Centre de masă

1. Sistem de două puncte materiale (*figura 1)*

“Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale este un punct fictiv a cărui masă este echivalentă cu masa totală a sistemului, şi care, din punct de vedere dinamic, descrie comportamentul de ansamblu al acestuia”.

Prin definiţie,

$$\overrightarrow{r_{Cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2}$$

Dacă

$\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_{Cm}}$ şi $\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_{Cm}}$, se obţine: $m_1\overrightarrow{d_1} + m_2\overrightarrow{d_2} = 0 \leftrightarrow \overrightarrow{d_2} = -\frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{d_1}$

Centrul de masă al unui sistem de două puncte materiale, este punctul situat pe segmentul determinat de cele două puncte şi care împarte acest segment într-un raport egal cu inversul raportului maselor celor două puncte.

Observaţii

- dacă $m_1 = m_2 \rightarrow \overrightarrow{d_2} = -\overrightarrow{d_1} \leftrightarrow C_m$ este mijlocul segmentului determinat de cele două puncte materiale cu mase egale;
- dacă se cunosc masa totală a sistemului de două puncte materiale(M), masa unuia dintre punctele materiale (m_1) şi poziţia acestuia faţă de centrul de masă ($\overrightarrow{d_1}$), atunci se poate determina poziţia celuilalt punct, de masă $M - m_1$, faţă de centrul de masă :

$$\overrightarrow{d_2} = -\frac{m_1}{M - m_1}\overrightarrow{d_1}$$

2. Segment de puncte materiale

În *figura 2*, punctul M este mijlocul lui [AB].

Dacă $S \in [AM]$ şi S’ este simetricul lui S faţă de M, atunci S’ $\in [MB] \subset [AB]$ şi centrul de masă al sistemului format din punctele S şi S’ este punctul M.

Se poate considera că $[AB] = \cup_{S\in[AM]}\{S, S'\}$; segmentul AB este format din toate perechile de puncte {S, S’}, ale căror centre de masă sunt în punctul M, deci şi centrul de masă al segmentului AB este punctul M.

Centrul de masă *al unui* ***segment de puncte materiale*** *este* ***mijlocul segmentului.***

3. Placă triunghiulară omogenă *(figura 3)*

$$B'C' \parallel BC, B' \in (AB), C' \in (AC)$$

$$\Delta\, AB'M' \sim \Delta\, ABM \rightarrow \frac{B'M'}{BM} = \frac{AM'}{AM}$$

$$\Delta\, AC'M' \sim \Delta\, ACM \rightarrow \frac{C'M'}{CM} = \frac{AM'}{AM}$$

$$\frac{B'M'}{BM} = \frac{C'M'}{CM} \leftrightarrow \frac{B'M'}{C'M'} = \frac{BM}{CM} (= 1) \rightarrow \mathbf{B'M' = C'M' \rightarrow M'\ este\ mijlocul\ lui\ [B'M']}$$

Placa triunghiulară omogenă ABC este formată din toate segmentele de puncte materiale ([B’C’]) paralele cu una dintre laturi ([BC]) şi care au extremităţile pe celelalte două laturi ([AB], respectiv [AC]).

Centrele de masă ale acestor segmente (mijloacele lor) se află pe mediana corespunzătoare laturii cu care acestea sunt paralele.

Centrul de masă al placii triunghiulare omogene de vârfuri A, B, C, se află pe mediana corespunzătoare laturii [BC].

Analog, se justifică poziţionarea centrului de masă al plăcii triunghiulare omogene pe celelalte două mediane.

Centrul de masă, G, al plăcii triunghiulare omogene se află la intersecţia medianelor sale.
Se poate demonstra că

$$\frac{GM}{AM}=\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{AG}{AM}=\frac{2}{3} \leftrightarrow \frac{GM}{AM}=\frac{1}{3}$$

Observaţie
Dacă placa triunghiulară se află într-un câmp gravitaţional omogen, atunci centrul său de masă coincide cu centrul său de greutate.

