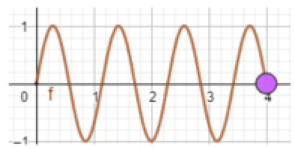
Actividad Base

1. **Actividad de base.**

 1.1. En la imagen siguiente se muestra la gráfica en GeoGebra de una función

$$f(x) = sen(ax), \quad 0 \le x \le b, \quad a, b \in \mathbb{R} \ (b = 4 \ para\ el\ ejemplo)$$

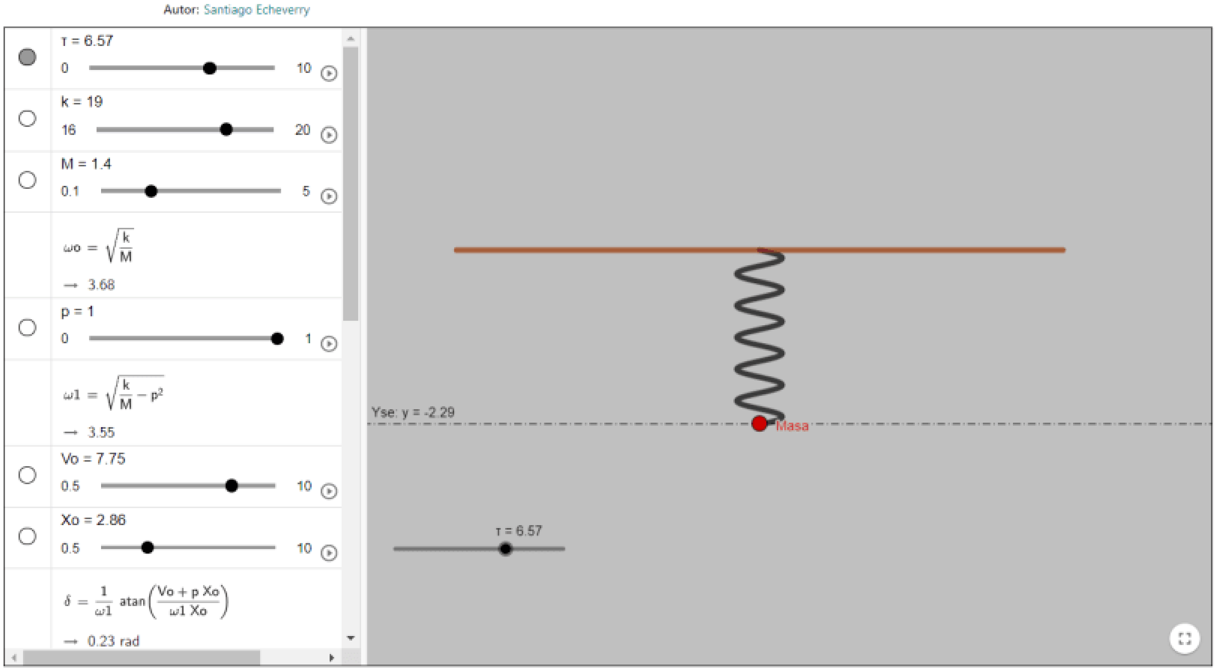


La gráfica de 7 picos, en este caso, la identificaremos como un resorte de 7 *bucles*. El resorte está anclado en el origen y tiene adherida en el extremo del último bucle una masa, representada por un punto configurado de tamaño grande en GeoGebra. Al asociar el número b a un deslizador se podrá simular por animación un sistema masa-resorte en movimiento.
Construya un aplicativo en GeoGebra con las características siguientes:
El usuario selecciona: i) os valores de la masa, la constante de elasticidad y el número de bucles del resorte; ii) los datos iniciales de un PVI de segundo orden asociado al sistema masa resorte libre no amortiguado; iii) a constante de amortiguación y los datos iniciales de un PVI de segundo orden asociado al sistema masa resorte libre amortiguado.

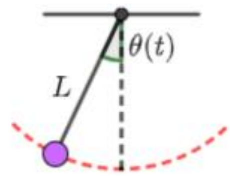
El aplicativo entrega como salida la animación del sistema masa resorte, en posición vertical, asociando al valor del extremo b del intervalo la función solución del PVI de segundo orden correspondiente.

Sistema masa resorte

Autor: Santiago Echeverry



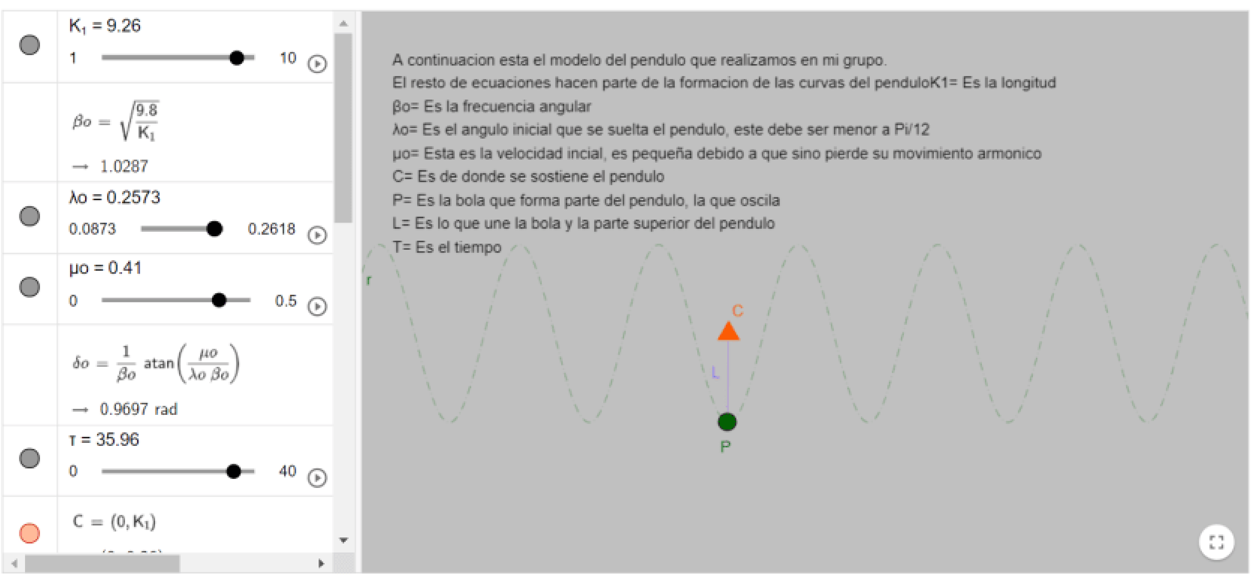
1.2. En la imagen siguiente se muestra un punto parametrizado en GeoGebra de tal manera que recorre un arco de circunferencia de radio L, para simular un péndulo anclado al origen de coordenadas.



Utilice este tipo de construcción para modelar en GeoGebra el movimiento de un péndulo, asociando al ángulo $\theta(t)$ la función solución de un PVI de segundo orden relacionado con este tipo de movimiento oscilatorio. Debe incluir en su modelo las opciones de variar la información pertinente al problema.

Sistema del pendulo HT3

Autor: Juan David Ospina



Selección de ejercicios y problemas del texto guía

Sección 3.1: 27, 32, 51, 53, 55.
Sección 3.2: 19, 23, 31, 35, 36, 42.
Sección 3.3: 19, 39, 42, 55, 58.
Sección 3.4: 3, 4, 13, 14, 22, 23.
Sección 3.5: 5, 19, 25, 39.

SECCION 3.1

27 Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + py' + qy = f(x)$, y sea y_c una solución de su ecuación homogénea asociada.

