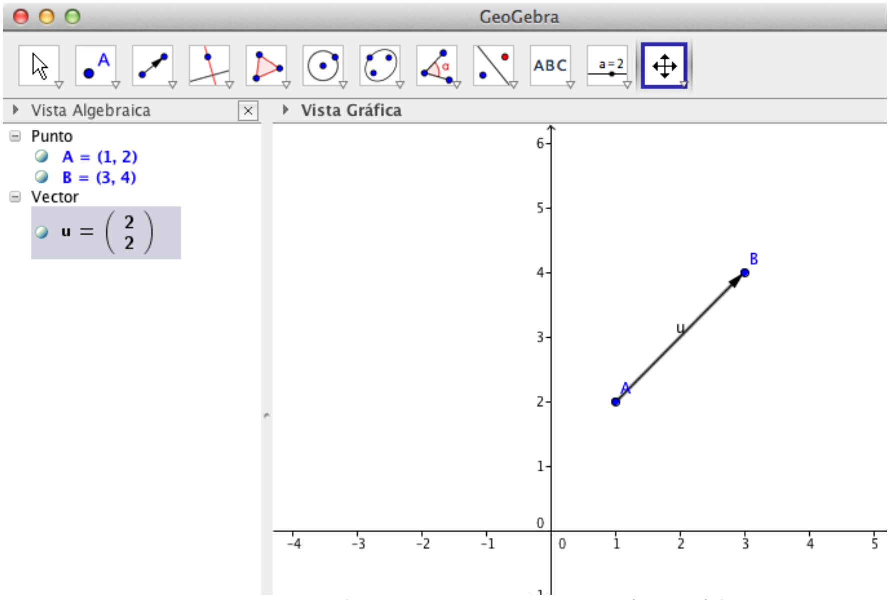
TEMA 7: TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRÍAS EN EL PLANO.

7.1.Vectores en el plano:

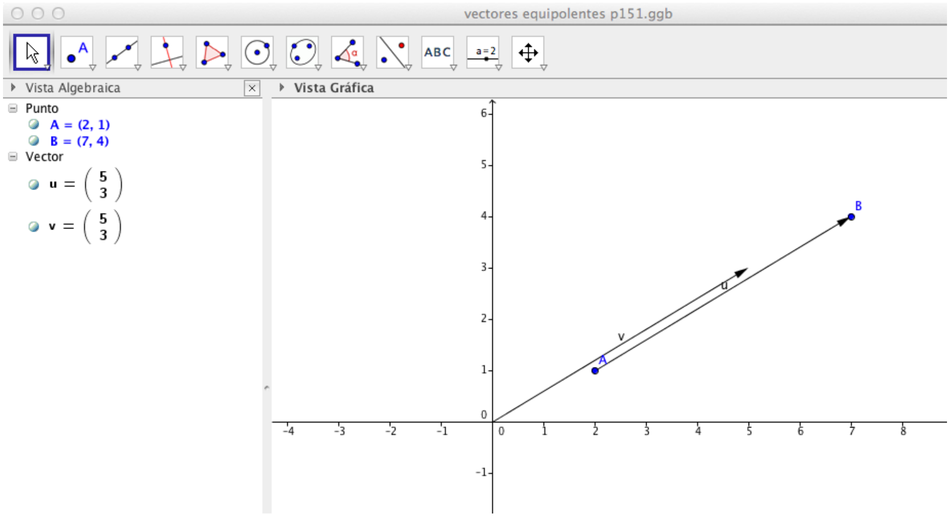
Un vector AB es un segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B.
En AB se pueden considerar los siguientes elementos:

- Módulo: es la longitud del segmento AB.
- Dirección: está determinada por la recta que pasa por A y B.
- Sentido: está determinado por su orientación en la recta, de A a B.



En este vector AB, el módulo es (2,2), la dirección es la recta u y el sentido es de A a B

Los vectores que tienen igual módulo, dirección y sentido se llaman vectores equipolentes.

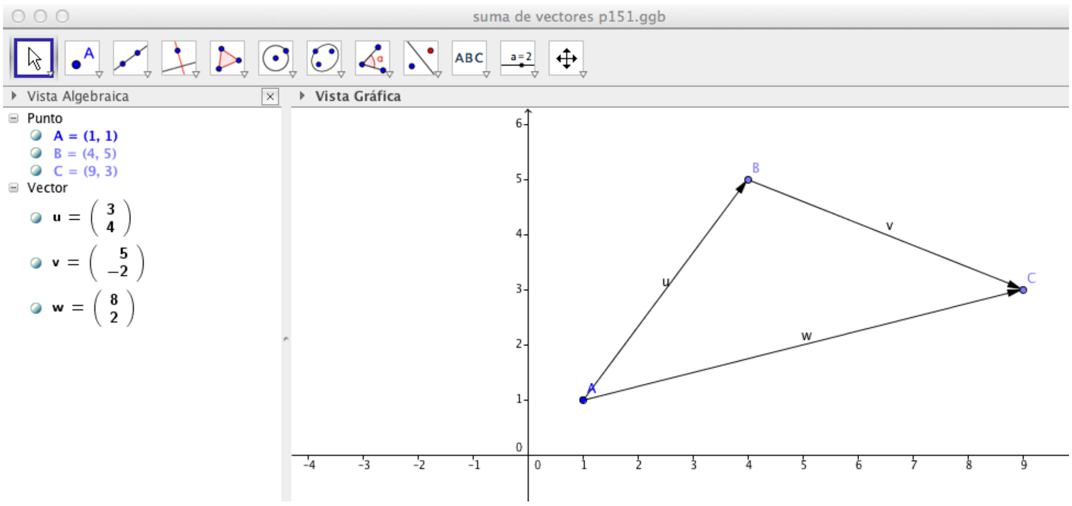


En el ejemplo, el vector v y el vector u, son equipolentes.

Las componentes o coordenadas del vector AB, determinado por los puntos A(x,y) y B(x',y'), son AB(x'-x,y'-y).

La suma de los vectores AB(x,y) y BC(x',y') es el vector AB(x+x',y+y').

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$



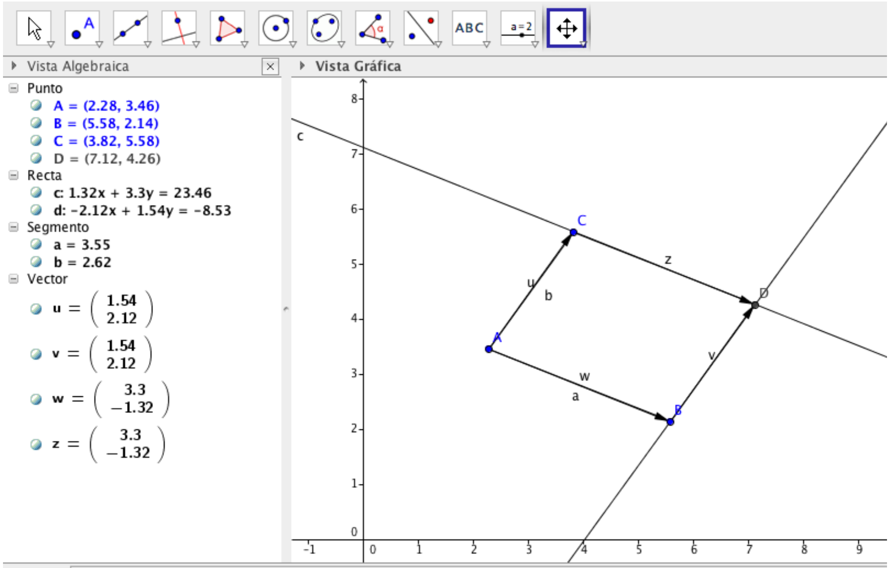
El vector w es el resultado de sumar las coordenadas de los vectores u y v. Es decir, el vector w, es la suma de los vectores u y v.

u + v = w /(3+5,4+(-2))= (8,2)

Ejercicios (p151):

1.Dibuja un paralelogramo y razona qué pares de vectores determinados por los vértices son equipolentes.

Son equipolentes los vectores AC y BD / CD y AB.



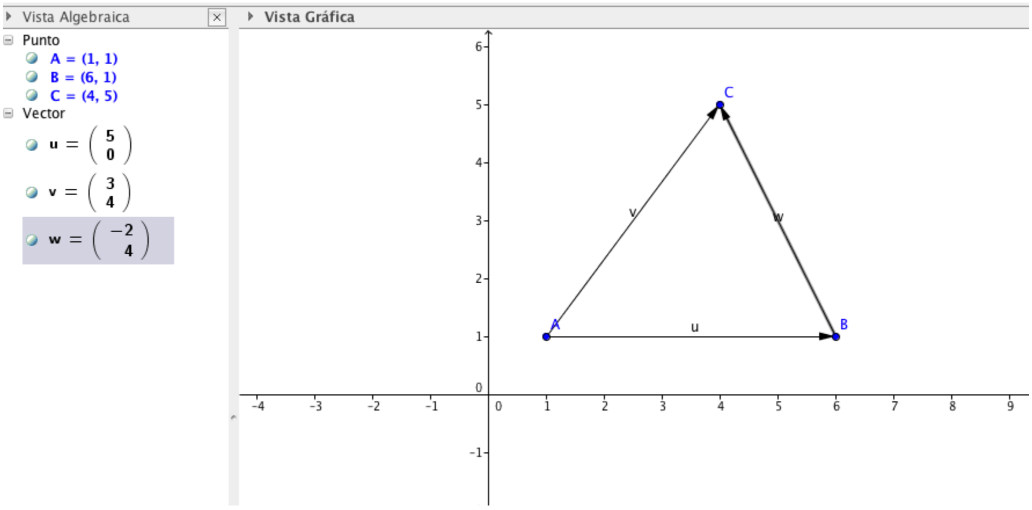
2.Las coordenadas de los vértices de un triángulo son A(1,1), B(6,1) y C(4,5). Halla las coordenadas de os vectores AB, AC y BC.

Las coordenadas de los vectores son:

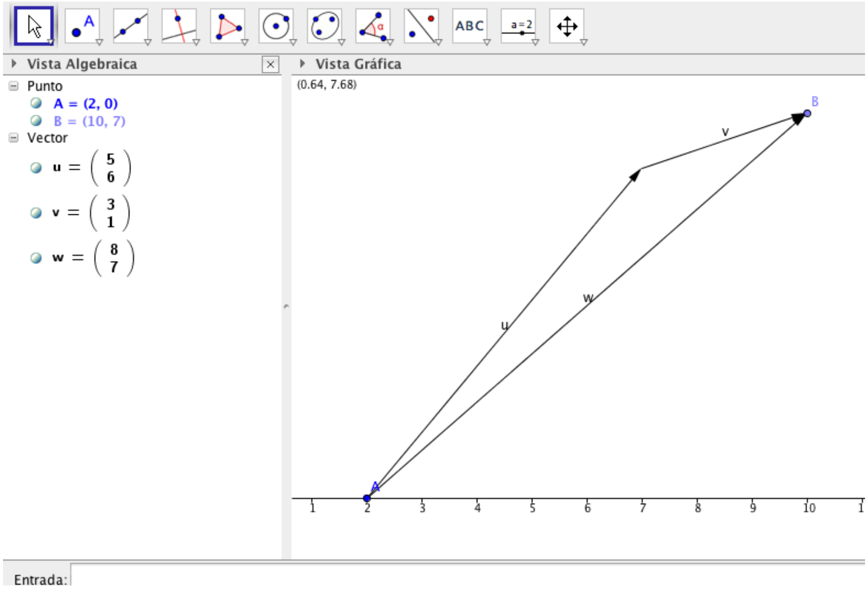
AB=(5,0)

AC=(3,4)

BC=(-2,4)



4.Representa los vectores AB(5,6) y BC(3,1)y calcula la suma AB + BC si A(2,0).
AB + BC = (5+3,6+1) = (8,7)
La suma de los vectores AB(5,6)y BC(3,1) es (8,7)



Ejercicios (p162):

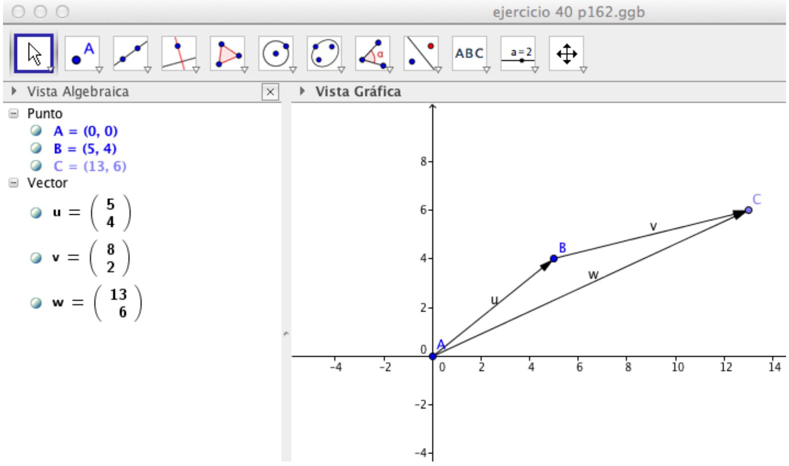
37. Las coordenadas de los vértices de un triángulo son A(0,4), B(2,-3) y C(-2,7). Calcula las coordenadas de los vectores AB, AC y BC.
AB= B -A = (2-0, -3-4) = (2,-7)
AC = C – A = (-2-0,7-4) = (-2,3)
BC = C – B = (-2-2,7-(-3))= (-4,10)

