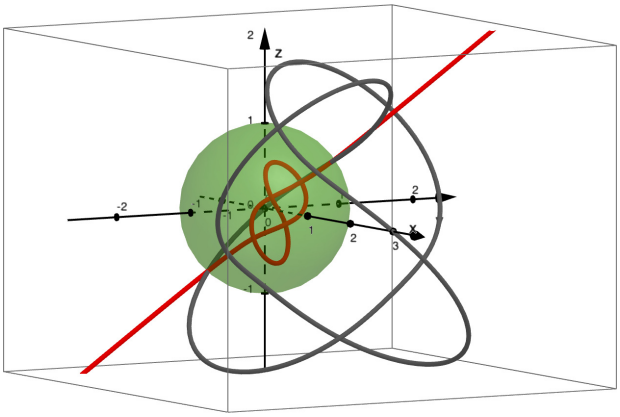


Figura 18. El nudo ocho $\frac{3}{2}\vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}(t)$ trasladado con el vector $\vec{u} = \left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$ y su inversión, en el interior de la esfera.

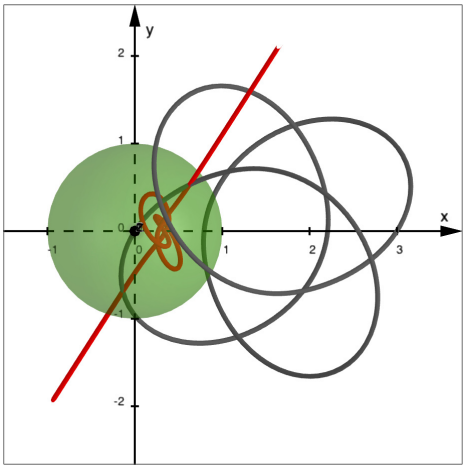


Figura 19. Vista en el plano xy del nudo $\frac{3}{2}\vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}(t)$ trasladado con el vector $\vec{u} = \left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$ y su inversión.

1. *Inversión de la superficie del nudo ocho*

Finalmente, podemos utilizar la parametrización (10) para obtener una superficie del nudo ocho definida como una superficie tubular. Esto es

$$\vec{f}(u,v) = \vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}(u) + \\ + \frac{1}{4}\Big(\cos v\, \vec{N}(u) + \operatorname{sen} v\, \vec{B}(u)\Big), \qquad (11)$$

donde

$$\vec{T}(u) = \frac{\vec{r}'_{(\varepsilon,\lambda)}(u)}{\|\vec{r}'_{(\varepsilon,\lambda)}(u)\|}, \quad \vec{N}(u) = \frac{\vec{T}'(u)}{\|\vec{T}'(u)\|},$$

y $\vec{B}(u) = \vec{T}(u) \times \vec{N}(u)$ son los vectores *unitarios tangente*, *normal* y *binormal*, respectivamente. Aquí, el símbolo «×» denota el *producto vectorial* en $\mathbb{R}^3$. El factor $1/4$, en el segundo término de (11), garantiza que la superficie no se interseque a sí misma en ninguna parte.

Dado que el cálculo de las componentes de esta superficie es una tarea sumamente laboriosa, hemos recurrido a Python para agilizar el proceso. El código fuente se puede consultar en Ponce Campuzano (2025b). Las figuras 20 y 21 muestran la superficie del nudo ocho definida por la fórmula (11).

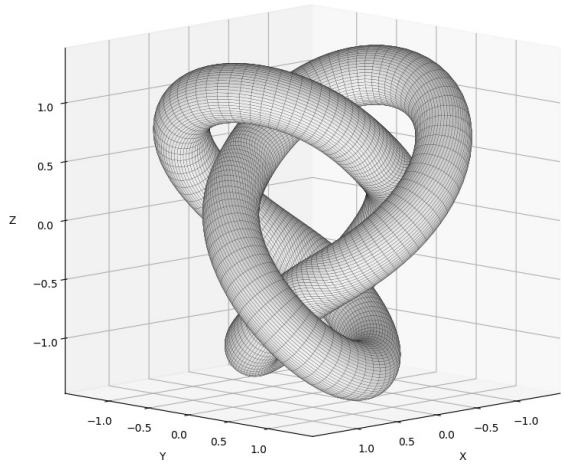


Figura 20. Superficie del nudo ocho $\vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}(t)$.