Muestre que $y = y_c + y_p$ es una solución de la ecuación no homogénea dada.

R: y_p satisface $y_p'' + py_p' + qy_p = f(x)$

y_c satisface $y_c'' + py_c' + qy_c = 0$

El problema establece que

$y(x) = y_c + y_p$ satisface

$y'' + py + qy = f(x)$

Tenemos que

$$y' = y_c' + y_p' \longrightarrow y'' = y_c'' + y_p''$$

Reemplazamos en la ecuación

$$(y_c'' + y_p'') + p(y_c' + y_p') + q(y_c + y_p) = f(x)$$

$$y_c'' + y_p'' + py_c' + py_p' + qy_c + qy_p = f(x)$$

$$(y_c'' + py_c' + qy_c) + (y_p'' + py_p' + qy_p) = f(x)$$

$$0 + f(x) = f(x)$$

$$\boxed{f(x) = f(x)}$$

32 Sean y_1 y y_2 dos soluciones de $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$ en un intervalo abierto I, donde A, B y C son continuas y $A(x)$ nunca es cero. (**a**) Sea $W = W(y_1, y_2)$. Demuestre que

$$A(x)\frac{dW}{dx} = (y_1)(Ay_2'') - (y_2)(Ay_1'').$$

Posteriormente sustituya Ay_2'' y Ay_1'' en la ecuación diferencial original para mostrar que

$$A(x)\frac{dW}{dx} = -B(x)W(x).$$

(**b**) Resuelva esta ecuación de primer orden para deducir la **fórmula de Abel**

$$W(x) = K \exp\left(-\int \frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right),$$

donde K es una constante. (**c**) ¿Por qué la fórmula de Abel implica que el wronskiano $W(y_1, y_2)$ es cero o diferente de cero en todo el intervalo (como se estableció en el teorema 3)?

a. Wronskiano de las dos soluciones

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad \boxed{W = y_1 y_2' - y_1' y_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dx} = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - (y_1'' y_2 + y_1' y_2')$$

$$\frac{dw}{dx} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

$$A(x) \cdot \frac{dw}{dx} = A(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) = A y_1 y_2'' - A y_1'' y_2$$

$$= y_1 A y_2'' - A y_1'' y_2$$

y_1 y y_2 satisfacen la ecuacion diferencial

$$A(x) y'' + B(x) y' + P(x) y = 0$$

$$\Rightarrow A(x) y'' = -B(x) y' - P(x) y \text{; con lo cual}$$

$$\Rightarrow A(x) y_1'' = -B(x) y_1' - P(x) y_1$$

$$\Rightarrow A(x) y_2'' = -B(x) y_2' - P(x) y_2$$

Reemplazamos este resultado en la expresion.

$$\Rightarrow A(x) \cdot \frac{dw}{dx} = y_1(-B(x) y_2' - P(x) y_2) - (-B(x) y_1' - P(x) y_1) y_2$$

$$= -Bx\, y_1 y_2' - \cancel{P(x) y_1 y_2} + B(x) y_1' y_2 + \cancel{P(x) y_1 y_2}$$

$$= B(x)(-y_1 y_2' + y_1' y_2)$$

$$= -B(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2)$$

$$= -B(x)\, w(x)$$

b. $A(x) \neq 0 \quad \frac{dw}{dx} = -\frac{B(x)}{A(x)}\, w(x)$

$$\int \frac{dw}{w} = \int -\frac{B(x)}{A(x)}\, dx$$

$$\ln w = -\int \frac{B(x)}{A(x)}\, dx + c$$

$$e^{\ln w} = e^{-\int \frac{B(x)}{A(x)} dx + c} = e^{-\int \frac{B(x)}{A(x)} dx}\, e^{c}$$

$$w(x) = K\, e^{-\int \frac{B(x)}{A(x)} dx}$$

51 La **ecuación de Euler** de segundo orden es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \tag{22}$$

donde a, b, c son constantes. (**a**) Verifique que si $x > 0$, entonces la sustitución $v = \ln x$ transforma la ecuación (22) en la ecuación lineal de coeficientes constantes

$$a\frac{d^2y}{dv^2} + (b-a)\frac{dy}{dv} + cy = 0 \tag{23}$$

con variable independiente v. (**b**) Si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica en (23) son reales y distintas, concluya que la solución general de la ecuación de Euler en (22) es $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$.

a. $v = \ln x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}\,\dfrac{d\theta}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\,\frac{1}{x}$$

$$\boxed{x\,\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\cdot\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$$

$$1\cdot\frac{dy}{dx} + x\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dv}\left(\frac{dy}{dv}\right)\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + x\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$x\,\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}$$

$$x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2} - x\,\frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{dv}}$$

Remplazamos las expresiones en la ecuacion de euler

$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ obtenemos la ecuación

de coeficientes constantes:

$$a\left(\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta}\right) + b\left(\frac{dy}{d\theta}\right) + cy = 0$$

$$a\frac{d^2y}{d\theta^2} - a\frac{dy}{d\theta} + b\frac{dy}{d\theta} + cy = 0$$

$$a\frac{d^2y}{d\theta^2} + (b-a)\frac{dy}{d\theta} + cy = 0$$

b) La ecuación auxiliar correspondiente

$ar^2 + (b-a)r + c = 0$ tiene raices reales distintas.

asi la solución sera $y(\theta) = C_1 e^{-4\theta} + C_2 e^{3\theta}$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-4\ln x} + C_2 e^{3\ln x}$$

$$= C_1 e^{\ln x^{-4}} + C_2 e^{\ln x^3}$$

$$= C_1 x^{-4} + C_2 x^3$$

53) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$ (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dv} \frac{1}{x^2}$$

reemplazamos en la ecuacion Principal (1)

$$\cancel{x^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} - \frac{dy}{dv} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}}\right) + 2\cancel{x}\left(\frac{dy}{dv} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) - 12y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dv} + 2\frac{dy}{dv} - 12y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dv} - 12y = 0$$

Se saca la ecuacion auxiliar

$r^2 + r - 12 = 0$ $\quad\quad$ $r_1 = -4$

$(r+4)(r-3) = 0$ $\quad\quad$ $r_2 = 3$

Usando los teoremas

$$y(v) = C_1 e^{r_1 v} + C_2 e^{r_2 v}$$

$$y(v) = C_1 e^{-4\ln x} + C_2 e^{3v}$$

$$y(x) = C_1 x^{-4} + C_2 x^3$$

55 $x^2y'' + xy' = 0$

Usando el resultado obtenido en el ejercicio 51 a traves de la sustitucion $\vartheta = \ln x$ que la ecuacion de euler

$x^2y'' + xy' = 0$; $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$

Se transforma en $\frac{d^2y}{d\vartheta^2} = 0$

Con la ecuación $r^2 = 0$ tiene raices

$r_1 = r_2 = 0 \Rightarrow y(\vartheta) = C_1 e^{0 \cdot \vartheta} + C_2 \vartheta e^{0 \cdot \vartheta}$

$y(\vartheta) = C_1 + C_2 \vartheta$

$y(x) = C_1 + C_2 \ln x$

SECCION 3.2

En los problemas 13 al 20 se proporciona una ecuación lineal homogénea de tercer orden y tres soluciones linealmente independientes. Encuentre una solución particular que satisfaga las condiciones iniciales dadas.

Seccion 3,2

19) $x^3 y^{(3)} - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ PVI : $y(1) = 6$

$y'(1) = 14$

$y''(1) = 22$

Sabemos que $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ son soluciones linealmente independiente de la ecuacion homogenea.