38. Considera el vector AB(3,-5). Sabiendo que las coordenadas del punto A son (1,5), calcula las coordenadas del punto B.
AB= B – A
A + AB = (1+3,5+(-5)) = (4,0)
Las coordenadas del punto B son (4,0)

39. Dados los vectores u(-1,2), v(2,4) y w(0,5), realiza estas operaciones.
a) 2u = u + u / (-1-1,2+2) = (-2,4)
b) u – (w + w)/ (-1,2)- (0+0,5+5)= (-1,-8)
c)u + v +w / (-1+2+0,2+4+5) = (1,11)
d)u – (v-w) / (-1,2) – (2-0,4-5) = (-3,3)

40. Calcula la suma numérica y geométrica de los vectores del dibujo.

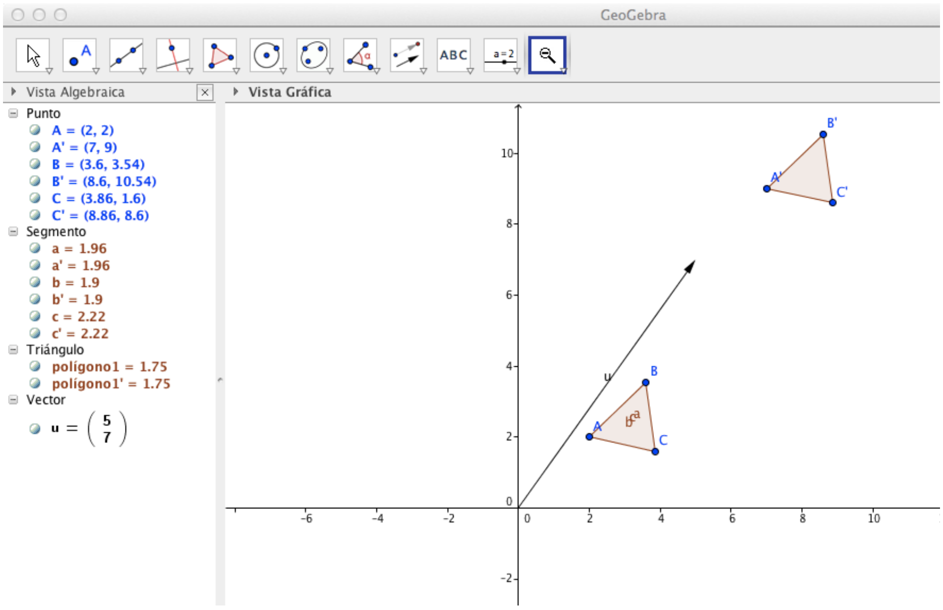
u + v = (5+8,4+2)= (13,6)



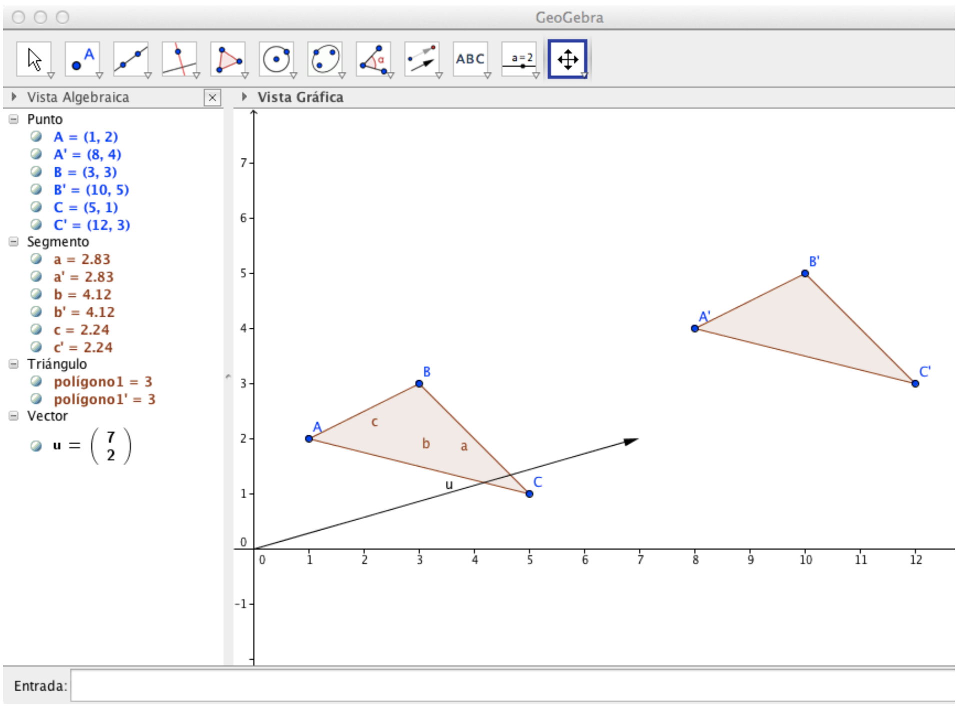
7.2 Traslaciones en el plano.

Una traslación de vector guía u transforma un punto P del plano en otro P', de modo que los vectores u y PP' son equipolentes.

Se cumple: OP' = OP + u



Se cumple que B' = B + u



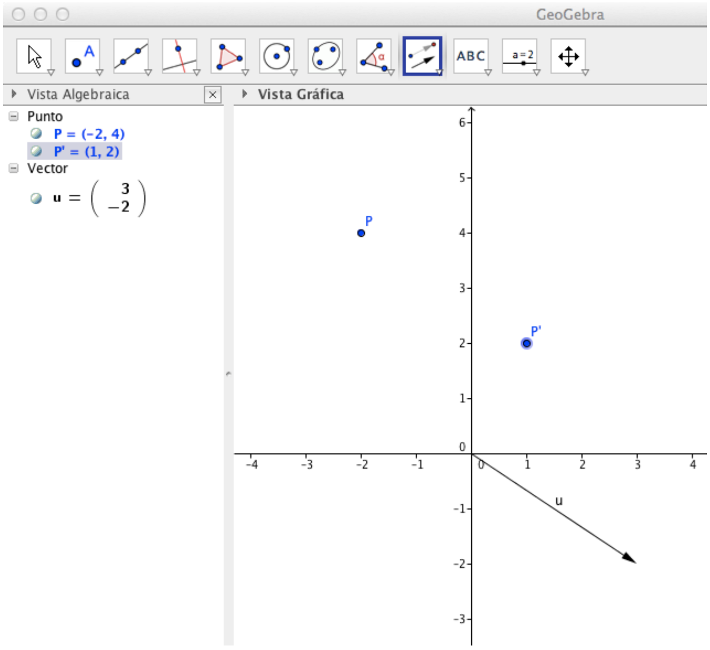
En la traslación, los segmentos AB y A'B' son iguales, ya que AA'B'B es un paralelogramo. Por tanto, también lo son los triángulos ABC y A'B'C', ya que los tres lados son iguales.

Ejercicios (p 162 y 163):

41.Halla numérica y geométricamente el trasladado del punto P(-2,4)según el vector guía u(3,-2).

P + u = (-2+3,4+(-2))= (1,2)

El traslado es P'= (1,2)



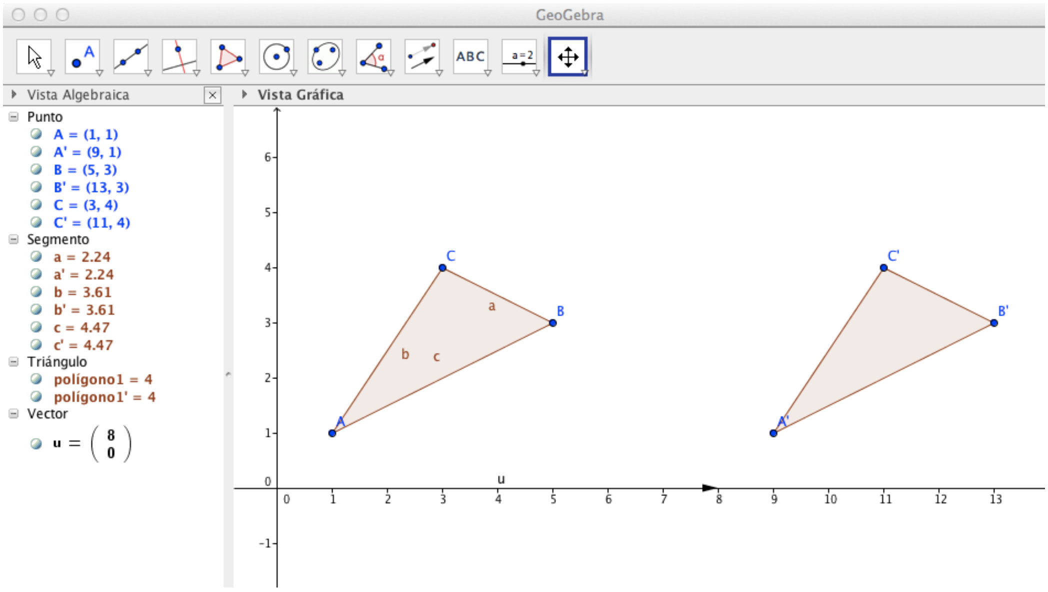
63. ¿Cuántos vectores determinan dos puntos? ¿Qué relación existe entre dichos vectores?

Dos, que tienen el mismo módulo, distinto sentido y la misma dirección.

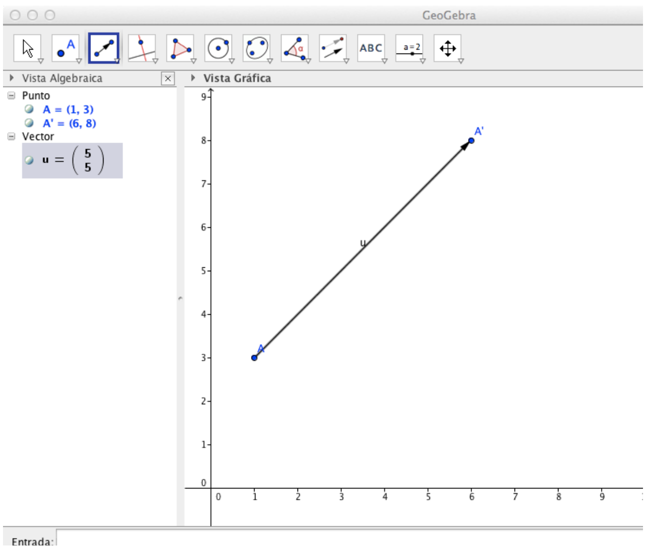
Para trasladar una figura se trasladan los puntos que la determinan.

Ejercicios(p152):

5.Las coordenadas de los vértices de un triángulo son A(1,1), B(5,3) y C(3,4).
a)Representa el triángulo.
b)Traslada el triángulo según el vector guía u(8,0).



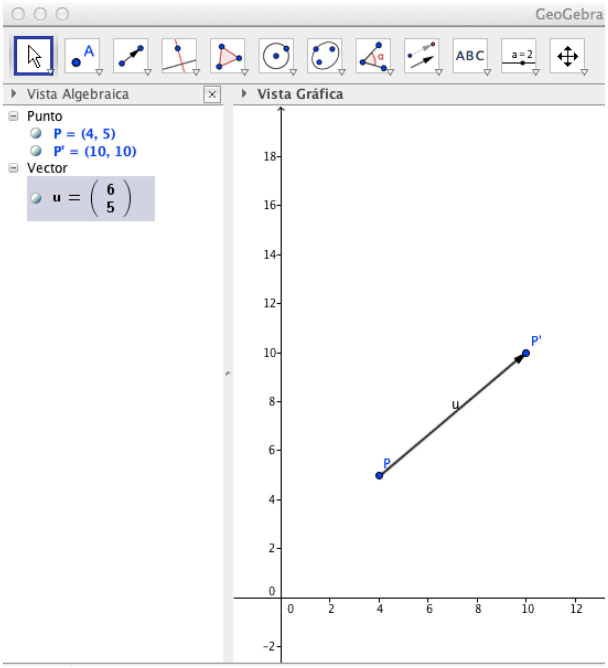
6.Mediante una traslación el punto A(1,3) se transforma en A'(6,8). ¿Cuál es el vector guía?



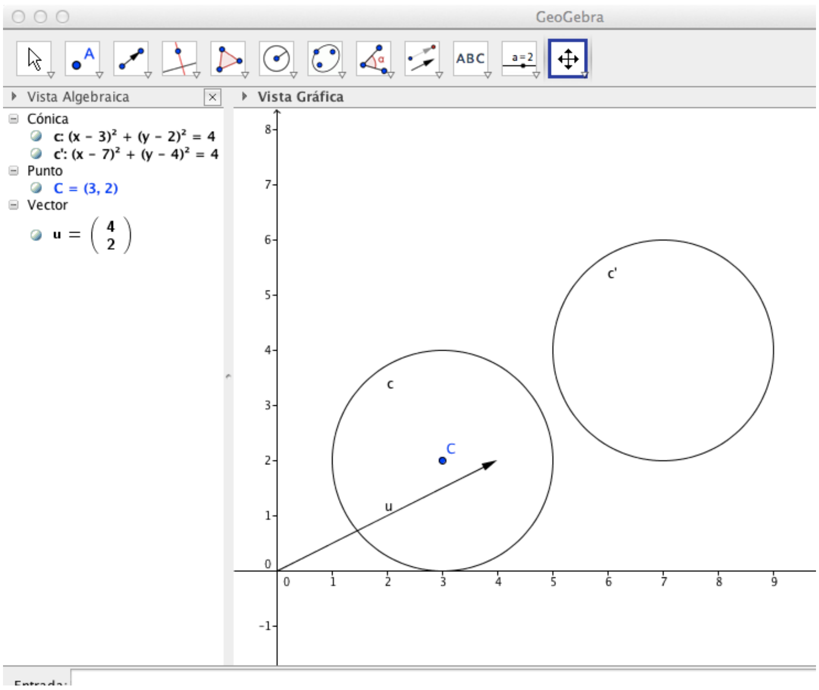
El vector guía es u(5,5)

7.Halla las coordenadas del punto P(x,y) si su trasladado según el vector u(6,5) tiene por coordenadas (10,10).