4. **Tetraedru omogen**. (*figura 4*)

$$A'' \in (VA), B'' \in VB, C'' \in VC.\ (A''B''C'') \parallel (ABC). \rightarrow$$
$$\rightarrow A''B'' \parallel AB, B''C'' \parallel BC, A''C'' \parallel AC.$$

Conform demonstraţiei anterioare, dacă M este mijlocul lui [BC], atunci M'' este mijlocul lui [B''C''].
În planul (VAM),

$$\Delta\, VG''M'' \sim \Delta\, VGM \ \rightarrow \ \frac{G''M''}{GM}=\frac{VG''}{VG}\ (1)$$

$$\Delta\, VG''A'' \sim \Delta\, VGA \ \rightarrow \ \frac{G''A''}{GA}=\frac{VG''}{VG}\ (2)$$

$$\text{Din (1) şi (2)} \rightarrow \frac{G''M''}{GM}=\frac{G''A''}{GA} \leftrightarrow \frac{G''M''}{G''A''}=\frac{GM}{GA}=\frac{1}{2} \rightarrow$$

$\rightarrow G''$ *este centrul de masă al triunghiului* $A''B''C''$.
Tetraedrul de vârf V şi bază triunghiul ABC este alcătuit din toate placile triunghiulare, Δ A''B''C'', care au vârfurile pe muchiile laterale ale tetraedrului, (A''∈(VA), B ∈ $(VB), C''$ ∈ (VC)) şi au laturile respectiv paralele cu laturile bazei tetraedrului .
Centrele de masă ale acestor plăci sunt situate pe segmentul determinat de **vârful** tetraedrului, **V**, şi **centrul de masă,G**, al **bazei tetraedrului**, Δ ABC. Acest segment, [VG], se numeşte **mediană a tetraedrului**.
Analog, se poate justifica poziţionarea centrului de masă al tetraedrului pe celelalte mediane ale tetraedrului.
Lemă
Medianele unui tetraedru sunt concurente. Punctul lor comun se află la trei pătrimi de vârf şi o pătrime de bază.
În *figura 5*, G_b este centrul de masă al bazei tetraedrului şi G_1 este centrul de masă al unei feţe laterale a tetraedrului, Δ VAC.
În triunghiul VBN,

$$\frac{NG_1}{NV}=\frac{NG_b}{NB}=\frac{1}{3} \rightarrow G_1G_b \parallel VB \rightarrow \Delta\, NG_1G_b \sim \Delta\, NVB \rightarrow \qquad \frac{G_1G_b}{VB}=\frac{NG_b}{NB}=\frac{1}{3}$$

$$G_1G_b \parallel VB \rightarrow \Delta\, G_bG_1G_t \sim \Delta\, VBG_t \rightarrow \frac{G_bG_t}{VG_t}=\frac{G_1G_t}{G_tB}=\frac{1}{3} \leftrightarrow \qquad \mathbf{\frac{VG_t}{VB_b}=\frac{BG_t}{BG_1}=\frac{3}{4}}.$$

Analog, se demonstrază că şi medianele tetraedrului, corespunzătoare celorlalte feţe laterale, sunt concurente cu mediana [VG_b] în punctul $\mathbf{G_t}$, care reprezintă **centrul de masă** al **tetraedrului VABCD.**

5. **Trunchi de tetraedru omogen** *(figura 6)*

În *figura 6*, se utilizează notaţiile:

- G_B : centrul de masă al bazei mari, Δ ABC;
- G_b : centrul de masă al bazei mici, Δ A"B"C";
- G_P : centrul de masă al piramidei mari, VABC
- G_p : centrul de masă al piramidei mici, VA"B"C";
- G_t : centrul de masă al trunchiului de piramidă ABCA"B"C"

Se vor folosi notaţiile:

- $\mathcal{V}_P$: volumul piramidei VABC;
- $\mathcal{V}_p$: volumul piramidei VA"B"C";
- $\mathcal{V}_t$: volumul trunchiului de piramidă ABCA"B"C";
- $k = \frac{A"B"}{AB} = \frac{VG_b}{VG_B}$.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{V}_t x &= \mathcal{V}_p g \\ \mathcal{V}_t &= (1-k^3)\mathcal{V}_P \\ \mathcal{V}_p &= k^3 \mathcal{V}_P \end{aligned}\right\} \to x = \frac{k^3}{1-k^3} g = \frac{k^3}{1-k^3} \cdot \frac{3}{4}\, \overline{G_B G_b} = \frac{3}{4} \cdot \frac{k^3(1-k)}{1-k^3} \overline{VG_B}$$

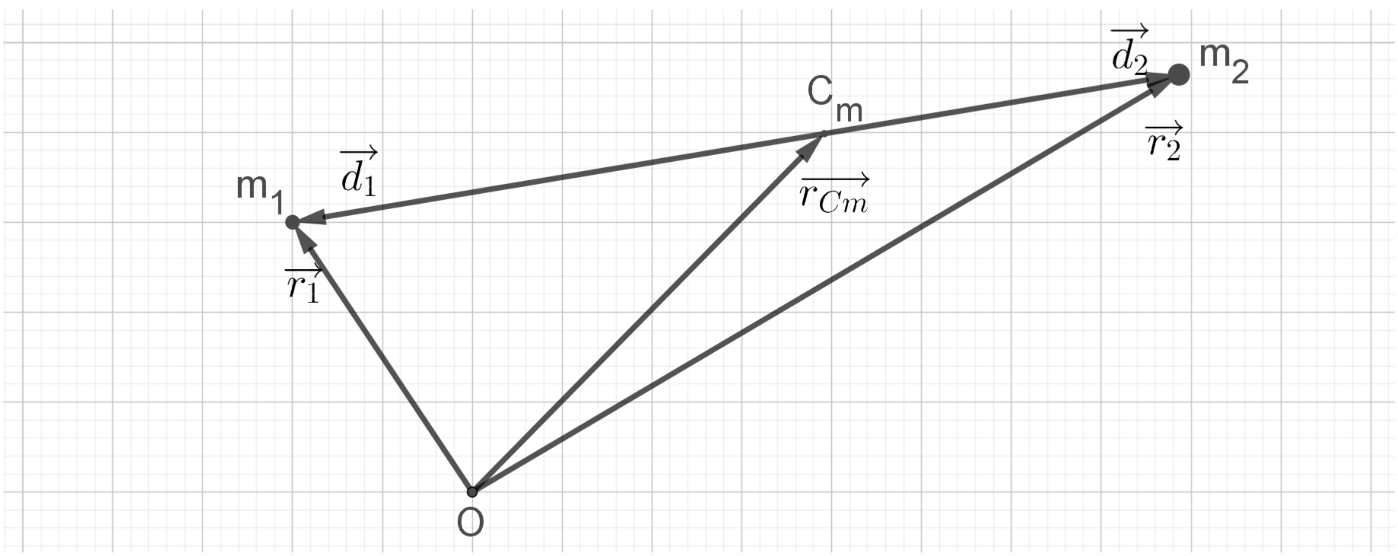
$$\overline{VG_t} = \overline{VG_P} + x = \frac{3}{4}\overline{VG_B} + x = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-k^4}{1-k^3}\, \overline{VG_B}$$

$$\overline{G_B G_t} = \overline{VG_B} - \overline{VG_t} \to \boldsymbol{\overline{G_B G_t}} = \boldsymbol{\left(1 - \frac{3(1-k^4)}{4(1-k^3)}\right) \frac{\overline{G_B G_b}}{1-k}}$$