Sol general: $y(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 \longrightarrow A + B + C = 6$

$y'(x) = A + 2Bx + 3Cx^2 \longrightarrow A + 2B + 3C = 14$

$y''(x) = 2B + 6Cx \longrightarrow 2B + 6C = 22$

Usando recursos tecnologicos: $\boxed{A = 1, B = 2, C = 3}$

La solucion que satisfaga al PVI es:

Sol Particular: $x + 2x^2 + 3x^3$

En los problemas 21 al 24 se proporcionan: una ecuación diferencial no homogénea, una solución complementaria y_c y una solución particular y_p. Desarrolle una solución que satisfaga las condiciones iniciales dadas.

23) $y'' - 2y' - 3y = 6$ PVI = $y(0) = 3$

↳ EDO NO HOMOGENEA $y'(0) = 11$

Como se resuelve?

$y(x) = y_c(x) + y_p \rightarrow$ Particular

↓

sol de homogenea asociada

$R_1 = 3$

$R_2 = -1$

Auxiliar: $r^2 - 2r - 3 = 0$

$y_c(x) = Ae^{3x} + Be^{-1 \cdot x}$

sol de la no homogenea: $\underbrace{Ae^{3x} + Be^{-x}}_{y_c(x)} \underbrace{-2}_{y_p}$

Se necesita que la sol. general de la no homogenea satisfaga el PVI. $y(0)=3$, $y'(0)=11$

$y(x) = Ae^{3x} + Be^{-x} - 2 \longrightarrow y(0)=3 = A+B-2 = 3$

$y'(x) = 3Ae^{x} - B^{-x} \longrightarrow y'(0)=11 = 3A-B = 11$

$$\begin{array}{r} A + B = 5 \\ 3A - B = 11 \\ \hline 4A = 16 \end{array}$$

$A = 4 \longrightarrow$ se reemplaza en la primera ecuacion

$B + 4 = 5$

$B = 1$

La solucion al PVI de la ecuacion no homogenea $y'' - 2y' - 3y = 6$ es

$$y(x) = e^{-x} + 4e^{3x} - 2$$

31. Este problema indica por qué se pueden aceptar *sólo n* condiciones iniciales en una solución de una ecuación diferencial lineal de enésimo orden. (**a**) Dada la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0,$$

explique por qué el valor de $y''(a)$ se determina por los valores de $y(a)$ y $y'(a)$. (**b**) Pruebe que la ecuación

$$y'' - 2y' - 5y = 0$$

tiene una solución que satisface las condiciones

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \ \text{ y } \quad y''(0) = C$$

si y sólo si $C = 5$.

31)

A) $y'' + Py' + qy = 0$ (EDO de orden 2)

Esta admite una solucion $y = y(x)$ en un intervalo I si el PVI esta en el punto $x = a \in I$, entonces la ecuacion dada al inicio se puede pensar que es una ecuacion que satisface para todo $x \in I$:

$$y''(x) + Py'(x) + qy(x) = 0$$

si $x = a \in I$ $\quad y''(a) + Py'(a) + qy(a) = 0 \quad (2)$

Esta ecuacion relaciona las 3 cantidades $y(a)$, $y'(a)$, y $y''(a)$ porque P, q son coeficientes fijos.

$$xV''(x) + \left(2 + \frac{2x^2}{1-x^2}\right) V'(x) = 0$$

$$V''(x) + \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) V'(x) = 0$$

Cambio de variable : $U(x) = V'(x) \rightarrow U'(x) = V''(x)$

reemplazamos en lo anterior:

$$U'(x) + \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) U(x) = 0$$

$$\frac{dU}{dx} = -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) U$$

$$\frac{dU}{U} = -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) dx$$

$$\int \frac{dU}{U} = \int -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x^2}{1-x^2}\right) dx$$

$$\ln|U| = -2\ln(x) + \ln(1-x^2) + C$$

$$\ln U = \ln|x|^{-2} + \ln|1-x^2| = \ln\left|x^{-2}(1-x^2)\right|$$

$$\ln U = \ln(x^{-2}(1-x^2))$$

$$e^{\ln U} = e^{\ln(x^{-2}(1-x^2))}$$

$$U = x^{-2}(1-x^2) = x^{-2} - 1 \quad \text{pero } U(x) = V'(x)$$

$$V'(x) = x^{-2} - 1$$

$$V(x) = \int x^{-2} - 1 \, dx$$

$$V(x) = -x^{-1} - x$$

$$Y_2(x) = V(x) \cdot x = (-x^{-1} - x) \cdot x$$

$$= -1 - x^2$$

$$Y_2(x) = -(1 + x^2)$$

Tecnica reduccion de orden

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = 0$$

EDO de orden 2 lineal homogene

- Tendra en I dos sol. Independientes: $y_1(x)$
  $y_2(x)$

$\rightarrow y(x) = A y_1(x) + B y_2(x)$

35. De acuerdo con el problema 32 de la sección 3.1, el wronskiano $W(y_1, y_2)$ de dos soluciones de la ecuación de segundo orden

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

está dado por la fórmula de Abel

$$W(x) = K \exp\left(-\int p_1(x)\,dx\right)$$

para alguna constante K. Se puede probar que el wronskiano de n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación de enésimo orden

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

satisface la misma identidad. Pruebe esto para el caso de $n = 3$ como sigue: **(a)** La derivada de un determinante de funciones es la suma de los determinantes obtenidos por separado derivando los renglones del determinante original. Concluya que

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1^{(3)} & y_2^{(3)} & y_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

(b) Sustituya para $y_1^{(3)}$, $y_2^{(3)}$ y $y_3^{(3)}$ de la ecuación

$$y^{(3)} + p_1y'' + p_2y' + p_3y = 0,$$

y luego muestre que $W' = -p_1W$. La integración resulta en la fórmula de Abel.

35) $\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1^3 & y_2^3 & y_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1^3 & y_2^3 & y_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1^3 & y_2^3 & y_3^3 \end{vmatrix}$

Al tener dos renglones equivalentes

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1^{(3)} & y_2^{(3)} & y_3^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dW}{dx} = y_1 y_2' y_3^{(3)} + y_2 y_3' y_1^{(3)} + y_3 y_1' y_2^{(3)}$$
$$- y_3 y_2' y_1^{(3)} - y_2 y_1' y_3^{(3)} - y_1 y_3' y_2^{(3)}$$

Sacamos el Wronskiano para comprobarlo

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$W = y_1 y_2' y_3'' + y_2 y_3' y_1'' + y_3 y_1' y_2''$$
$$- y_3 y_2' y_1'' - y_2 y_1' y_3'' - y_1 y_3' y_2''$$

$$= y_1 (y_2' y_3'' - y_3' y_2'') + y_2 (y_3' y_1'' - y_1' y_3'')$$
$$+ y_3 (y_1' y_2'' - y_2' y_1'')$$

$$W' = y_1' (y_2' y_3'' - y_3' y_2'') + y_1 (y_2'' y_3'' + y_2' y_3^{(3)} - y_3'' y_2'' - y_3' y_2^{(3)})$$
$$+ y_2' (y_3' y_1'' - y_1' y_3'') + y_2 (y_3'' y_1'' + y_3' y_1^{(3)} - y_1'' y_3'' - y_1' y_3^{(3)})$$
$$+ y_3' (y_1' y_2'' - y_2' y_1'') + y_3 (y_1'' y_2'' + y_1' y_2^{(3)} - y_2'' y_1'' - y_2' y_1^{(3)})$$

$$= y_1 (y_2' y_3^{(3)} - y_3' y_2^{(3)}) + y_2 (y_3' y_1^{(3)} - y_1' y_3^{(3)})$$
$$+ y_3 (y_1' y_2^{(3)} - y_2' y_1^{(3)})$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1^{(3)} & y_2^{(3)} & y_3^{(3)} \end{vmatrix}$$