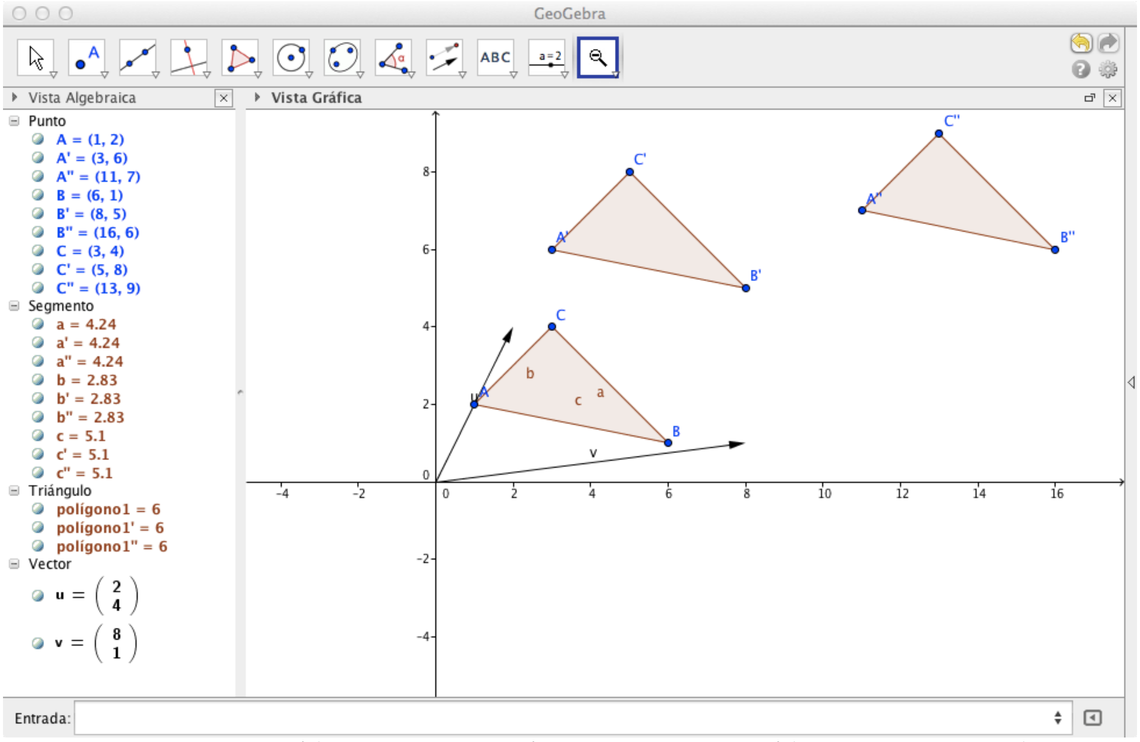
P’ – u = P / (10-6,10-5) = (4,5)



8.El círculo de centro C(3,2) y radio 2 se traslada según el vector u(4,2.) Dibuja el círculo trasladado.



La aplicación sucesiva de dos traslaciones de vectores guías u y v es otra traslación de vector guía u + v.



Representamos el triángulo ABC, aplicamos la traslación de vector guía u, y luego, la de vector guía v. Se obtiene el triángulo de vértices A''(11,7), B''(16,6) y C''(13,9).

Ejercicio resuelto (p 153):

1. El producto de dos traslaciones de vectores guía u y v tiene por vector guía w (5,7). Si u(3,1), ¿cuál es el vector v?
El vector pedido es v(x,y).
Se debe cumplir: u + v = w
Sustituyendo los vectores por sus coordenadas:
(3,1) + (x,y) = (5,7)
Por tanto, x = 2 e y = 6. El vector es v(2,6).

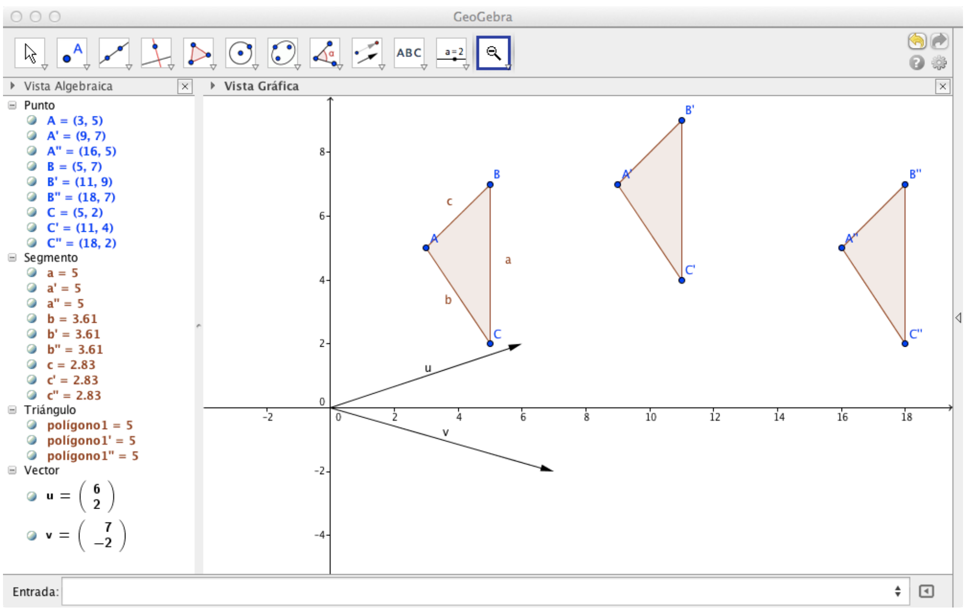
Ejercicios (p153):

9. Se aplica al punto P una traslación de vector u(2,3) y, a continuación, otra de vector v(3,5) y se llega al punto Q(10,12).
a)¿Cuál es el vector de la traslación sucesiva?
b)¿Cuáles son las coordenadas del punto P?

El vector de la traslación sucesiva es la suma de los dos vectores. U + v = (2+3,3+5) = (5,8) es el vector de la traslación sucesiva.
Q – w = (10-5,12-8) = (5,4) son las coordenadas del punto P.

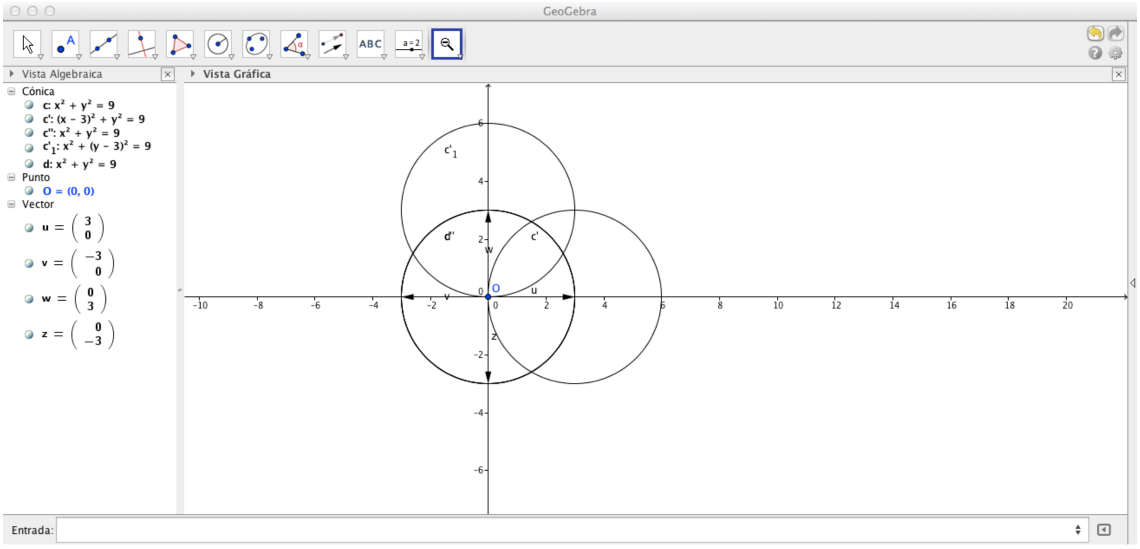
10. El producto de dos traslaciones tiene por vector guía w(7,10).
Si una de ellas tiene como vector guía u(2,3), ¿cuál es el vector guía de la otra traslación?
W – u = (7-2,10-3) = (5,7)
El vector guía de la otra traslación es v(5,7).

11. El triángulo ABC tiene por coordenadas de los vértices A(3,5), B(5,7) y C(5,2).
Calcula las coordenadas del triángulo obteniendo mediante las traslaciones sucesivas de los vectores guías u(6,2) y v(7,-2).



Las coordenadas del nuevo triángulo son A(16,5), B(18,7) y C(18,2).

12. Dibuja en unos ejes de coordenadas una circunferencia de centro O(0,0) y radio 3 unidades.
Traslada sucesivamente la circunferencia según los vectores u(3,0), v(-3,0), w(0,3) y z(0,-3).

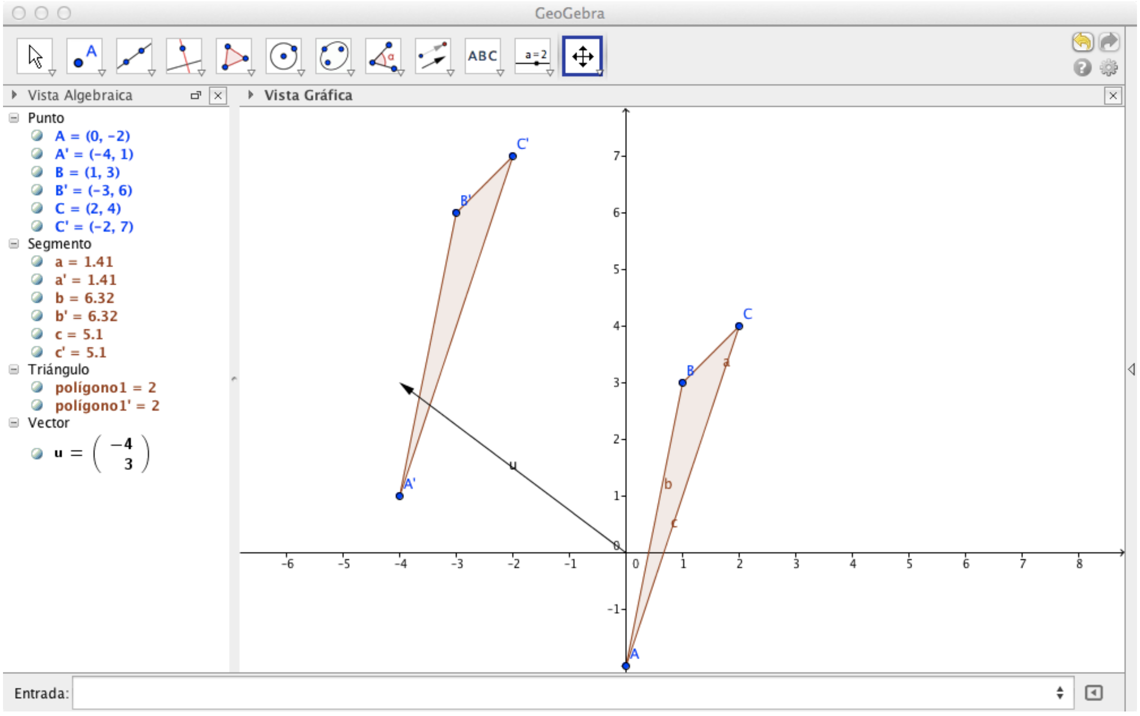


Ejercicios (p162):

42. En una traslación de vector guía u(-3,2), el punto P se ha trasformado en el punto P'(6,3). Halla las coordenadas de P.
P' – u = (6+3,3-2) = (9,1)
Las coordenadas del punto P son (9,1).

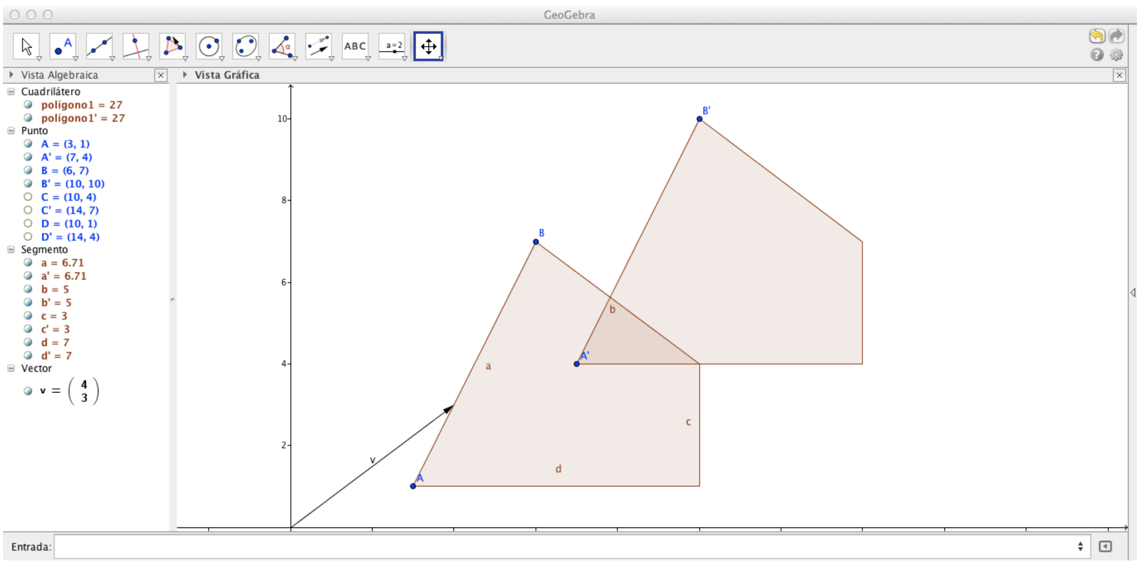
43. ¿Cuál es el vector guía en una traslación que trasforma el punto A(2,-4) en el punto A'(7,7)?
A' – A = (7-2,7+4) = (5,10)
El vector guía es (5,10).