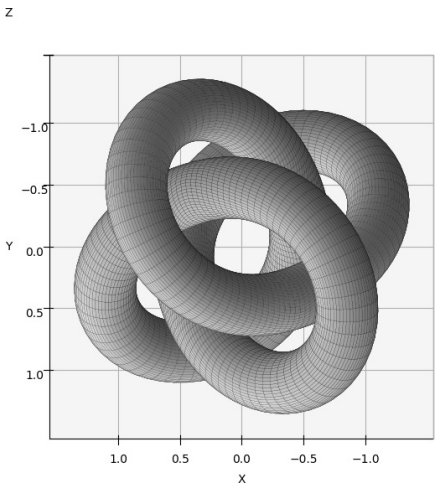


Figura 21. Vista en el plano xy de la superficie del nudo ocho.

Con Python también podemos graficar fácilmente la inversión, la cual también resulta ser una superficie de nudo ocho, como se muestra en las figuras 22 y 23.

Ahora, notemos que

$$\vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}(t)\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1,0,0).$$

Dado que esta es la curva base con la que se define la superficie tubular del nudo ocho (11), al trasladarla con el vector $\vec{u} = (-1,0,0)$, el origen se encontrará en el interior de dicha superficie. Consecuentemente, la inversión de $\vec{f}$ envolverá al origen y su interior se encontrará el nudo ocho, como se muestra en la figura 24. Podríamos describir a esta superficie como un toro con un nudo ocho en su interior.

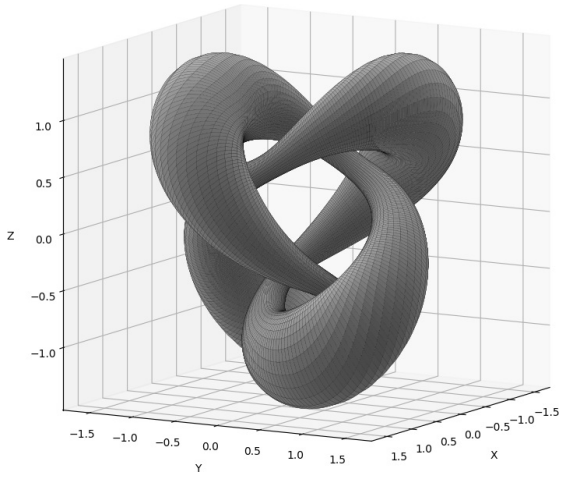


Figura 22. Inversión de la superficie del nudo ocho $\vec{r}_{(\varepsilon,\lambda)}(t)$.

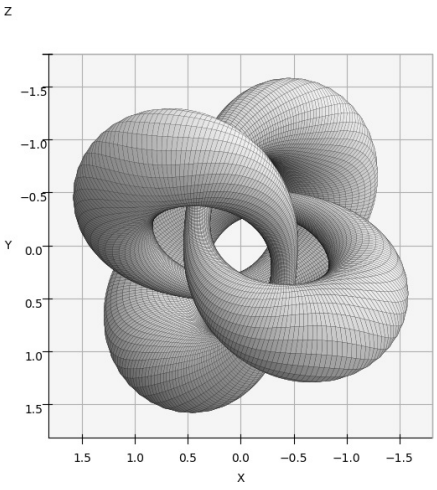


Figura 23. Vista en el plano xy de la inversión de la superficie del nudo ocho.