B) Ahora tomamos la ecuacion de abel

$$W' = y_1 y_2' \left(-P_1 y'' - P_1 y_3' - P_1 y_3\right) + y_2 y_3' \left(-P_1 y_1'' - P_1 y_1' - P_1 y_1\right) + y_3 y_1' \left(-P_1 y_2'' - P_1 y_2 - P_2 y_2\right) - y_3 y_2' \left(-P_1 y_1'' - P_1 y_1' - P_1 y_1\right) - y_2 y_1' \left(-P_1 y_3'' - P_1 y_2' - P_1 y_3\right) y_1 y_3' \left(-P_1 y_2'' - P_1 y_2 - P_3 y_2\right)$$

$$W' = -P_1 \left(y_1 y_2' y_3'' + y_2 y_3' y_1'' + y_3 y_1' y_2'' - y_3 y_2' y_1'' - y_2 y_1' y_3'' - y_1 y_3' y_2''\right)$$

$$W' = -P_1 W$$

$$\int \frac{dW}{W} = -\int P_1(x)\,dx$$

$$\ln W = -\int P_1(x)\,dx + C$$

$$W = k e^{-\int P_1(x)\,dx}$$

36 Admita que se conoce una solución $y_1(x)$ de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{18}$$

(en un intervalo I donde p y q son funciones continuas). El método de **reducción de orden** consiste en sustituir $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ en (18) e intentar determinar la función $v(x)$ tal que $y_2(x)$ sea una solución linealmente independiente de (18). Después de sustituir $y = v(x)y_1(x)$ en la ecuación (18), parta del hecho de que $y_1(x)$ es una solución para deducir que

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0. \tag{19}$$

Si se conoce $y_1(x)$, entonces (19) es una ecuación de variables separables que puede resolverse con facilidad por medio de la derivada $v'(x)$ de $v(x)$. Integrando $v'(x)$, se obtiene la función $v(x)$ deseada (no constante).

Sea $y_1(x)$ una solución conocida de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y + q(x)y = 0$;
lo cual significa que $y_1'' + p(x)y_1 + q(x)y_1 = 0$

Suponiendo que la segunda solución a la ecuación diferencial, tiene la forma $y_2 = v(x)y_1$ donde $v(x) \neq$ constante ya que y_1 y y_2 se asumen L.I.

$$y_2 = v(x)y_1$$

$$y_2' = v'(x)y_1 + v(x)y_1'$$

$$y_2'' = v''y_1 + v'y_1' + v'y_1' + vy_1'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

En la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Se obtiene

$$(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + P(x)(v'y_1 + vy_1') + Q(x)(vy_1) = 0$$

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + P(x)v'y_1 + P(x)vy_1' + Q(x)vy_1 = 0$$

Reagrupamos

$$v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)v'y_1 + vy_1'' + P(x)vy_1' + Q(x)vy_1 = 0$$

$$v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)v'y_1 + v(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1) = 0$$

$$v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)v'y_1 = 0$$

$$y_1(x) \neq 0 \Longrightarrow \text{solucion NO Trivial}$$

$$v''y_1 + \frac{2v'y_1'}{y_1} + P(x)v' = 0$$

$$v'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P(x)\right)v' = 0$$

Es una ecuación diferencial que permitirá encontrar el $v(x)$ ya que las funciones y_1 y $P(x)$ son conocidas.

Haciendo cambio de variable $v'(x) = U(x) \Rightarrow v'' = U'(x)$

$$U'(x) + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P(x) \right) U(x) = 0$$

Lo cual es una ecuación de variables separables para la variable $U(x)$:

$$\frac{dU}{dx} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + P(x) \right) U$$

$$\int \frac{dU}{U} = \int -\left(2\frac{y_1'}{y_1} + P(x) \right) dx$$

$$\ln U = -2\ln y_1 - \int P(x)\,dx$$

$$U = e^{-2\ln y_1 - \int P(x)\,dx} = e^{\ln y_1^{-2}} e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$U(x) = y_1^{-2} e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$U'(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$U(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx}$$

Si conocemos una solución y_1 de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Entonces la segunda solución sería:

$$y_2(x) = y_1(x)\,v(x)$$

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx}$$

En cada uno de los problemas 38 al 42 se proporciona una ecuación diferencial y una solución y_1. Utilice el método de reducción de orden como en el problema 37 para encontrar una segunda solución linealmente independiente y_2.

42. $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0 \ (-1 < x < 1); \ y_1(x) = x$

42) $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ $\quad I\ (-1,1)$

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

se divide por coeficiente de mayor grado

Tiene solución única al PVI donde sea continuo

$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$(-\infty,-1)\ (-1,1)\ (1,\infty)$

$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ subimos que $y_1(x) = x$ es sol.

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(x) &= x \\ y_1'(x) &= 1 \\ y_1''(x) &= 0 \end{aligned}}$$

suponemos que $y_2(x) = V(x)\cdot y_1(x)$ generará la segunda solución L.I

$V(x) \mp CTE$

$$y_2'(x) = V'(x)\cdot x + V(x)\cdot 1$$

$$y_2''(x) = V''(x)\cdot x + V'(x)\cdot 1 + V'(x) = V''(x)\,x + 2V'(x)$$

$$\longrightarrow y''(x) + \frac{2x}{1-x^2}y_2'(x) - \frac{2}{1-x^2}y_2(x) = 0$$

$$\left(V''(x)\cdot x + 2V'(x)\right) + \frac{2x}{1-x^2}\left(V'(x)\cdot x + V(x)\right) - \frac{2}{1-x^2}V(x)\cdot x = 0$$

$$V''(x)\cdot x + 2V'(x) + \frac{2x^2}{1-x^2}V'(x) + \frac{2x}{1-x^2}\cancel{V(x)} - \frac{2x}{1-x^2}\cancel{V(x)} = 0$$

De las 3 cantidades $y(a)$, $y'(a)$, $y''(a)$

la ecuacion (2) asegura que una de ellas se expresa en terminos de las otras dos

$$y''(a) = -Py'(a) - q\,y(a)$$

B) $$y'' - 2y - 5y = 0$$

Supongamos que existe solucion $y(x)$ que satisface

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = C \rightarrow$ CTe

en $x = 0$ $y(0)$ debe cumplir con lo siguiendo

$$y''(0) - 2y'(0) - 5y(0) = 0$$

$$y''(0) = 2y'(0) + 5y(0)$$

$$C = 2(0) + 5(1) = 5$$

Entonces el PVI
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$
$$y''(0) = C$$

Solo se puede satisfacer si $C = 5$

Sección 3.3

Encuentre las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales en los problemas 1 al 20.