44. En una traslación de vector guía u(-4,3), halla las coordenadas de los trasformados de los vértices del triángulo ABC siendo A(0,-2), B(1,3) y C(2,4).



Los trasformados de los vértices del triángulo son A'(-4,1), B'(-3,6) y C'(-2,7).

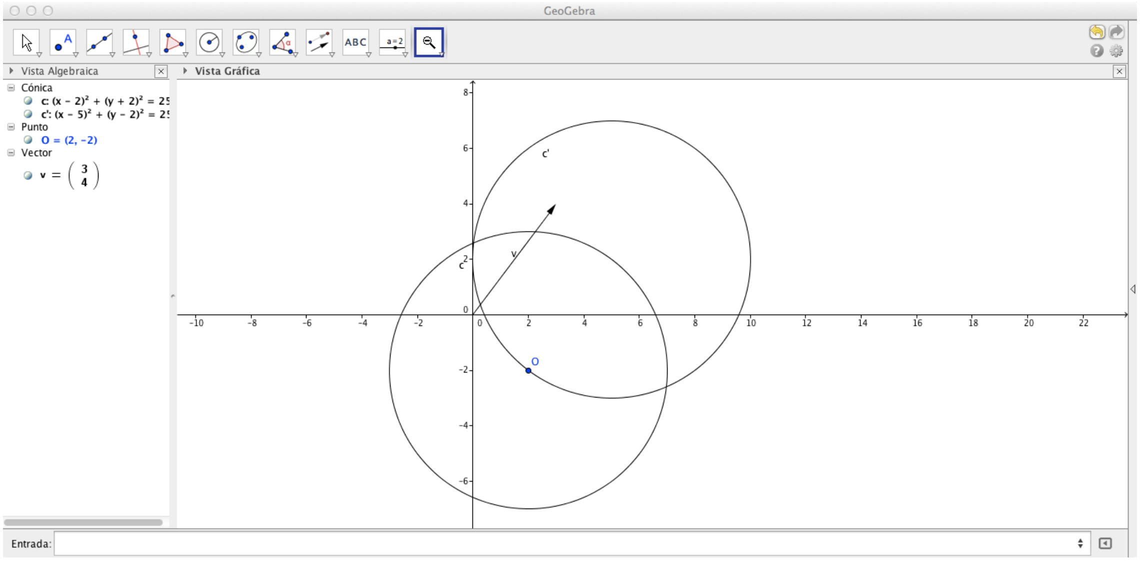
45. Dibuja la figura trasladada de la dada, según el vector guía v.



46. Un círculo de centro O(2,-2) y radio 5 se traslada según el vector guía u(3,4).

a) ¿cuál es el nuevo centro y el nuevo radio?

b) dibuja el círculo trasladado.



El nuevo centro es O’(5,2) y el radio es el mismo.

47. Considera el punto P(2,5). Aplícale sucesivamente las traslaciones de vectores guía u(-1,5) y v(3,-2).

a) ¿Cuál es el punto trasladado?

b) ¿Cuál es el vector guía resultante?

El vector guía resultante es u + v = (-1+3,5+-2) = (2,3)

El punto trasladado es P + w = (2+2,5+3) = (4,8)

7.3. GIROS EN EL PLANO.

Un giro de centro O y ángulo a transforma un punto P del plano en otro P’ del mismo plano tal que
OP = OP’ y a= POP’.

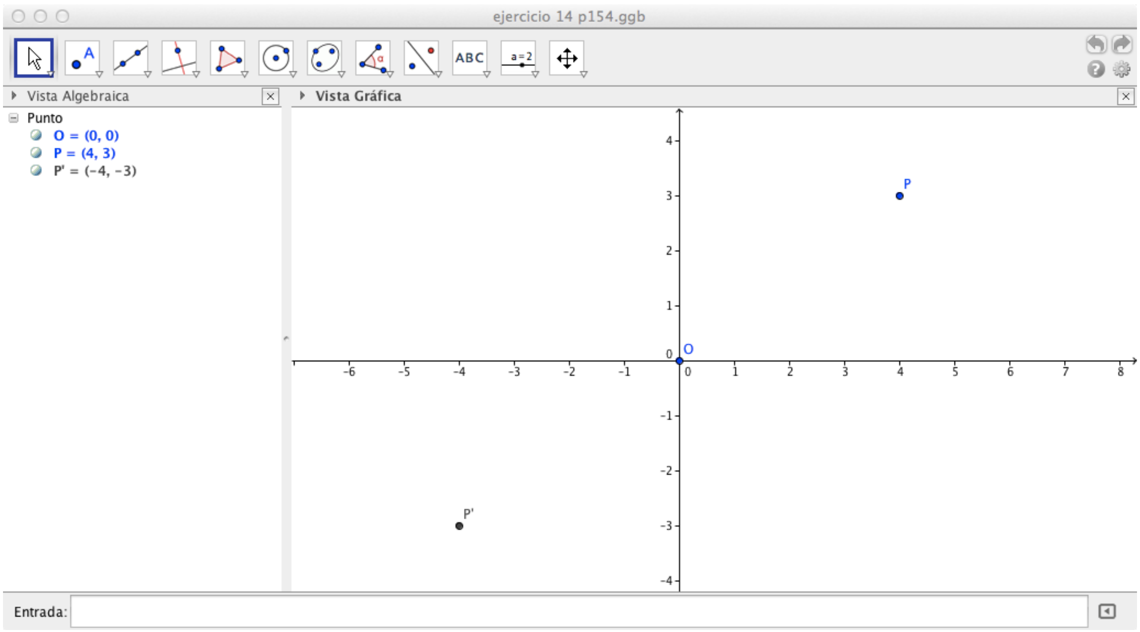
Ejercicio resuelto (p 154):

2. Indica en cada figura el centro y los ángulos de giro que transforman un triángulo equilátero, un cuadrado y un hexágono regular en sí mismos.

a) Centro de giro O. Ángulos de giro 120°, 240°, 360° y sus opuestos.
b) Centro de giro O. Ángulos de giro 90°, 180°, 270°, 360° y sus opuestos.
c) Centro de giro O. Ángulos de giro 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360° y sus opuestos.

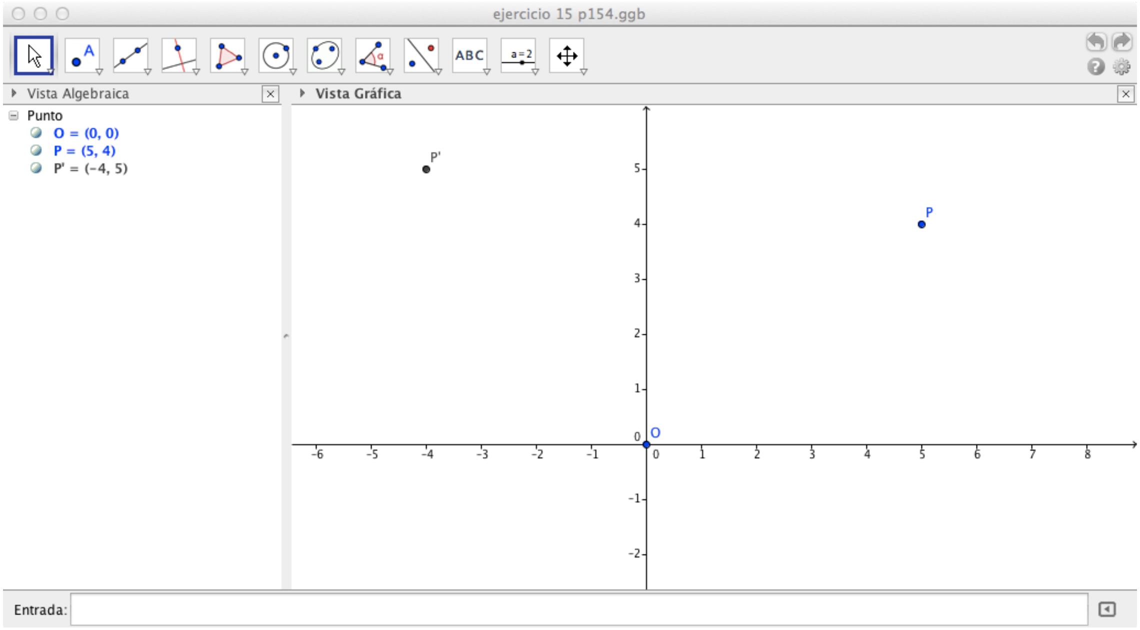
Ejercicios (p154):

14. Dibuja unos ejes de coordenadas en un papel cuadriculado y señala el punto P(4,3).
¿Cuáles son las coordenadas del punto P’ que se obtiene al girar 180° el punto P tomando como centro de giro el origen de coordenadas?



Las coordenadas del punto P’ son (-4,-3).

15. Dibuja unos ejes de coordenadas en un papel cuadriculado y señala el punto P(5,4).
¿Cuáles son las coordenadas del punto P' que se obtiene al girar 90° el punto P tomando como centro de giro el origen de coordenadas?

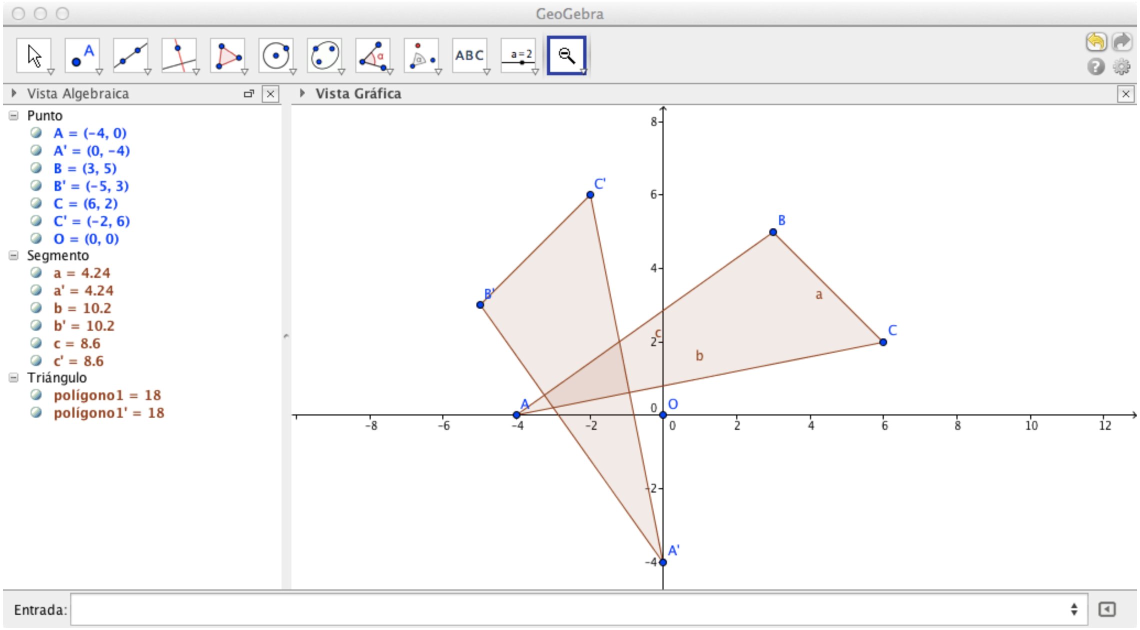


Las coordenadas del punto P' son (-4,5).

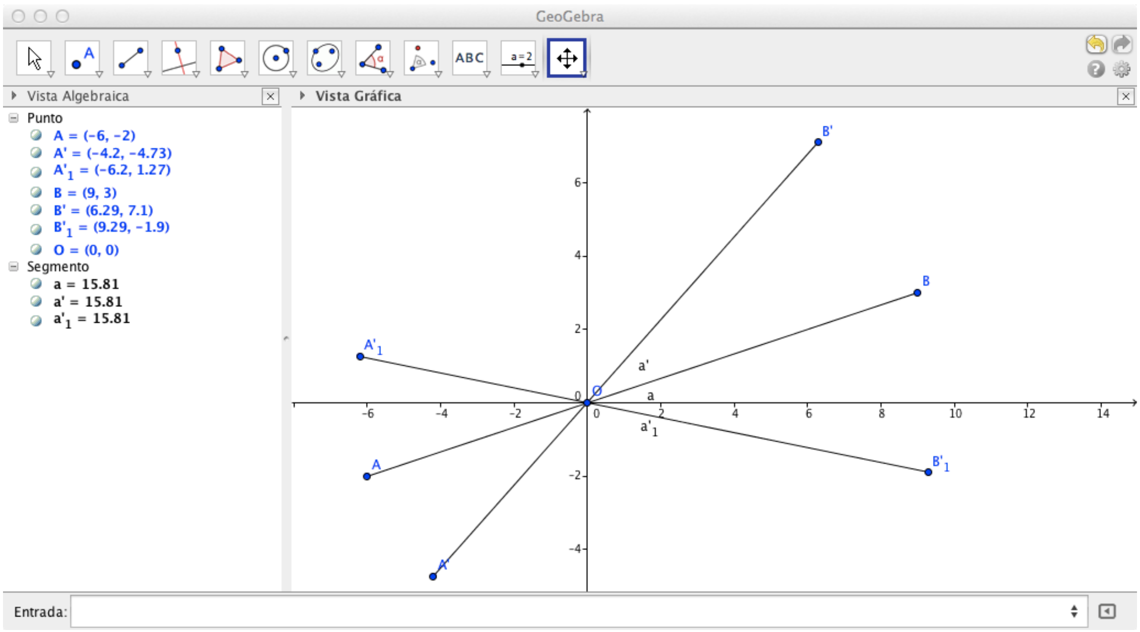
16. ¿Cuáles son los giros posibles que trasforman el octógono en sí mismo?
Los giros que trasforman el octógono regular en sí mismo son 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°, 360°.