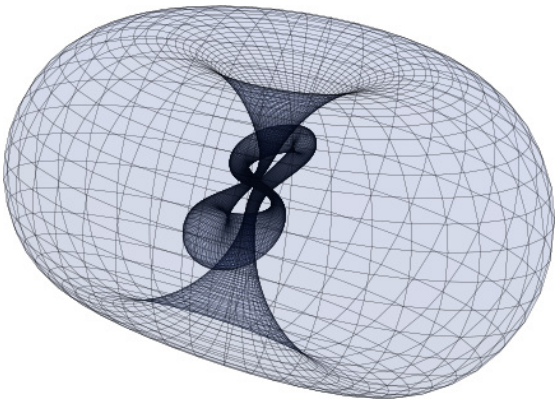


Figura 24. Inversión de la superficie del nudo ocho $\vec{f}$.

2. *Una parametrización de la superficie del nudo y su inversión*

Si bien Python resulta ser una gran herramienta para calcular la superficie tubular a partir de la curva paramétrica (10), lo ideal sería poder dar una forma explícita de la superficie del nudo. Esto es posible si fijamos el valor de $\lambda = 0$ en la ecuación (10) e introducimos combinaciones lineales de funciones trigonométricas. Después de una meticulosa exploración numérica y analítica, hemos obtenido una parametrización de la superficie del nudo ocho definida como

$$\vec{r}(u,v) = X(u,v)\vec{i} + Y(u,v)\vec{j} + Z(u,v)\vec{k}, \qquad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} X(u,v) &= \operatorname{sen}(3u)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(v)\right)\frac{\varepsilon\operatorname{sen}(4u)+1}{\varepsilon\operatorname{sen}(4u)-1} \\ Y(u,v) &= \cos(3u)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(v)\right)\frac{\varepsilon\operatorname{sen}(4u)+1}{\varepsilon\operatorname{sen}(4u)-1} \\ Z(u,v) &= \frac{1}{3}\cos(v) - \operatorname{sen}(2u)\frac{\varepsilon\operatorname{sen}(4u)+1}{\varepsilon\operatorname{sen}(4u)-1} \end{aligned} \qquad (13)$$

y $u, v \in [0, 2\pi]$.

Las figuras 25 y 26 muestran la superficie para $\varepsilon = {}^{16}/_{100}$.

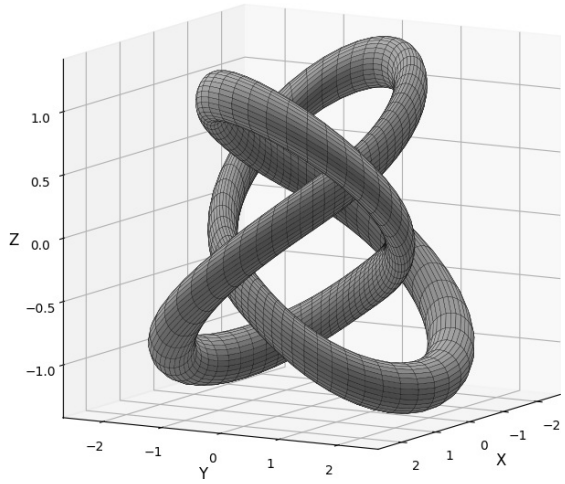


Figura 25. Superficie del nudo ocho simplificada con $\varepsilon = {}^{16}/_{100}$.

Con ayuda de software, encontramos el vector $\vec{u} = \left(-\frac{3}{2}, 0, 0\right)$ para trasladar la superficie del nudo ocho definida en (12). De igual manera, su inversión envuelve al origen y en su interior se encuentra el nudo ocho, como se muestra en la figura 27.

Para apreciar mejor este resultado, la figura 28 muestra una vista desde el interior de la inversión. También hemos incluido el nudo ocho original dentro de la 2-esfera S^2. En este caso, primero incluimos un factor de dilatación $\sigma = {}^{2}/_{10}$ y después trasladamos con el vector $\vec{v} = \left(-\frac{3}{10}, 0, 0\right)$.