19) $y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$ → Ecuación diferencial de orden superior lineal homogénea y de coeficientes constantes

→ Ecuación auxiliar será

$$r^3 + r^2 - r - 1 = 0$$

$$r^2(r+1) - (r+1) = 0$$

$$(r+1)(r^2-1) = 0$$

$$(r+1)(r-1)(r+1) = 0$$

$$(r+1)^2(r-1) = 0$$

• Las raízes de la ecuación auxiliar

$$r_1 = 1$$

$r_2 = r_3 = -1$ → multiplicidad $K = 2$

→ La solución es $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-1x} + C_3 x e^{-1x}$

En los problemas 39 al 42, encuentre una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes a partir de la solución general dada

39) $y(x) = (A + Bx + Cx^2)\,e^{2x}$

$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Cx^2e^{2x}$ por el teorema 2

✓ Las raíces de la ecuación auxiliar son $r = 2$, con multiplicidad $k = 3$

→ Ecuación auxiliar

$(r-2)(r-2)(r-2) = 0$

$(r-2)^3 = 0$

$r^3 - 3r^2\cdot 2 + 3r\cdot 2^2 - 2^3 = 0$

$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$

✓ Entonces tenemos que la edo de orden superior homogénea de coeficientes constantes es:

$$y^{(3)} - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

42) $y(x) = (A + Bx + Cx^2)\cos 2x + (D + Ex + Fx^2)\,\mathrm{sen}\,2x$

$y(x) = A\cos 2x + Bx\cos 2x + Cx^2\cos 2x + D\,\mathrm{sen}\,2x + Ex\,\mathrm{sen}\,2x + Fx^2\,\mathrm{sen}\,2x$

$y(x) = [A\cos 2x + D\,\mathrm{sen}\,2x] + x[B\cos 2x + E\,\mathrm{sen}\,2x] + x^2[C\cos 2x + F\,\mathrm{sen}$

$y(x) = e^{0x}[A\cos 2x + D\,\mathrm{sen}\,2x] + e^{0x}x[B\cos 2x + E\,\mathrm{sen}\,2x] + e^{0x}x^2[C\cos 2x + F\,\mathrm{sen}\,2x$

✓ por el teorema 4 las raíces de la ecuación auxiliar son $r = 0 \pm i2$ con multiplicidad $k = 3$

$r = 0 + i2$

$r = 0 - i2$

→ Ecuación auxiliar $[(r-(0+i2))(r-(0-i2))]^3=0$

$$[((r-0)-i2)((r-0)+i2)]^3=0$$

$$[(r-0)^2-(i2)^2]^3=0$$

$$[r^2-4i^2]^3=0$$

$$[r^2+4]^3=0 \rightarrow \quad i=\sqrt{-1} \quad i^2=-1$$

$$(r^2)^3+3(r^2)^2\cdot 4+3(r^2)\,4^2+4^3$$

$$r^6+12r^4+48r^2+64=0$$

→ Entonces la edo de orden superior homogenea de coeficientes constantes seria

$$y^{(6)}+12y^{(4)}+48y''+64y=0$$

Realice la sustitución $v = \ln x$ en el problema 51 a fin de encontrar la solución general (para $x > 0$) de las ecuaciones de Euler en los problemas 52 al 58.

55) ✓ Realizar la sustitución $v = \ln x$

$x^3 y''' - x^2 y'' + x y' = 0$ donde

- $a = 1$
- $b = -1$
- $c = 1$
- $d = 0$

✓ Tras resolver el ejercicio 51 sabemos que al hacer la sustitución $v = \ln x$ convierte la ecuación de euler de orden tres en la edo de orden 3 de coeficientes cte (homogenea):

$\rightarrow \dfrac{d^3 y}{dv^3} - 4\dfrac{d^2 y}{dv^2} + 4\dfrac{dy}{dv} = 0$ ✓ homogenea de coeficientes cte.

$\rightarrow$ Ecuación auxiliar: $r^3 - 4r^2 + 4r = 0$

$r(r^2 - 4r + 4) = 0$

con raiz $r_1 = 0$

$r_2 = 2 \rightarrow K = 2$

$r_3 = 2$

$\rightarrow$ Solución general

$y(v) = Ae^{0v} + Be^{2v} + Cve^{2v}$

$y(v) = A + Be^{2v} + Cve^{2v}$

$y(x) = A + Be^{2\ln x} + Cve^{2\ln x}$

$y(x) = A + Be^{\ln x^2} + C\ln x\, e^{\ln x^2}$

$y(x) = A + Bx^2 + Cx^2 \ln x$

58) $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 7xy' + y = 0$

donde $a = 1$
$b = 6$
$c = 7$
$d = 1$

✓ con los resultados del ejercicio 51 vemos que al sustituir $v = \ln x$ convierte esta ecuación de euler en:

$\rightarrow \dfrac{d^3 y}{dv^3} + 3\dfrac{d^2 y}{dv^2} + 3\dfrac{dy}{dv} + y = 0$ ✓ edo de orden 3 de coeficientes constantes homogénea

$\rightarrow$ Ecuación auxiliar: $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$

$(r+1)(r+1)(r+1) = 0 \rightarrow (r+1)^3 = 0$

con $r_1 = r_2 = r_3 = -1$ $(k = 3)$

$\rightarrow$ solución general

$$y(v) = Ae^{-v} + Bve^{-v} + Cv^2 e^{-v}$$

$$y(x) = Ae^{-\ln x} + B\ln x\, e^{-\ln x} + C(\ln x)^2 e^{-\ln x}$$

$$y(x) = Ae^{\ln x^{-1}} + B\ln x\, e^{\ln x^{-1}} + C(\ln x)^2 e^{\ln x^{-1}}$$

$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B\ln x}{x} + \frac{C(\ln x)^2}{x} \quad \text{si } x > 0$$

Sección 3.4

3. Una masa de 3 kg está unida al extremo de un resorte estirado 20 cm por una fuerza de 15 N. Es puesto en movimiento con posición inicial $x_0 = 0$ y velocidad inicial $v_0 = -10$ m/s. Encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento resultante.

Ya que la masa de 3kg es estirada 20 cm = 0.2 mt por una fuerza de 15N, se puede encontrar la constante elastica del resorte $K = \frac{f}{x} = \frac{15\,N}{0.2\,mt} = 75\,\frac{N}{mt}$

ya que el movimiento es libre y sin fuerza de amortiguamiento, ya conocemos que la elongación del resorte $x(t)$ viene dada:

$$x(t) = x_0 \cos(w_0 t) + \frac{V_0}{w_0} \operatorname{sen}(w_0 t)$$

donde la frecuencia angular es $w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{75}{3}}\,\frac{rad}{seg} = 5\,\frac{rad}{seg}$

$$x_0 = 0\,mt \quad y \quad V_0 = -10\,\frac{mt}{seg}$$

obtenemos

$$x(t) = -2 \operatorname{sen}(5t)$$

La amplitud del movimiendo es

$C = 2$ metros

Con un periodo $T = \frac{2\pi}{w_0}$ seg ≈ 1.25 seg

4. Un cuerpo con masa de 250 g está unido al extremo de un resorte estirado 25 cm por una fuerza de 9 N. En el tiempo $t = 0$ el cuerpo es movido 1 m a la derecha, estirando el resorte y aplicando un movimiento con una velocidad inicial de 5 m/s a la izquierda. (**a**) Encuentre $x(t)$ en la forma $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$. (**b**) Obtenga la amplitud y el periodo de movimiento del cuerpo.

a. Puesto que la masa 250 gr = 0.25 kg es estirada 25 cm = 0.25 m, por una fuerza de 9N, podemos encontrar la constante de elasticidad del resorte

$$k = \frac{F}{x} = \frac{9N}{0.25\,m} = 36\ \frac{N}{m}$$

Como el movimiento ya es libre y sin fuerza de amortiguamiento ya conocemos que la elongación del resorte $x(t)$ viene dada por.

$$x(t) = \frac{1}{w_0}\sqrt{x_0^2 w_0^2 + v_0^2}\cos\left(w_0\left(t - \delta\right)\right)$$

donde la frecuencia angular es en este caso:

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{36}{0.25}}\ \frac{rad}{seg} = 12\ \frac{rad}{seg}$$

$$x_0 = 1mt \quad y \quad V_0 = -5\ \frac{mt}{seg}$$

Con lo cual el tiempo de retardo

$$\delta = \frac{\alpha}{w_0} = \frac{1}{w_0}\left[2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{w_0 x_0}\right)\right] seg$$

$x_0 > 0$ y $v_0 < 0$ entonces $\delta = 0.49$ seg

$$x(t) = \frac{13}{12}\cos\left(12\left(t - 0.49\right)\right)$$

$$x(t) = \frac{13}{12}\cos\left(12t - 5.88\right)$$

b) La amplitud del movimiento es $C = \frac{13}{12}$ mt y el periodo del movimiento es $T = \frac{2\pi}{w_0}$ seg $= \frac{\pi}{6}$ seg ≈ 0.52 seg

13. Presuma que la masa en el sistema masa-resorte-amortiguador con $m = 10$, $c = 9$ y $k = 2$ se pone en movimiento con $x(0) = 0$ y $x'(0) = 5$. (**a**) Encuentre la función de la posición $x(t)$ y muestre que su gráfica es como la de la figura 3.4.14. (**b**) Identifique qué tan lejos se mueve la masa hacia la derecha antes de iniciar su viaje de regreso al origen.

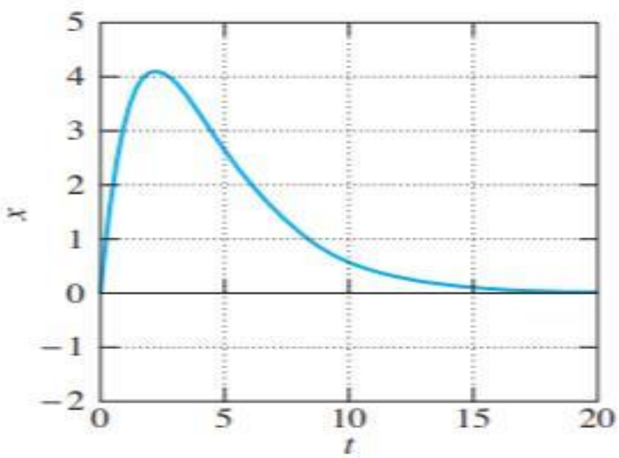


FIGURA 3.4.14. Función de la posición $x(t)$ del problema 13.

a) Empezamos por calcular el coeficiente de amortiguamiento crítico C_{cr}

$$C_{cr} = \sqrt{4km} = 4\sqrt{5}\ \frac{kg}{seg}$$

➡ El movimiento es sobreamortiguado pues $c > C_{cr}$; sabemos entonces que la elongación del resorte vendría dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{p^2-w_0^2}}\left[(v_0 - x_0 r_2)e^{r_1 t} + (x_0 r_1 - v_0)e^{r_2 t}\right]$$

en donde

$$r_1 = -p + \sqrt{p^2 - w_0^2}$$

$$r_2 = -p - \sqrt{p^2 - w_0^2}$$

$$p = \frac{c}{2m} \quad y \quad w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Son las raices reales y distintas de la ecuación auxiliar asociada, en este caso:

$$P = \frac{9}{20}\ \frac{rad}{seg} \quad y \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{rad}{seg}$$

Con lo cual:

$$r_1 = -0.4\ seg^{-1} \quad y \quad r_2 = -0.5\ seg^{-1}$$

$$X(0) = x_0 = 0\ mt \quad y \quad \dot{x}(0) = v_0\ 5\ \frac{mt}{seg}$$

tenemos que:

$$x(t) = 10\left[5e^{-0.4t} - 5e^{-0.5t}\right]\ mt$$

$$X(t) = 50\left[e^{-0.4t} - e^{-0.5t}\right]\ mt$$

b) Se debe encontrar el valor de $X_{max}(t)$.

$$X'(t) = 50\left[-0.4e^{-0,4t} + 0.5e^{-0,5t}\right] = 0$$

$$\Rightarrow -0,4e^{-0.4t} + 0,5e^{-0,5t} = 0$$

$$0,5e^{-0,5t} = 0.4e^{-0,4t}$$

$$\frac{5}{4} = e^{0,1t}$$

$$\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln e^{0.1t} = 0.1t$$

$$\Rightarrow t \approx 2.23\ seg$$

$$X''(t) = 50\left[0,16e^{-0.4t} - 0.25e^{-0,5t}\right]$$

y

$X''(2.23) < 0$ La masa se desplaza a la derecha con amplitud maxima $X_{max} = X(2.23) \approx 4.09\ mt$ al cubo de los 2.23 seg aproximadamente despues del inicio de su movimiento.

14. Asuma que la masa en un sistema masa-resorte-amortiguador con $m = 25$, $c = 10$ y $k = 226$ se pone en movimiento con $x(0) = 20$ y $x'(0) = 41$. (**a**) Encuentre la función de la posición $x(t)$ y advierta que su gráfica es como la de la figura 3.4.15. (**b**) Compruebe el pseudo-periodo de las oscilaciones y las ecuaciones de las "curvas envolventes" que están punteadas en la figura.

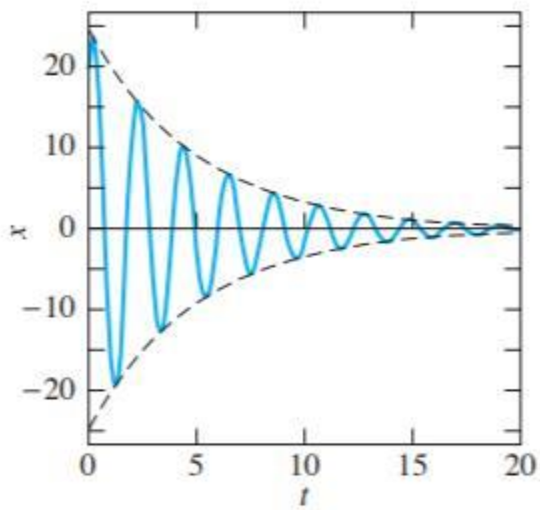


FIGURA 3.4.15. Función de la posición $x(t)$ del problema 14.

a. $C_{cr} \Rightarrow$ Coeficiente de amortiguamiento crítico

$$C_{cr} = \sqrt{4km} \approx 180.33 \text{ kg/seg}$$

Como $C < C_{cr}$ pues el movimiento es sub amortiguado.

Elongación del resorte vendrá dada por:

$$X(t) = \frac{1}{\omega_1}\sqrt{x_0^2\,\omega_1 + (v_0 + p x_0)^2}\; e^{-pt} \cdot \cos(\omega_1(t - \delta_1))$$