Ejercicios (p 162):

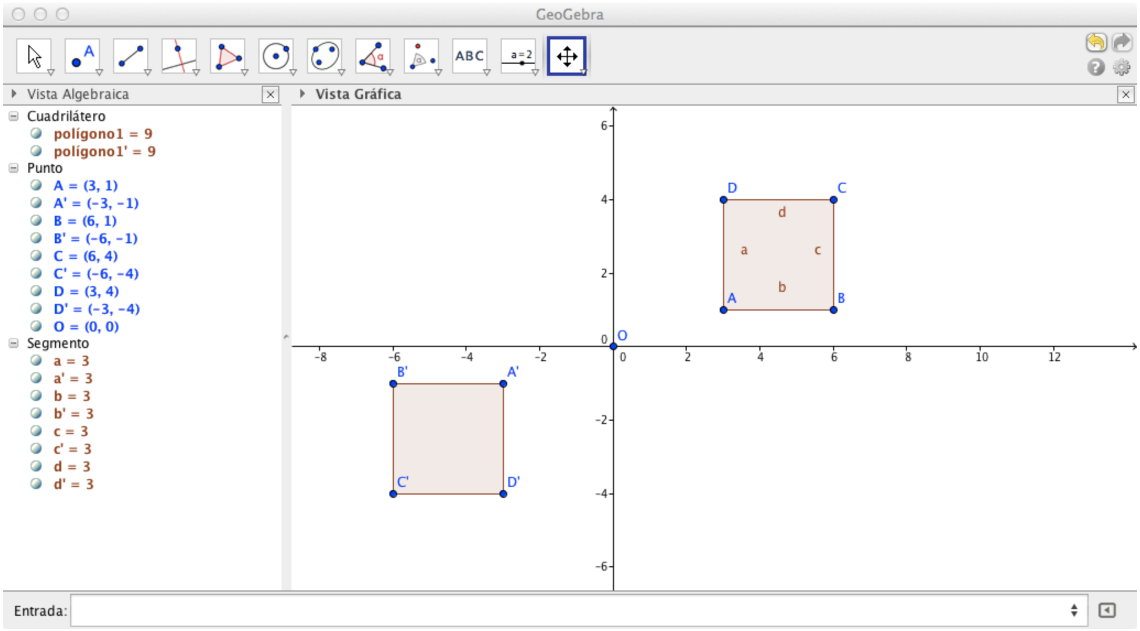
48. Considera el triángulo de la figura. Realiza un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 90°.



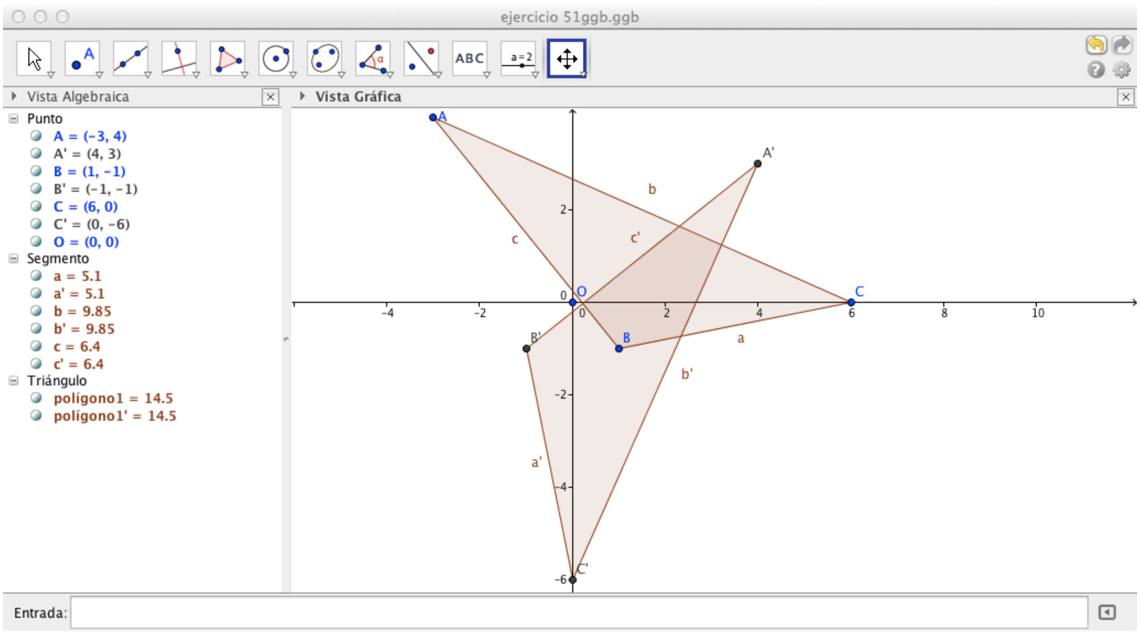
49. Dibuja el trasformado del segmento AB mediante un giro de centro O y amplitud 30° y .30°.



50. Dibuja el homólogo del cuadrado de vértices A(3,1), B(6,1), C(6,4) y D(3,4) en un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 180°.



51. Dibuja un triángulo de vértices A(-3,4), B(1,-1) y C(6,0) y aplícale un giro de centro el origen y amplitud -90°. ¿cuáles son las coordenadas de los vértices del nuevo triángulo?

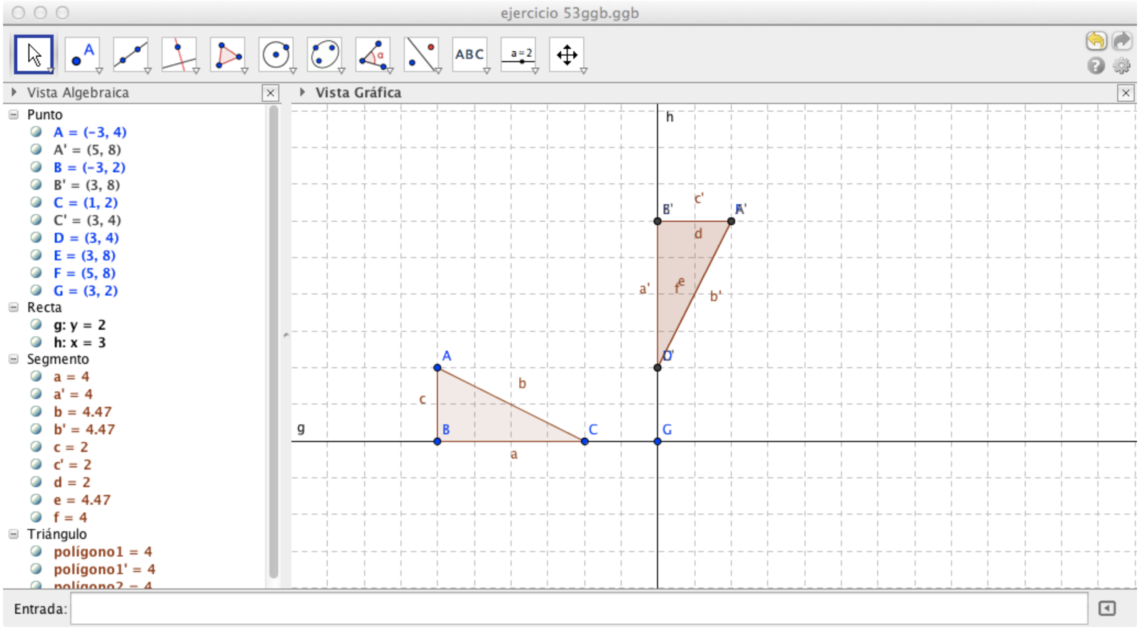


Las coordenadas de los vértices del nuevo triángulo son A(4,3), B(1,-1) y C(0,-6).

52. Los puntos A(4,3) y B(-3,4) son homólogos en un giro de centro el origen de coordenadas, ¿cuál es la amplitud de giro?

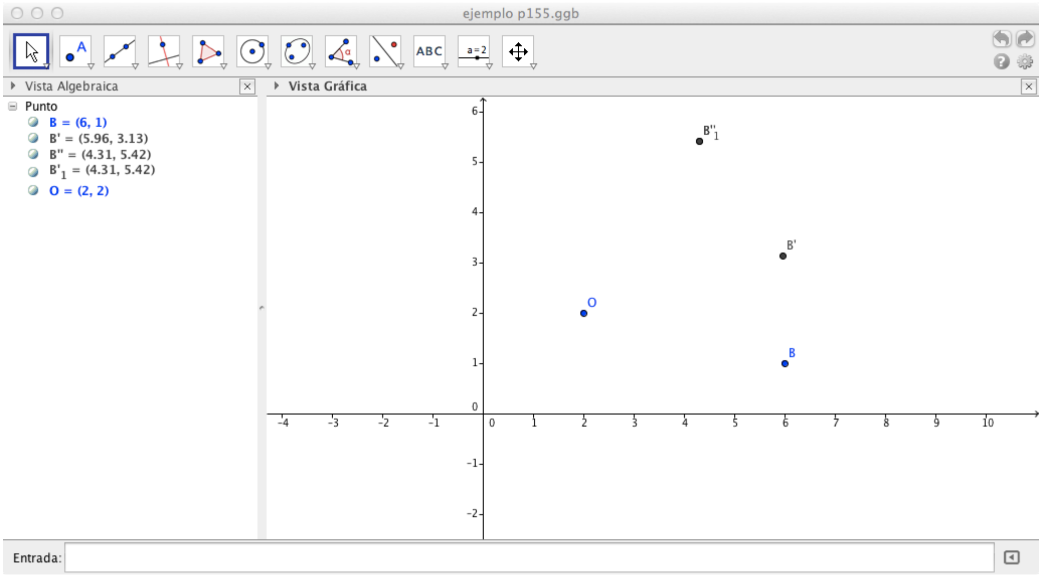
La amplitud de giro son 90°, porque es un ángulo recto.

53. Encuentra el centro y la amplitud del giro que trasforma la figura roja en su homóloga azul.



EL centro es G y la amplitud de giro es 90°, porque es un ángulo recto.

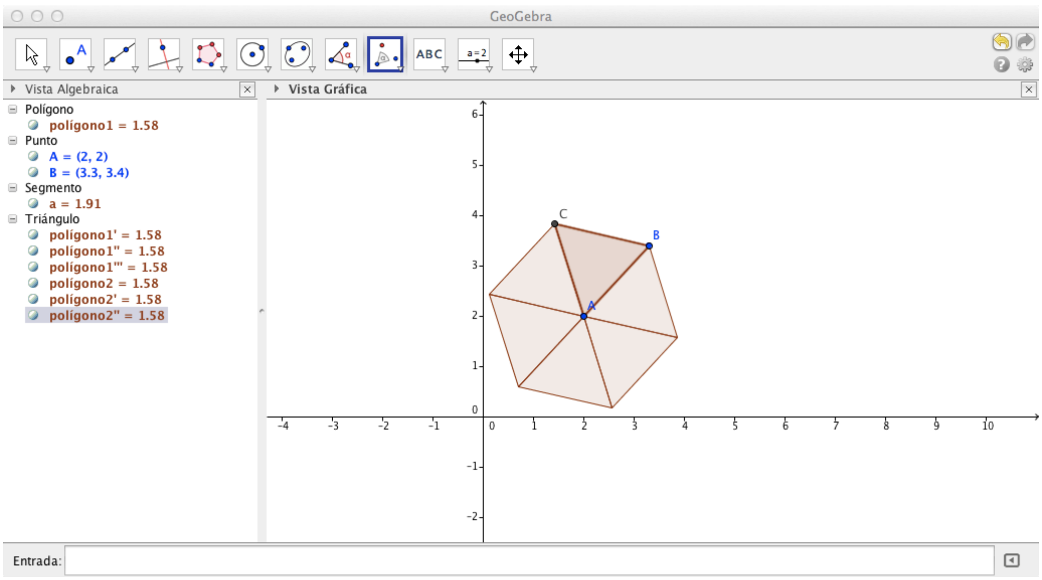
La aplicación sucesiva de giros de centro O y amplitudes a y b es otro giro de centro O y amplitud a+ b.



Con centro en el punto O, giramos el punto P un ángulo de 30° y obtenemos el punto P'. A continuación, con el mismo centro O, giramos el punto P' un ángulo de 40° y obtenemos el punto P''. Esta aplicación sucesiva de giros del mismo centro es equivalente a un giro de centro O y ángulo de giro igual a la suma de ángulos es decir, 70°.