Observaţii

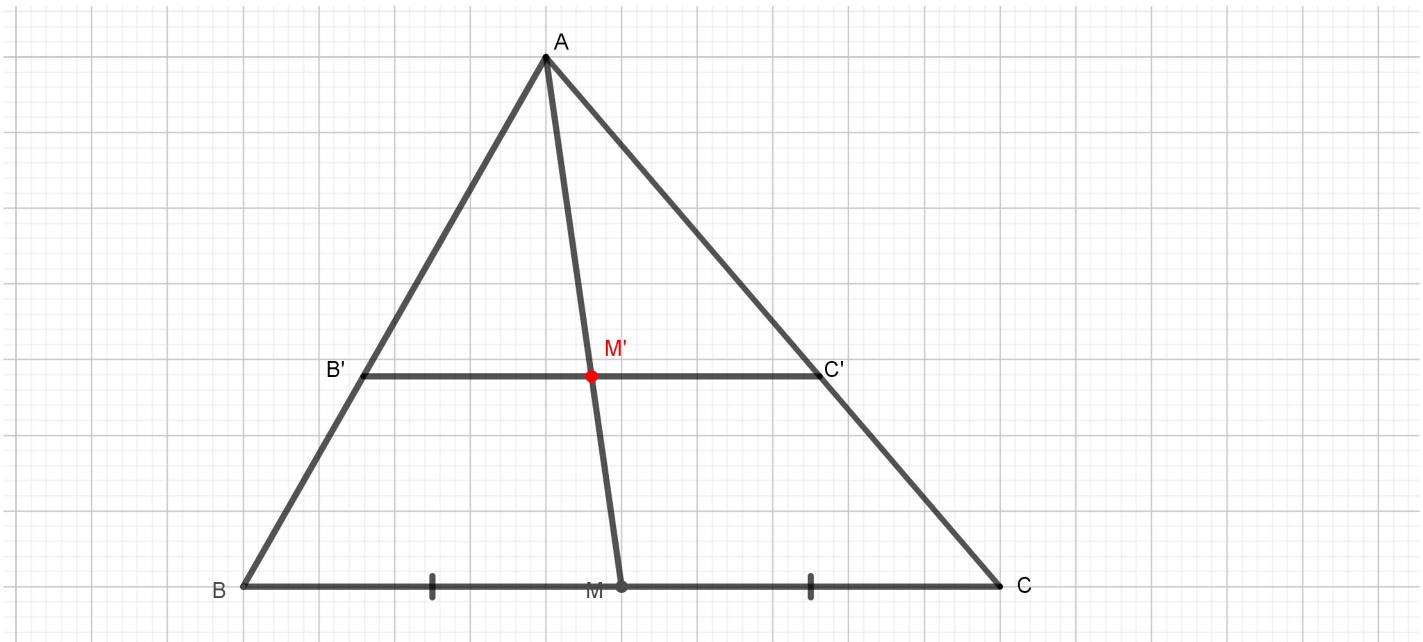
1. Toate figurile din acest material au fost realizate cu ajutorul GeoGebra.
2. În *figura 5*, punctul G_t (centrul de masă al trunchiului de tetraedru ABCA"B"C") s-a construit astfel:
   a. s-au construit centrele de masă ale bazelor, punctele G_B şi G_b;
   b. s-a definit numărul k: „ *k = Nume_Segment(A",B")/Nume_Segment(A,B)*";
   c. s-a definit numărul r: „ *r = (1−(3(1−k^4))/(4(1−k^3))/(1−k)*"
   d. s-a definit punctul G_t: „G_t = *Dilatare*(G_b, *r*, G_B)"