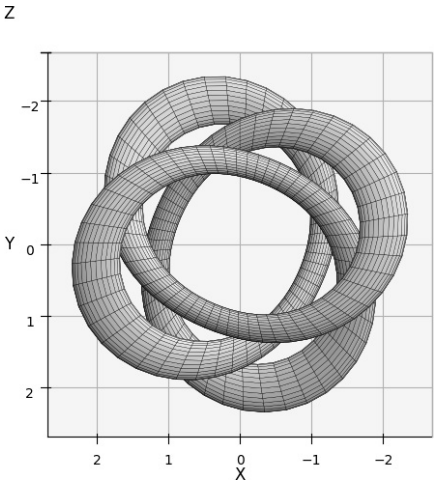


Figura 26. Superficie del nudo ocho simplificada, vista en el plano xy.

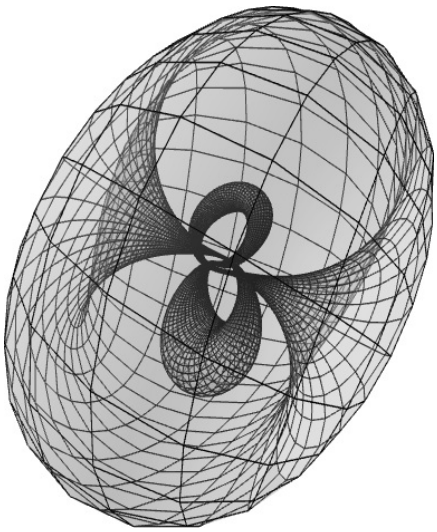


Figura 27. La inversión de $\vec{r}$ con $\varepsilon = {}^{16}/_{100}$.

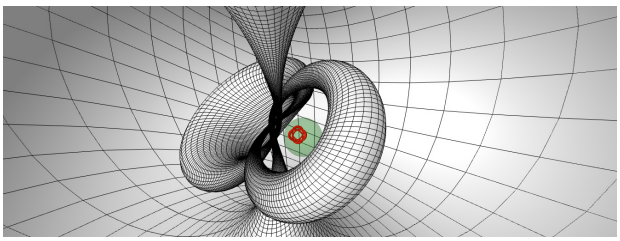


Figura 28. Vista interior de la inversión de $\mathbf{r}$ con $\varepsilon = {}^{3}/_{10}$.

Comentarios finales

La geometría inversiva, tanto en el plano como en el espacio, constituye un ejemplo notable de cómo una transformación simple en su definición puede generar una rica estructura matemática con profundas implicaciones geométricas y topológicas. Hemos

mostrado cómo la inversión permite establecer correspondencias entre rectas y circunferencias, unificando bajo un mismo marco conceptual objetos que en la geometría euclidiana se consideran distintos.

La extensión del concepto de inversión al espacio tridimensional muestra un gran potencial como herramienta de análisis geométrico. En particular, la inversión esférica conserva propiedades angulares y permite estudiar configuraciones espaciales desde perspectivas complementarias. Por ejemplo, el análisis de la inversión del nudo trébol y del nudo ocho muestra cómo esta transformación puede aplicarse no solo a curvas, sino también a objetos topológicos más complejos, proporcionando nuevas representaciones visuales y analíticas que enriquecen la comprensión de sus propiedades. En particular, la inversión de dichos nudos produce lo que podríamos describir como toros con nudos incrustados, los cuales tienen una relación muy cercana a las representaciones geométricas de complementos de nudos encontradas en la literatura, véase por ejemplo Segerman (2016, p. 136-138) y Rolfsen (2003, p. 106). Este enfoque ofrece una perspectiva geométrica intuitiva sobre la teoría de nudos y podría extenderse a otros nudos y superficies.

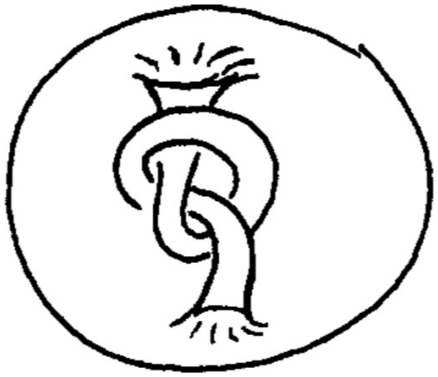


Figura 29. Un boceto del complemento del nudo trébol por Dale Rolfsen (1976).