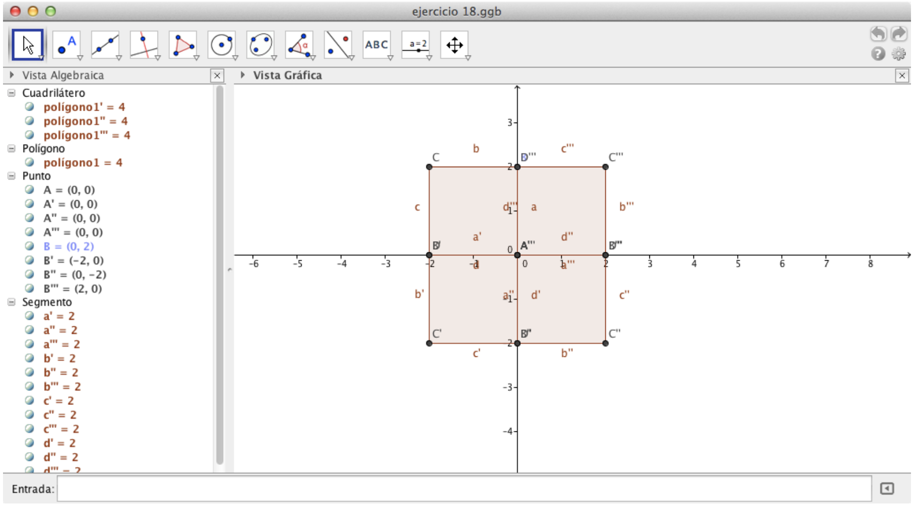
Ejercicios (p 155):

17. Dibuja un triángulo equilátero ABC. Con centro A gira el triángulo un ángulo de 60°. Si repites este proceso con los triángulos que vas obteniendo, ¿qué figura resulta cuando vuelves a la dada?



Se obtiene un hexágono

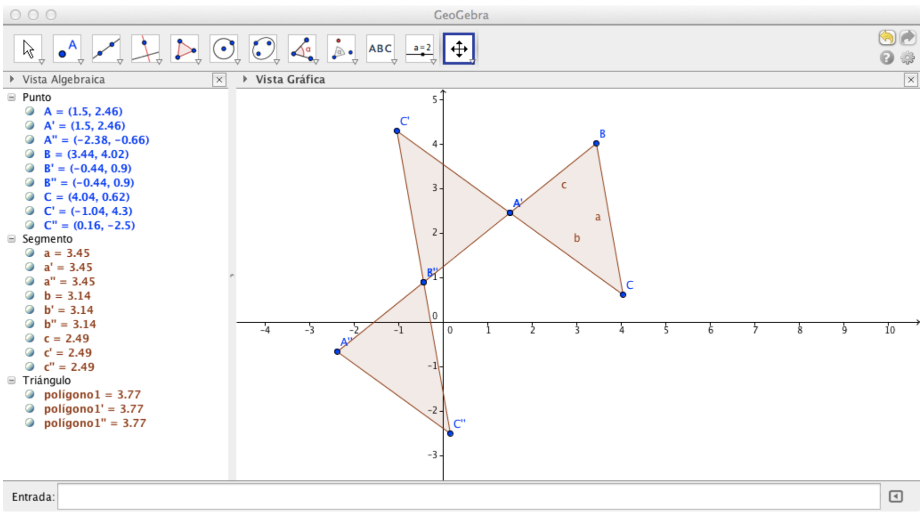
18. Dibuja un cuadrado ABCD. Con centro A gira el cuadrado un ángulo de 90°. Si repites este proceso con los cuadrados que vas obteniendo, ¿qué figura resulta cuando vuelves a la original?



Un cuadrado más grande.

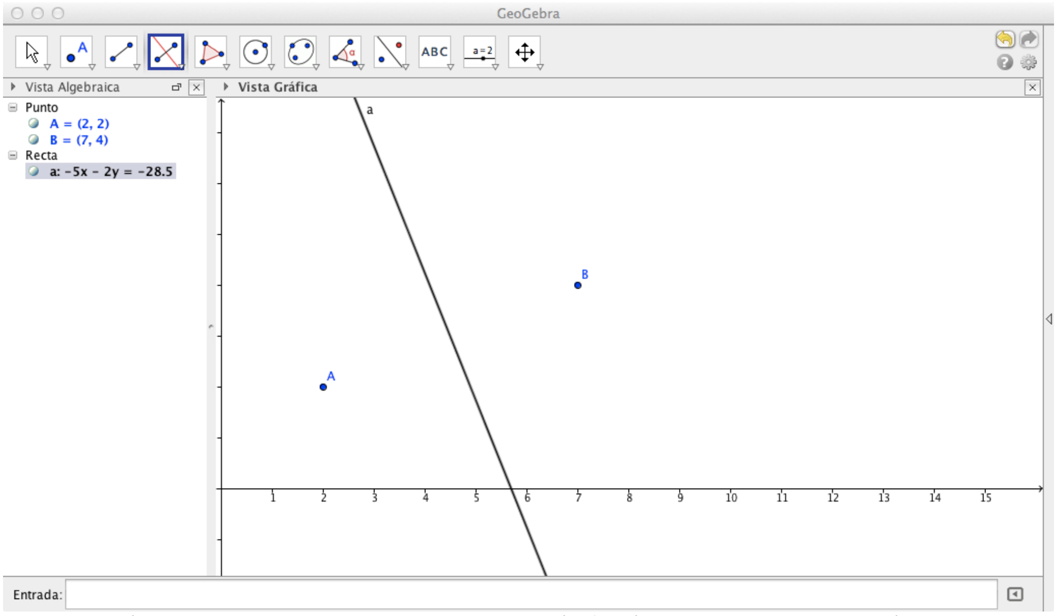
19. A una figura se le aplica un giro de centro O y amplitud 200° y, a continuación, un nuevo giro del mismo centro y ángulo a. ¿qué valor positivo debe tener a para que la figura vuelva a su primera posición?
El valor de a tiene que ser 160°, ya que para que la figura vuelva a su posición inicial tiene que dar u giro completo, es decir uno de 360°. Por lo tanto hay que restarle a 360° los 200° que ya hemos girado.

20. Dibuja un triángulo equilátero ABC. Con centro A gira el triángulo un ángulo de 180°. Después aplica al triángulo obtenido AB'C' un giro de centro B y amplitud -180°.



7.4. SIMETRÍA AXIAL.

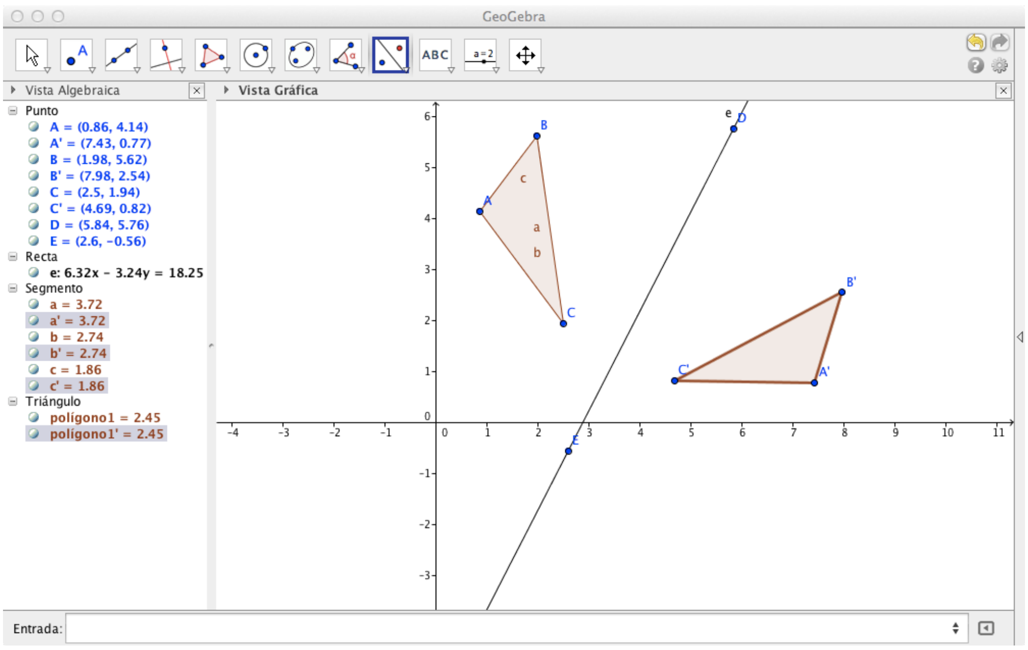
Dos puntos P y P’ son simétricos respecto de un eje e, cuando el eje e es mediatriz del segmento PP’.
La simetría respecto de un eje se llama simetría axial.



En este ejemplo, los puntos A y B son simétricos respecto al eje a. Por lo tanto, es simetría axial.

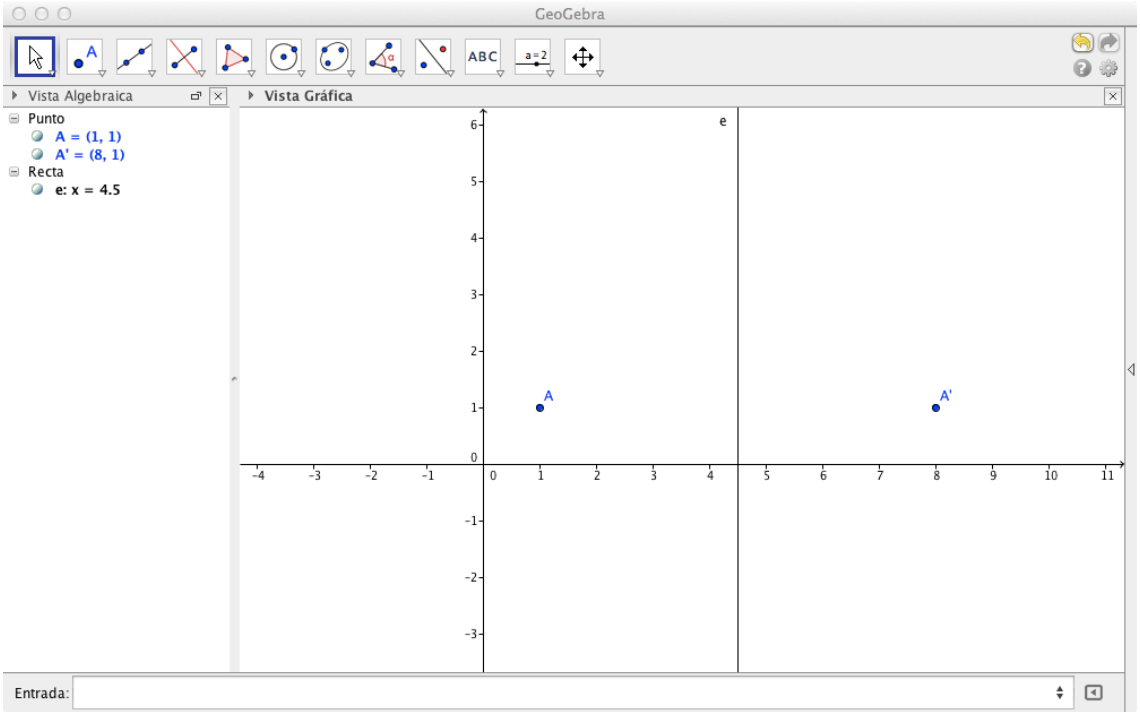
Ejercicio resuelto (p 156):

3. Dibuja la figura simétrica de un triángulo ABC respecto de una recta exterior e.

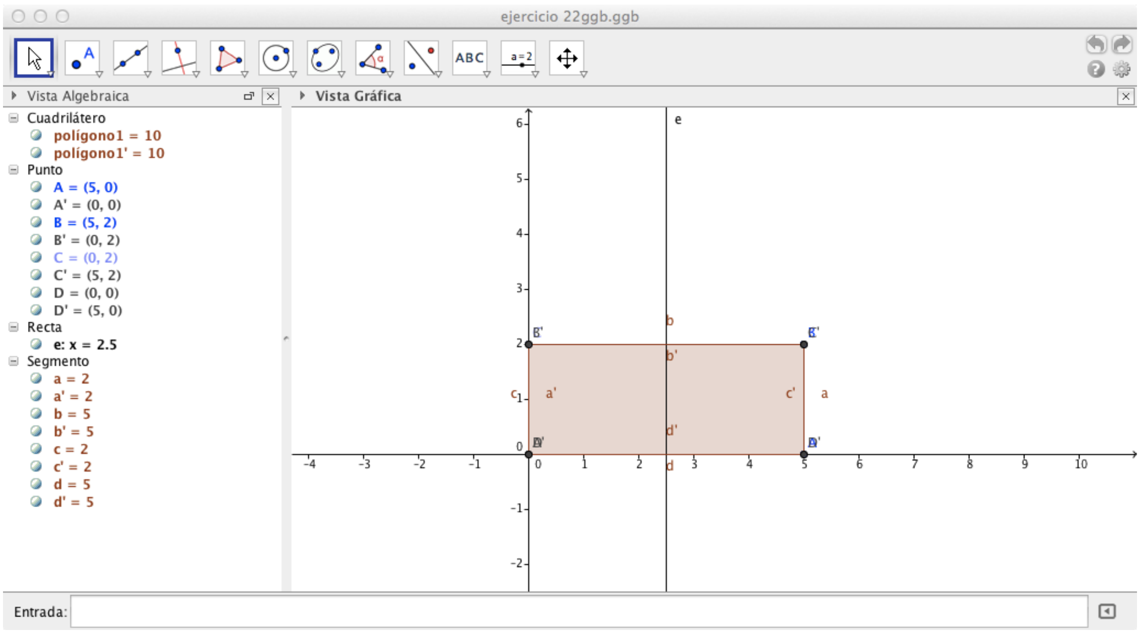


Ejercicios (p 156):

