Teoría – Tema 9

Teoría - 20 - Ángulo entre planos. Ángulo entre recta y plano

Ángulo entre dos planos

El ángulo formado por dos planos coincide con el menor ángulo formado por sus vectores característicos.

$$\Pi_1 \rightarrow \ \ vector \ \ característico \ \ \vec{u}$$

$$\Pi_2 \rightarrow \ \ vector \ \ característico \ \ \vec{v}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z|}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \ \ \rightarrow \ \ \alpha\equiv ángulo \ \ formado \ \ por \ \ dos \ \ planos$$

Ejemplo 1 resuelto

Hallar el ángulo que forman los dos planos siguientes.

$$\Pi_1: 2x-3y+z-5=0$$

$$\Pi_2: 3x+4y-2z+1=0$$

Los vectores normales a ambos planos son:

$$\vec{u_{\Pi_1}}=(2,-3,1)$$

$$\vec{u_{\Pi_2}}=(3,4,-2)$$

Y el ángulo que forman los dos planos coincide con el menor ángulo formado por sus vectores normales.

$$\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u_{\Pi_1}}\cdot\vec{v_{\Pi_2}}|}{|\vec{u_{\Pi_1}}|\cdot|\vec{v_{\Pi_1}}|}=\frac{|2\cdot 3-3\cdot 4-1\cdot 2|}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{9+16+4}}=\frac{8}{\sqrt{406}}\simeq 0{,}397 \ \ \rightarrow \ \ \alpha=66{,}6^o$$

Ángulo entre una recta y un plano

El ángulo formado por una recta r y un plano Π es el ángulo que forma la recta r con su proyección ortogonal sobre el plano Π .

Si este ángulo es α , el ángulo que forma el vector normal del plano $\vec{u}_\Pi$ con el vector director de la recta $\vec{u}_r$ será igual a $90^o-\alpha$. Y sobre este ángulo podemos operar:

$$\cos(90^o-\alpha)=\frac{|\vec{u}_\pi\cdot\vec{u}_r|}{|\vec{u}_\pi|\cdot|\vec{u}_r|}$$

Recordamos que $\cos(90^o-\alpha)=sen(\alpha)$

$$sen(\alpha)=\frac{|\vec{u}_\pi\cdot\vec{u}_r|}{|\vec{u}_\pi|\cdot|\vec{u}_r|} \quad \rightarrow \quad \alpha\equiv \acute{a}ngulo \quad formado \quad por \quad recta \quad y \quad plano$$

Ejemplo 2 resuelto

Hallar el ángulo que forma la recta $r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{1}$ **con el plano** $\Pi_1: 2x-y+3z-1=0$ **.**

Un vector director de la recta es:

$\vec{u}_r=(2,2,1)$

El vector característico del plano es:

$\vec{u}_\Pi=(2,-1,3)$

Por lo tanto:

$$sen(\alpha)=\frac{|2\cdot 2-2\cdot 1+1\cdot 3|}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{4+1+9}}=\frac{5}{3\sqrt{14}}=0{,}445 \quad \rightarrow \quad \alpha=26{,}45^o$$