Finalmente, cabe señalar que el estudio computacional y visual de la inversión, mediante software de geometría dinámica y herramientas de modelado tridimensional, constituye un terreno fértil para la enseñanza y la investigación. En GeoGebra, es posible explorar de forma interactiva la inversión de nudos (véase Ponce Campuzano, 2025a), mientras que en Ponce Campuzano (2025b) se presenta un conjunto de aplicaciones para examinar dinámicamente la inversión de las superficies tubulares asociadas a dichos nudos, utilizando WebGL en tiempo real. Estas representaciones permiten vincular la abstracción teórica con la intuición geométrica, abriendo nuevas posibilidades para la exploración de transformaciones inversivas en contextos tanto educativos como científicos.

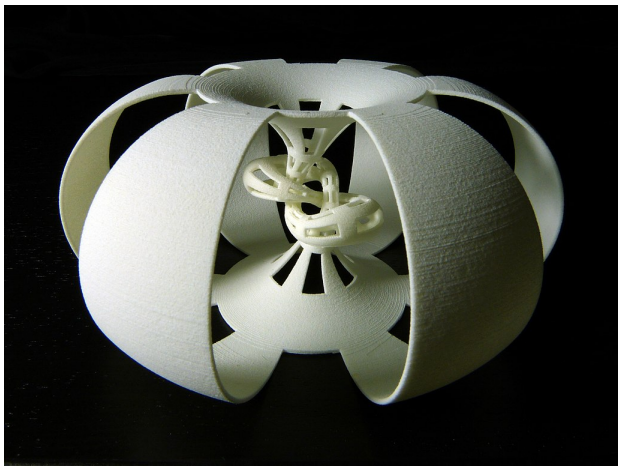


Figura 30. Complemento del nudo ocho, por Henry Segerman (2016).

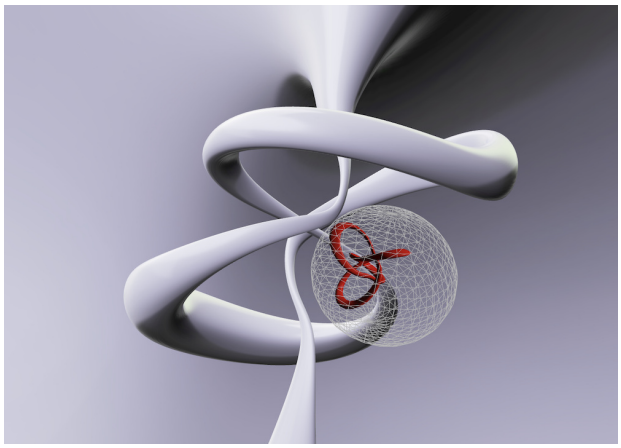


Figura 31. Vista interior de la inversión nudo ocho, con el nudo original en el interior de la esfera. Imagen producida con Three.js.

Referencias bibliográficas

Coxeter, H. S. M. (1966). The inversive plane and hyperbolic space. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, *29*, 217-242. Consultado el 15-11-2025, en https://doi.org/10.1007/BF03016050

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry* (2.ª ed.). John Wiley & Sons.

Coxeter, H. S. M. (1971). The inversive plane and hyperbolic space. *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 310-321. Consultado el 15-11-2025, en https://www.jstor.org/stable/3482030

Coxeter, H. S. M. (1998). *Non-euclidean geometry* (6.ª ed.) [Original work published 1942]. The Mathematical Association of America.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press. Consultado el 15-11-2025, en https://archive.org/details/mathematicalthou0000unse

Möbius, A. F. (1855). Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung [Reprinted in *Werke* 2, 243–345]. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, *2*, 529-595.

Patterson, B. C. (1933). The origins of the geometric principle of inversion. *Isis*, *19*(1), 154-180.