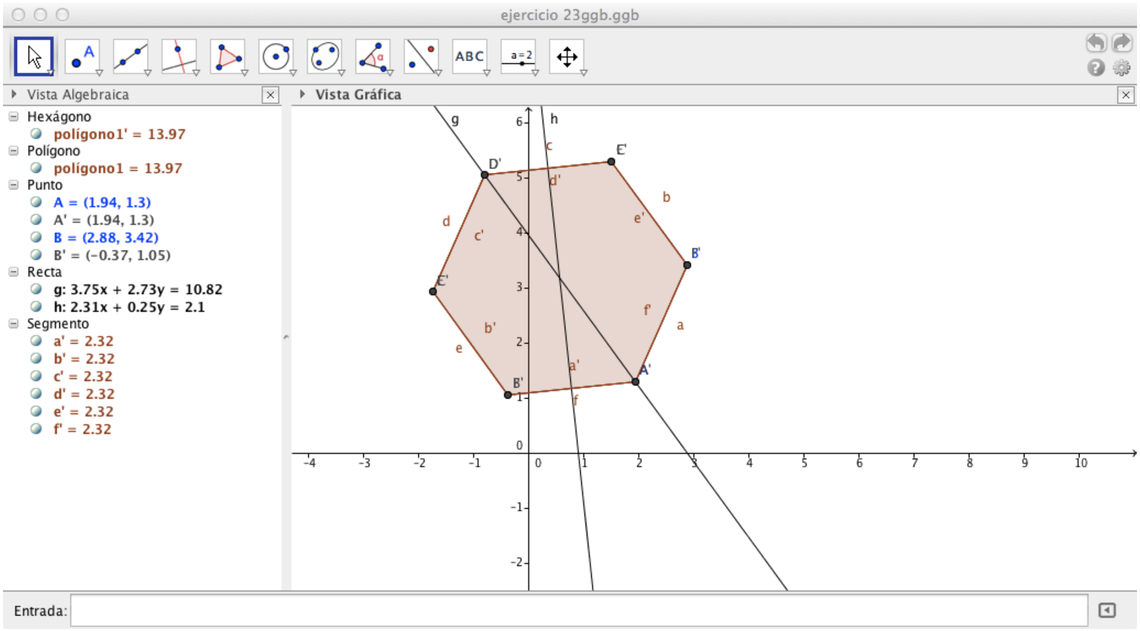
21. Dos puntos A y A' son simétricos respecto de un eje e. Dibuja el eje.



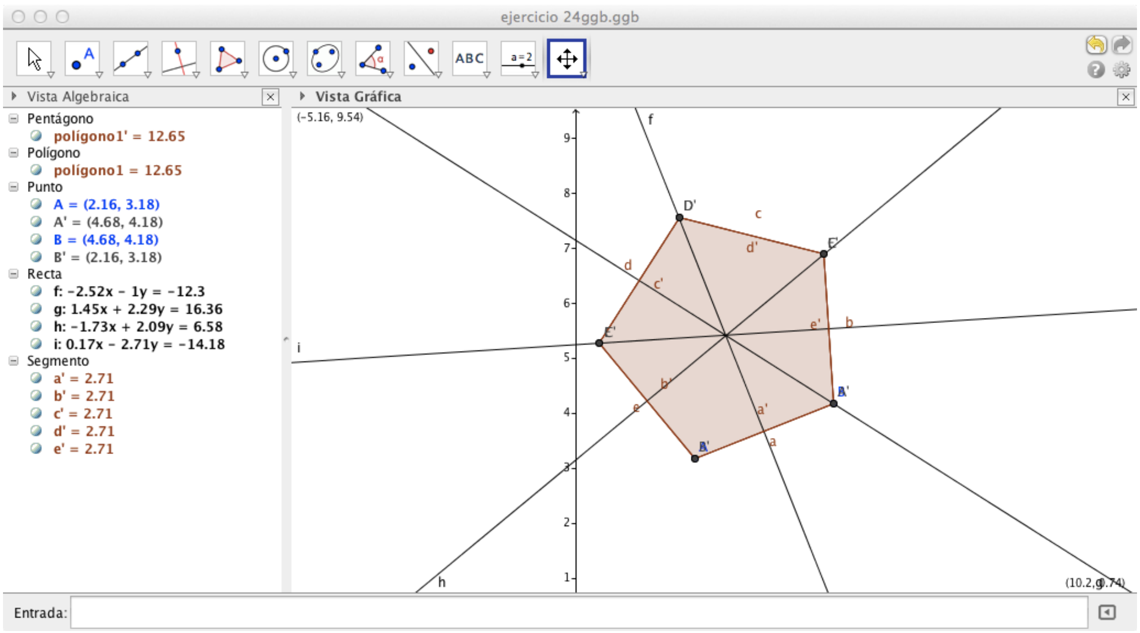
22. Dibuja un rectángulo ABCD. Construye con regla y compás el eje de simetría que transforma A y B en D y C.



23. Dibuja un hexágono regular. Construye con regla y compás un eje de simetría de sus vértices.



24. Dibuja un pentágono regular. Construye con regla y compás sus ejes de simetría.

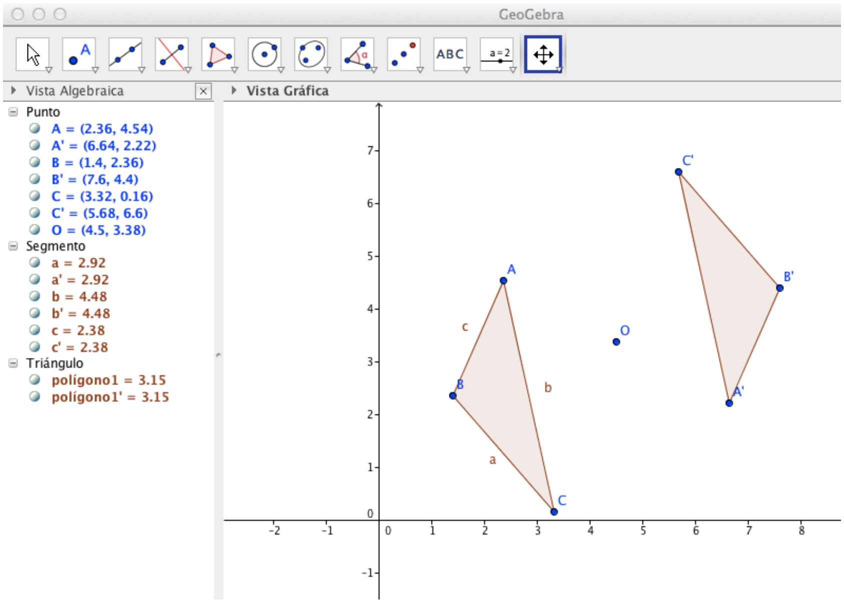


7.5. SIMETRÍA CENTRAL:

Dos puntos P y P’ son simétricos respecto de un punto O cuando O es el punto medio del segmento PP’.

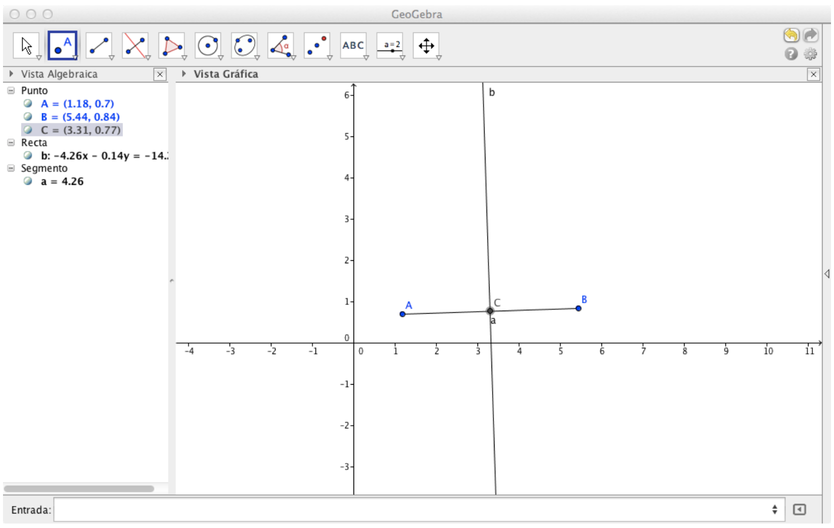
Ejercicio resuelto (p157):

4. Dibuja la figura simétrica del triángulo ABC respecto del punto O.

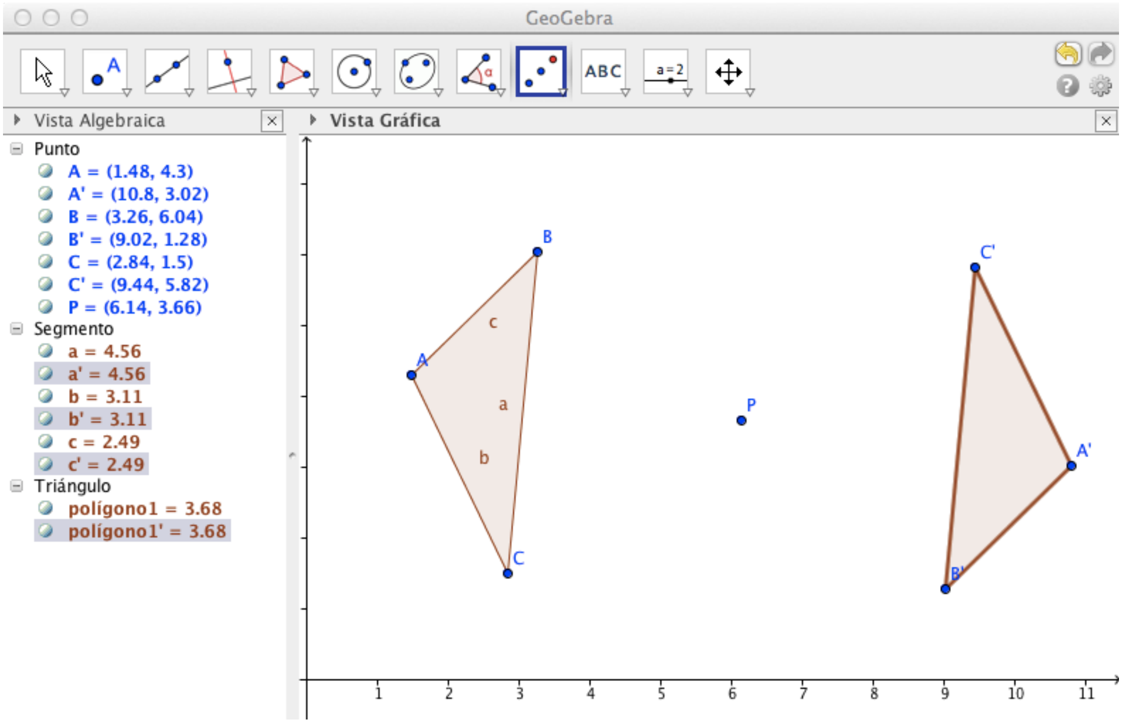


Ejercicios (p 157):

25. Dibuja dos puntos cualesquiera A y A’ y encuentra su centro de simetría.

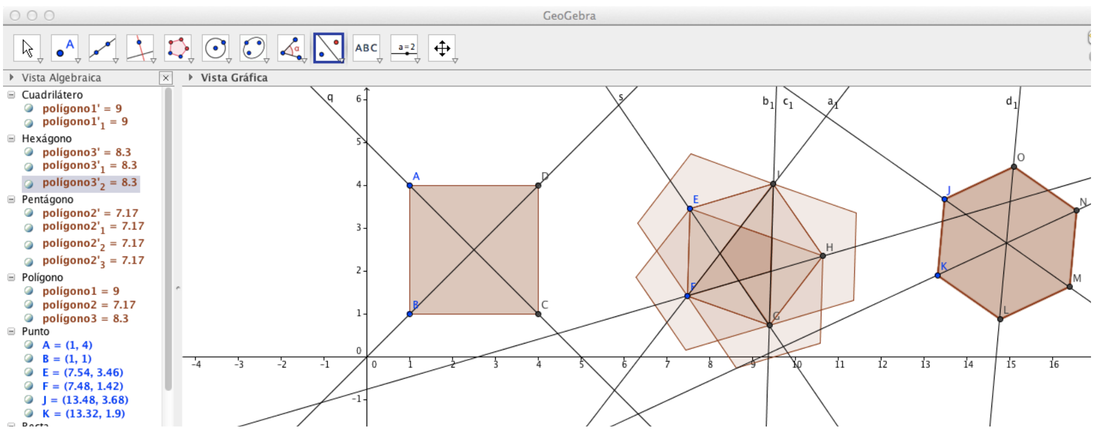


26. Dibuja un triángulo ABC y su simétrico A’B’C’ respecto de un punto P. ¿Tienen el mismo sentido de giro según el orden de los vértices?



No tienen el mismo sentido de giro según el orden de los vértices.