Ovidiu Faloba

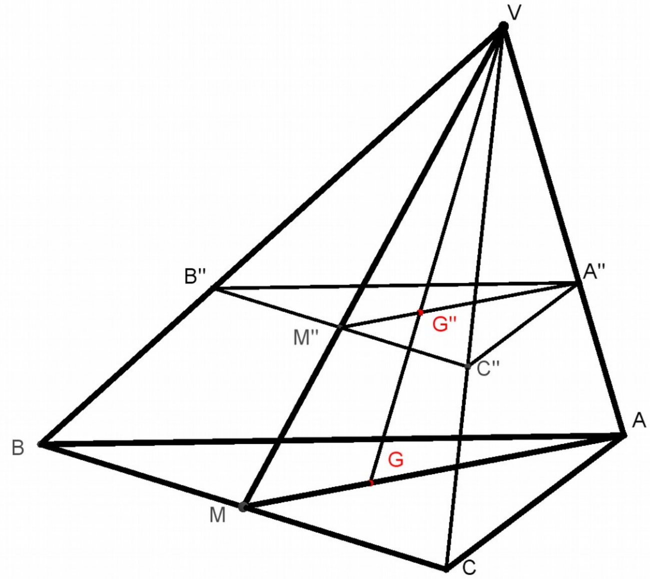


centrul de masă a două puncte materiale

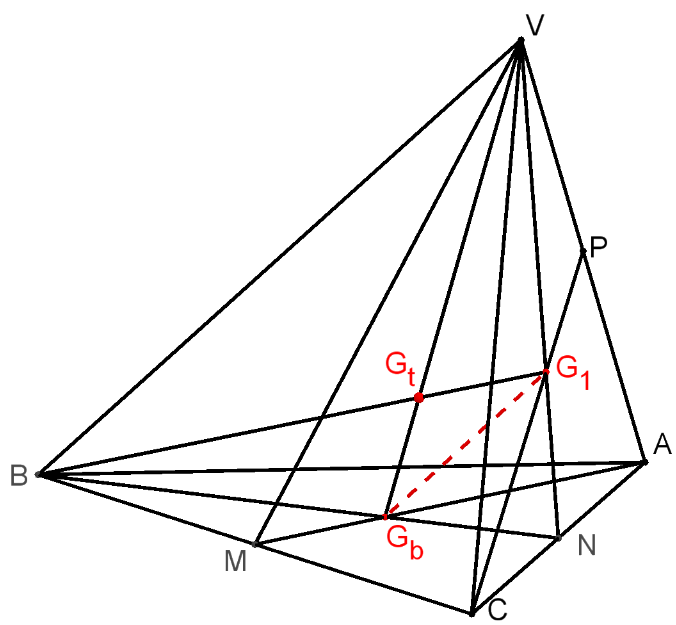
centrul de masă al unui segment



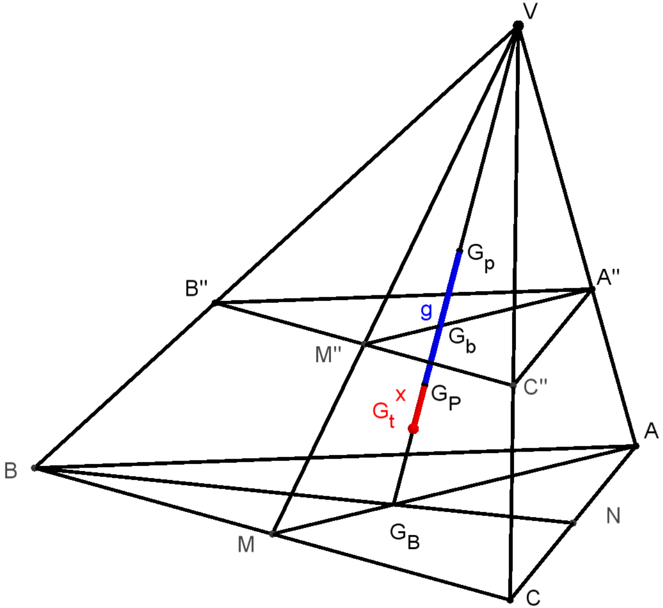
centrul de masă al unui triunghi



centrul de masă al unui tetraedru



concurenţa medianelor unui tetraedru



centrul de masă al trunchiului de tetraedru