$$x(0) = x_0 = 20$$

$$x'(0) = v_0 = 41$$

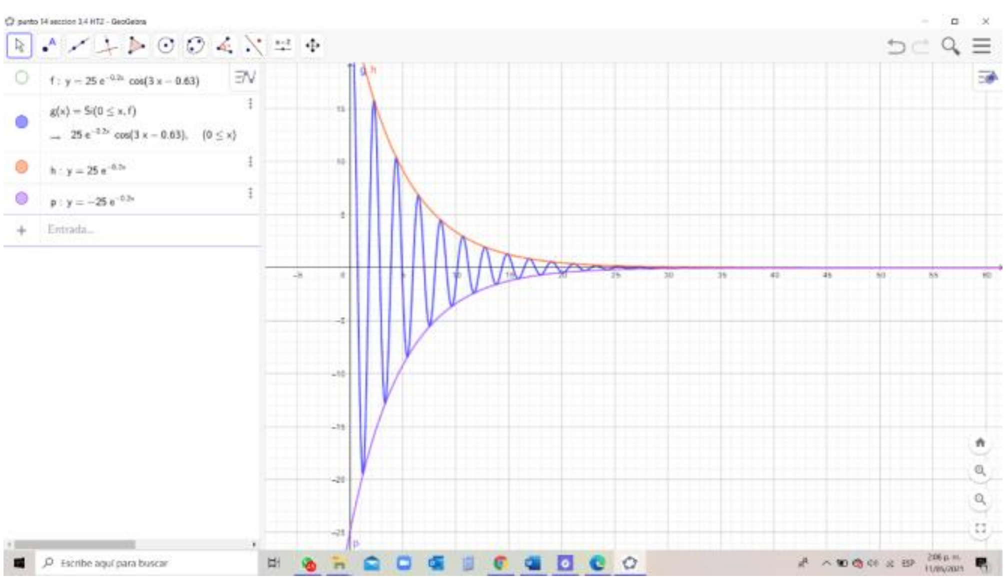
$$p = \frac{c}{2m} = \frac{1}{5}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 9.04$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = 3$$

$$\delta_1 = \frac{1}{\omega_1}\tan^{-1}\left(\frac{v_0 + p x_0}{\omega_1 x_0}\right) \approx 0.21 \text{ seg}$$

$$x(t) = 25\, e^{-1/5\, t} \cos(3(t - 0.21))$$
$$= 25\, e^{-0.2t} \cos(3t - 0.63)$$



22. Un peso de 12 lb (masa $m = 0.375$ slugs en unidades fps) está unido tanto a un resorte suspendido verticalmente que se estira 6 in., como a un amortiguador que le proporciona una resistencia de 3 lb por cada ft/s de velocidad. (**a**) Si el peso es colocado 1 ft por debajo de su posición de equilibrio estático y se suelta en el tiempo $t = 0$, encuentre la función de la posición $x(t)$. (**b**) Verifique la frecuencia, la amplitud variante en el tiempo y el ángulo de fase del movimiento.

$$k = \frac{f}{x} = \frac{12\,lb}{6\,in} = \frac{12\,lb}{6 \cdot \frac{1}{12}\,ft} = 24\,\frac{lb}{ft}$$

$$C = 3\,\frac{lb}{\frac{ft}{seg}} \quad ; \quad x(0) = +1\,ft$$

$$x'(0) = 0\,ft/seg$$

Hay amortiguamiento; encontramos el coeficiente de amortiguamiento crítico.

$$C_{cr} = \sqrt{4km} = 6\,\frac{lb}{\frac{ft}{seg}}$$

Por tanto $C < C_{cr}$ ➡ el movimiento es subamortiguado

Por lo cual la Ecuación de movimiento esta dada por:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1}\sqrt{x_0^2\omega_1^2 + (v_0 + px_0)^2}\; e^{-pt} \cdot \cos\left(\omega_1(t - \delta_1)\right)$$

donde ✓ $x(0) = x_0 = 1\,ft$

✓ $x'(0) = v_0 = 0\,\frac{ft}{seg}$

✓ $p = \frac{c}{2m} = 4\,\frac{rad}{seg}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\,\frac{rad}{seg}} = 8\,\frac{rad}{seg}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \sqrt{48}\,\frac{rad}{seg} = \boxed{4\sqrt{3}\,\frac{rad}{seg}}$$

Es la frecuencia del movimiento subamortiguado.

donde $\delta_1 = \frac{1}{w_1} \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + p x_0}{w_1 x_0}\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}$ seg

Con lo cual ✓ $x(t) = \frac{1}{4\sqrt{3}} 8 e^{-4t} \cos\left(4\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}\right)\right)$

✓ $x(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\, e^{-4t} \cos\left(4\sqrt{3}\, t - \frac{\pi}{6}\right)$

La amplitud variante con el tiempo es de $A = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ y el angulo fase $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ rad.

23. Este problema aborda el modelo sumamente simplificado de un carro de 3200 lb de peso (masa $m = 100$ slugs en unidades fps). Asuma que el sistema de suspensión actúa como un solo resorte y su moderador de impactos como un solo amortiguador, de tal manera que su vibración vertical satisface la ecuación (4) con los valores apropiados de los coeficientes. (**a**) Encuentre el coeficiente de rigidez k del resorte si el carro sufre vibraciones libres de 80 ciclos por minuto (ciclos/min) cuando el amortiguador está desconectado. (**b**) Con el amortiguador conectado, el carro entra en vibración al manejarse sobre un bache y los movimientos amortiguados resultantes tienen una frecuencia de 78 ciclos/min. ¿Después de cuánto tiempo la amplitud tendrá variaciones de 1% de su valor inicial?

a $m = 100 \text{ slugs} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{100}}$

$$\omega_0 = 80 \frac{\text{ciclos}}{\text{minutos}} = 80 \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ seg}} = \frac{8\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$\rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{100}$$

$$100 \left(\frac{8\pi}{3}\right)^2 = k \rightarrow k \approx 7018 \frac{\text{slug}}{\text{seg}} = 7018 \frac{\text{lb}}{\frac{\text{ft}}{\text{seg}^2}} \cdot \frac{1}{\text{seg}}$$

$$= 7018 \frac{\text{lb}}{\frac{\text{ft}}{\text{seg}}}$$

b. $\omega_1 = 78 \frac{\text{ciclos}}{\text{min}} = 78 \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ seg}} = \frac{13\pi}{5} \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \frac{13\pi}{5} \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$\rightarrow \omega_0^2 - p^2 = \left(\frac{13\pi}{5}\right)^2$$

$$\left(\frac{8\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{13\pi}{5}\right)^2 = p^2$$

$$\rightarrow p \approx 1.86 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

El tiempo de la amplitud variante en el tiempo del movimiento subamortiguado; tendra variación del 1% del valor inicial $t=0$

$$Ce^{-pt} = \frac{1}{100} C$$

$$\rightarrow e^{-pt} = \frac{1}{100} \rightarrow \ln e^{-pt} = \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$-pt = \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$t = \frac{-1}{p} \ln\left(\frac{1}{100}\right) \text{ seg}$$

$$t = 2.47 \text{ seg}$$

Sección 3.5

En los problemas 1 al 20 determine una solución particular y_p de la ecuación dada. En todos estos problemas las primas representan derivadas con respecto a x.

sección 3.5 Coeficientes indeterminados

5) Resolver $y'' + y' + y = \operatorname{sen}^2 x$

$f(x) = \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}x$ tambien lo podemos ver como:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$\rightarrow$ $y'' + y' + y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ $*$

$\frac{1}{2}$: representa la cte.