Pérez García-Ortega, M. Á. (2024). La inversión circular en el plano. *Lva² (Elevados)*, *1*(2), 57-72. Consultado el 11-12-2025, en https://lva2.es/numero_2/

Ponce Campuzano, J. C. (2025a). *Inversion of knots* [Geogebra book]. Consultado el 11-12-2025, en https://www.geogebra.org/m/upyds3py

Ponce Campuzano, J. C. (2025b). *Inversion: Interactive applets*. Consultado el 15-11-2025, en https://www.dynamicmath.xyz/inversion

Rolfsen, D. (2003). *Knots and links* [Original work published 1976]. AMS Chelsea Publishing.

Segerman, H. (2016). *Visualizing mathematics with 3D printing*. Johns Hopkins University Press.

Thomson, W. (1847). Extraits de deux lettres adressées à M. Liouville. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, *12*, 265-290.

Yates, R. C. (1947). *Handbook on curves and their properties*. Edwards Brothers.

Fecha de recepción: *1 de noviembre, 2025.*
Fecha de aceptación: *27 de diciembre, 2026.*



Juan Carlos Ponce Campuzano (México, nov. 1979)

Licenciado en Matemáticas por la Universidad Autónoma del Estado de México en 2004. En 2013, obtuvo su doctorado en Matemática Educativa en el Centro de Investigación y Estudios Avanzado, Ciudad de México. Desde 2013 reside en Brisbane, Australia, en donde enseña matemáticas y trabaja en el diseño e integración de módulos de aprendizaje en línea y applets matemáticos interactivos. Actualmente, trabaja en la Escuela de Ciencia y Medioambiente de la Universidad de Griffith, Australia. Entre sus intereses profesionales, se incluyen el diseño y desarrollo de applets de matemáticas de código abierto y libros interactivos en línea. El lector puede conocer más sobre sus proyectos en jcponce.com.

✉ j.poncecampuzano@griffith.edu.au Universidad de Griffith, Australia



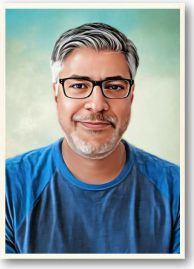
Ivana Carrizo Molina (San Juan –Argentina–, feb. 1972)

Inició su camino en el mundo de las matemáticas en la Universidad de San Juan, donde obtuvo la licenciatura en Matemáticas. Continuó su formación en la Universidad Nacional de San Luis, donde completó el posgrado de Magíster en Ciencias Matemáticas (2001, con distinción) y posteriormente el doctorado en Matemática (2008, con distinción).

Su trayectoria académica incluye estancias en la Universidad Técnica de Dinamarca (2001), la Universidad de Viena (2009) y una etapa como instructora en la Universidad de Linz (2012) y en el Instituto Courant de la Universidad de Nueva York (2014).

Desde 2017, desarrolla su actividad en la Universidad de Queensland (Australia), donde actualmente se desempeña como *Associate Lecturer* en la Escuela de Física y Matemáticas, coordinando y dictando cursos de cálculo, análisis y ecuaciones diferenciales. En 2022, amplió su formación con el programa intensivo *She Codes Plus*, incorporando herramientas de programación y tecnología aplicadas a la enseñanza.

✉ n.carrizomolina@uq.edu.au Universidad de Queensland, Australia



Miguel Ángel Maldonado Aguilar (México, oct. 1980)

Profesor en la Universidad Autónoma de Zacatecas y doctor en Matemáticas por el CINVESTAV-IPN. Su investigación abarca la topología algebraica, teoría geométrica de grupos y grupos modulares de superficies, con énfasis en la cohomología de espacios de configuración y las propiedades algebraicas de estos grupos. Su trabajo en la cohomología de los grupos modulares del plano proyectivo con puntos marcados ha permitido avanzar en el estudio de clases características de haces de superficies que fibran sobre el plano proyectivo. Además, ha explorado la relación entre los grupos modulares de superficies no orientables y los grupos de trenzas, así como su conexión con los espacios de configuración de superficies no orientables.

✉ mmaldonado@uaz.edu.mx Universidad Autónoma de Zacatecas, México.