$\frac{1}{2}\cos 2x$: representa esa función

✓ sea $y_p(x) = A + B\cos 2x + C\operatorname{sen}2x$

• $y_p(x)$ debe satisfacer $*$

$\rightarrow$ $y_p'(x) = -2B\operatorname{sen}2x + 2C\cos 2x$

$y_p''(x) = -4B\cos 2x - 4C\operatorname{sen}2x$

$\rightarrow$ $y_p'' + y_p' + y_p = A + \cos 2x(B + 2C - 4B) + \operatorname{sen}2x(C - 2B - 4C)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

• $A = 1/2$	• $A = 1/2$
• $-3B + 2C = -1/2$	• $B = 3/26$
• $-2B - 3C = 0$	• $C = -1/13$

$\rightarrow$ $y_p(x) = 1/2 + 3/26 \cos 2x - 1/13 \operatorname{sen}2x$

$y_p(x) = 1/26\,(13 + 3\cos 2x - 2\operatorname{sen}2x)$

✓ La solución general a la ecuación $*$ es

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

✓ Por otro lado la ecuacion homogenea asociada es:

$y'' + y' + y = 0$

$r^2 + r + 1 = 0$ -> Ecuación auxiliar

$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$y_c(x) = e^{-1/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$

-> solución general:

$y(x) = e^{-1/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + \frac{1}{26}\left(13 + 3\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x\right)$

19) Resolver $y^{(5)} + 2y^{(3)} + 2y'' = 3x^2 - 1$

✓ su solución de la ecuación homogenea asociada es:

$y^{(5)} + 2y^{(3)} + 2y'' = 0$

→ Ecuación auxiliar → $r^5 + 2r^3 + 2r^2 = 0$

- $r = 0$ con multiplicidad 2
- $r = -0.77$
- $r = 0.38 \pm 1.56i$

✓ solucion de la ecuación homogenea asociada:

$y_c(x) = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 x e^{0 \cdot x} + C_3 e^{-0.77x} + e^{0.38x}((C_4 \cos 1.56x + C_5 \operatorname{sen} 1.56x)$

$y_c(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-0.77x} + e^{0.38x}((C_4 \cos(1.56x) + C_5 \operatorname{sen}(1.56x))$

* La solucion particular a la ecuacion no homogenea ideal seria: (donde $f(x) = 3x^2 - 1$)

$y_p(x) = \underbrace{A + Bx}_{} + Cx^2$

↳ Esta duplicado en la solución $y_c(x)$

*

$s = 2$

- Debemos multiplicar por x^s donde s es el menor entero para que ya no haya duplicacion de terminos de $y_p(x)$ en $y_c(x)$

→ $y_p(x) = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4$

$y_p'(x) = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3$

$y_p''(x) = 2A + 6Bx + 12Cx^2$

$y_p^{(3)}(x) = 6B + 24Cx$

$y_p^{(4)}(x) = 24C$

$y_p^{(5)}(x) = 0$

✓ Ahora remplazando en la edo

$$y_p^{(5)} + 2y_p^{(3)} + 2y_p'' = 3x^2 - 1$$

$$(0) + 2(6B + 24Cx) + 2(2A + 6Bx + 12Cx^2) = 3x^2 - 1$$

$$(24C)x^2 + (12B + 48C)x + (12B + 4A) = 3x^2 - 1$$

-> comparamos termino a termino

$24C = 3 \rightarrow C = 1/8$

$12B + 48C = 0 \longrightarrow 12B + 6 = 0$

$B = -1/2$

$12B + 4A = -1 \longrightarrow -6 + 4A = -1$

con $B = -1/2$ $\quad A = 5/4$

✓ Forma y_p -> $y_p(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4$

En los problemas 21 al 30 establezca la forma apropiada de una solución particular y_p, pero sin obtener los valores de los coeficientes.

25) $y'' + 3y' + 2y = x(e^{-x} - e^{-2x})$

$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x} - xe^{-2x}$

✓ Ecuación Auxiliar $r^2 + 3r + 2 = 0$

- $r = -1$
- $r = -2$

✓ $y_c(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

✱ Tenemos que como $f(x) = xe^{-x} - xe^{-2x}$ entonces la solución particular y_p debe proponerse como combinación lineal de todas las funciones en $f(x)$ y sus derivadas que sean L.I

→ $y_p(x) = Ae^{-x} + \underbrace{Bxe^{-x}}_{\text{Duplicado}} + Ce^{-2x} + \underbrace{Dxe^{-2x}}_{\text{Duplicado}}$

✓ se debe multiplicar cada función LI con sus respectivas derivadas por x^{s_1} y x^{s_2} en donde s_1 y s_2 son los menores enteros positivos para que no hayan duplicados en $y_c(x)$

- $s_1 = 2$
- $s_2 = 2$

→ $y_p(x) = (Ae^{-x} + Bxe^{-x})x^2 + (Ce^{-2x} + Dxe^{-2x})x^2$

$y_p(x) = Ax^2e^{-x} + Bx^3e^{-x} + Cx^2e^{-2x} + Dx^3e^{-2x}$

↳ forma apropiada de $y_p(x)$ de la Edo

Resuelva los problemas de valores iniciales en los numerales 31 al 40.

la comisionista de bolsa ...

39) Resolver el PVI $y^{(3)} + y'' = x + e^{-x}$ donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

✓ primero resolvemos la edo homogenea asociada

$y^{(3)} + y'' = 0$

→ Ecuación auxiliar → $r^3 + r^2 = 0$

$r^2(r+1) = 0$ · $r = 0$ mult 2 · $r = 1$

✓ $y_c(x) = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 x e^{0 \cdot x} + c_3 e^{-1 x}$

$y_c(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$

* Teniendo en cuenta que $f(x) = x + e^{-x}$ tenemos que

$y_p(x) = \underbrace{Ax + B}_{\text{Duplicado}} + \underbrace{Ce^{-x}}_{\text{Duplicado}}$ en la solución complementaria

✓ Debemos multiplicar cada funcion LI con sus derivadas por x^{s_1} y x^{s_2} donde s_1 y s_2 son los menores enteros positivos para que no hayan duplicados en $y_c(x$

· $s_1 = 2$
· $s_2 = 1$

→ $y_p(x) = (Ax + B)x^2 + (Ce^{-x})x^1$

$y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cxe^{-x}$

→ $y_p'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + Ce^{-x} - Cxe^{-x}$

$y_p''(x) = 6Ax + 2B + Ce^{-x} - [Ce^{-x} + Cxe^{-x}(-1)]$
$= 6Ax + 2B + 2Ce^{-x} + Cxe^{-x}$

$y_p^{(3)}(x) = 6A + 2Ce^{-x} + Ce^{-x} + Cxe^{-x}(-1)$
$= 6A + 3Ce^{-x} - Cxe^{-x}$

✓ Ahora remplazando en la edo tenemos

$$y_p^{(3)} + y_p'' = x + e^{-x}$$

$$(6A + 3Ce^{-x} - Cxe^{-x}) + (6Ax + 2B - 2Ce^{-x} + Cxe^{-x}) = x + e^{-x}$$

$$(6A)x + (3C - 2C)e^{-x} + (-C + C)xe^{-x} + (6A + 2B) = x + e^{-x}$$

✓ comparamos termino a termino

$6A = 1 \rightarrow A = 1/6$

$C = 1$

$6A + 2B = 0 \xrightarrow[\text{con } A = 1/6]{} 1 + 2B = 0$
$B = -1/2$

$\rightarrow y_p(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$

$\rightarrow$ solución general : $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

- $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$

* para satisfacer el PVI debemos encontrar las constantes C_1, C_2, C_3 pero antes encontramos:

$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$

$y'(x) = C_2 - C_3 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x + e^{-x} - xe^{-x}$

$y''(x) = C_3 e^{-x} + x - 1 - e^{-x} - [e^{-x} + xe^{-x}(-1)]$

$= C_3 e^{-x} + x - 1 - 2e^{-x} + xe^{-x}$

* $y(0) = 1 \rightarrow C_1 + C_3 = 1 \rightarrow C_1 + 4 = 1 \rightarrow C_1 = -3$
$y'(0) = 0 \rightarrow C_2 - C_3 + 1 = 0 \rightarrow C_2 - 4 + 1 = 0 \rightarrow C_2 = 3$
$y''(0) = 1 \rightarrow C_3 - 1 - 2 = 1 \rightarrow C_3 = 4$

Solucion al PVI : $y(x) = -3 + 3x + 4e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$