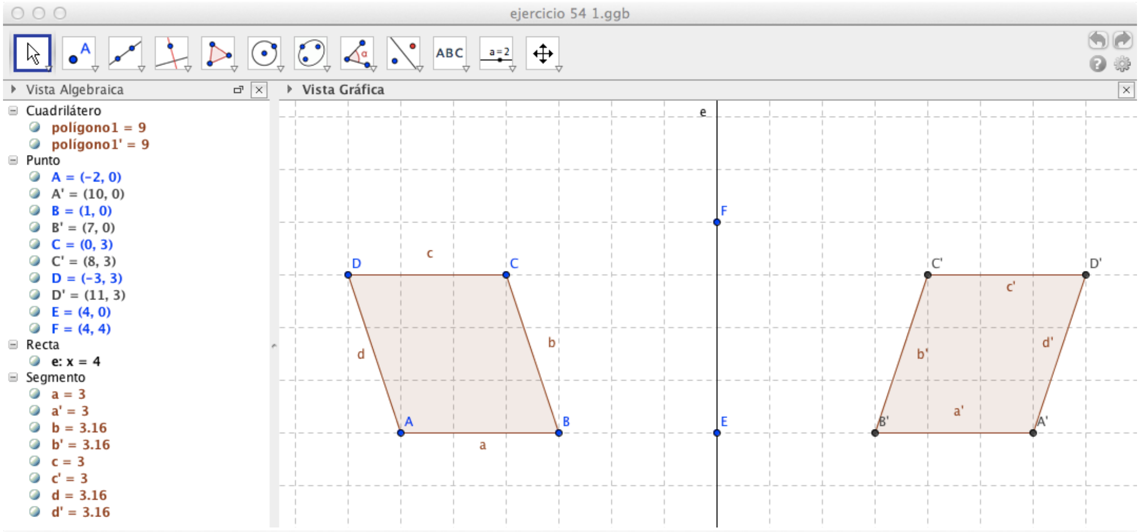
27. Comprueba si los vértices son simétricos respecto del punto donde se cortan sus diagonales:
a) En un cuadrado
b) En un pentágono
c) En un hexágono

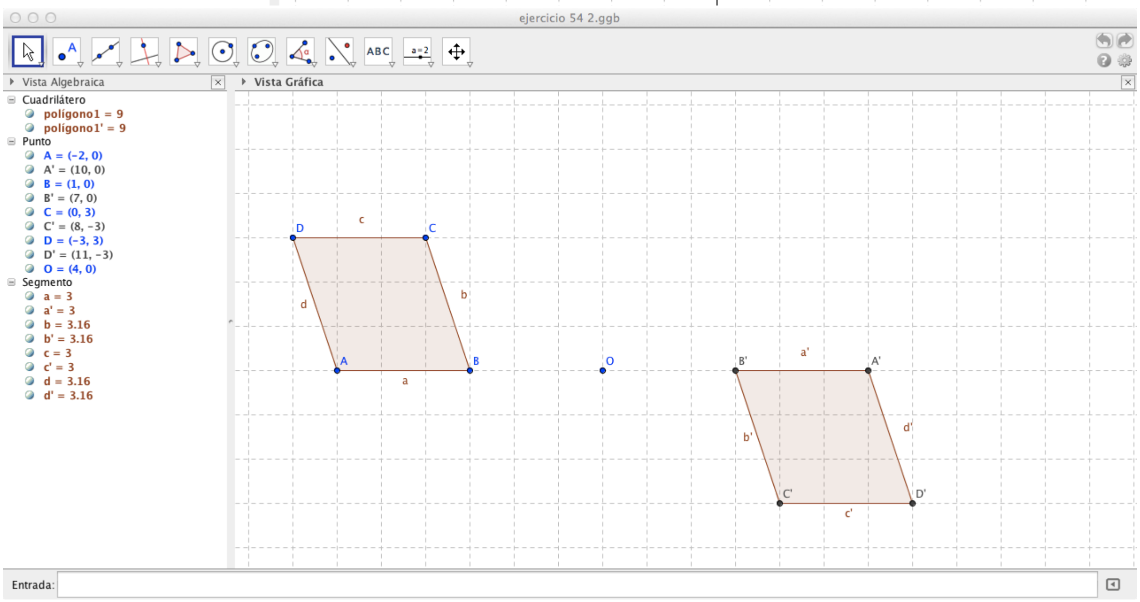


En un cuadrado si, en un pentágono no y en un hexágono si.

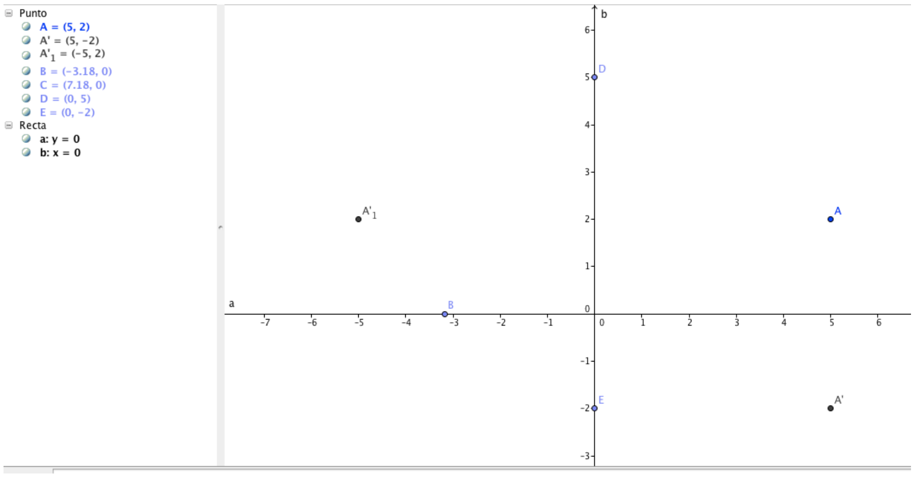
Ejercicios (p 162 y 163):

54. Dibuja la figura simétrica de la dada:
a) respecto al eje e.
b) respecto al punto O.

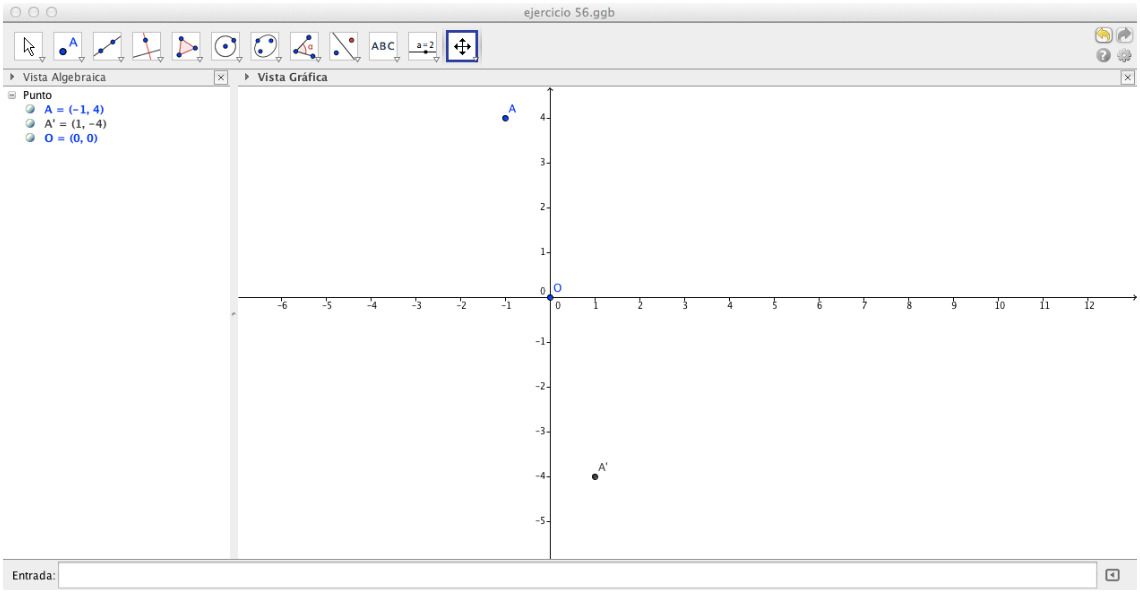




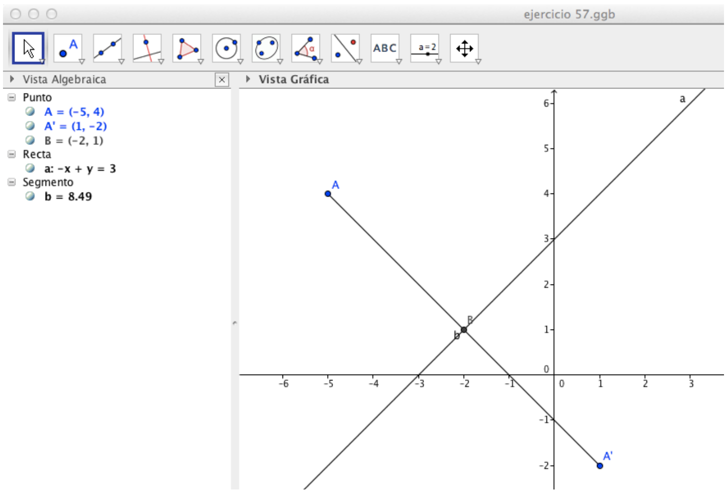
55. Construye el punto simétrico del punto A(5,2) respecto a el eje OX y el eje OY.



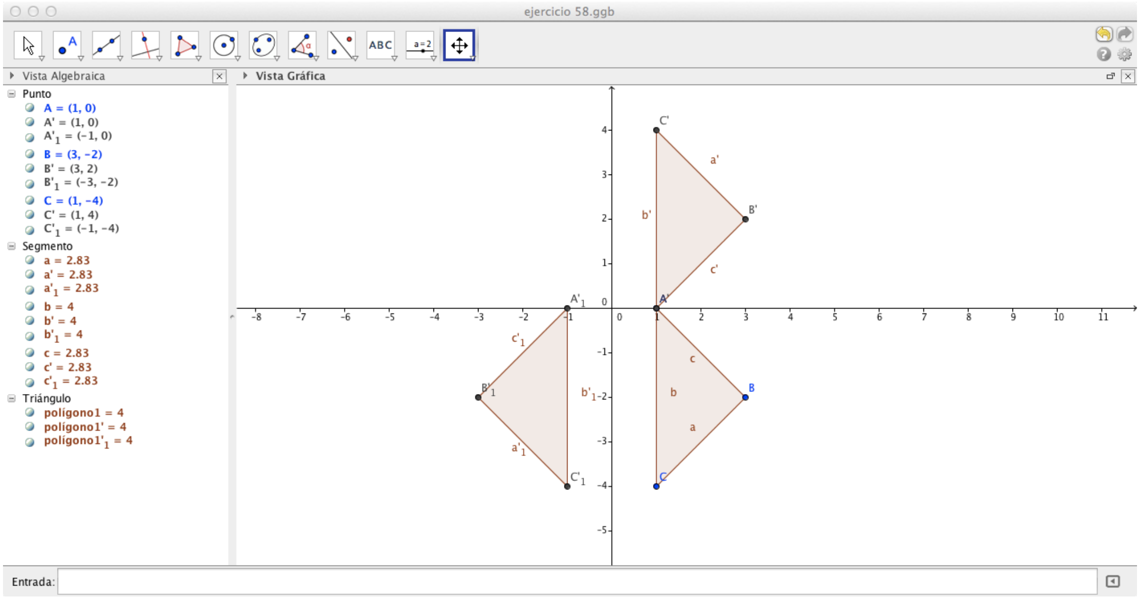
56. Construye el punto simétrico del punto A(-1,4) respecto al origen de coordenadas.



57. Dados los puntos A y A’ del dibujo, construye su eje de simetría y su centro de simetría.

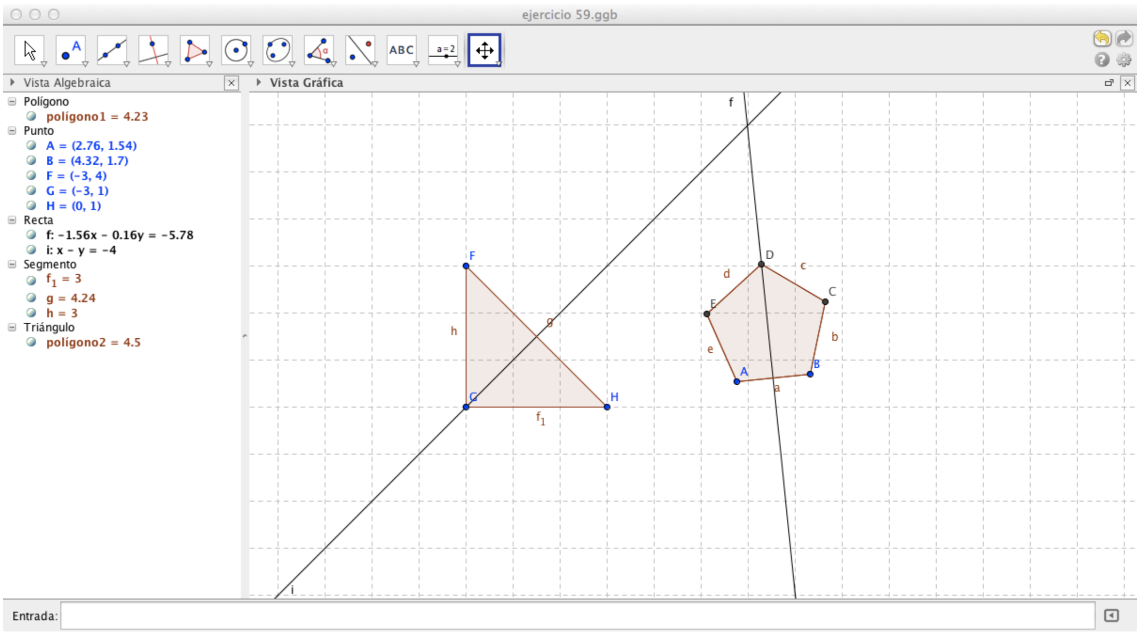


58. Calcula las coordenadas del simétrico del triángulo de vértices A(1,0), B(3,-2) y C(1,-4).
a) Respecto al eje OX
b) Respecto al eje OY

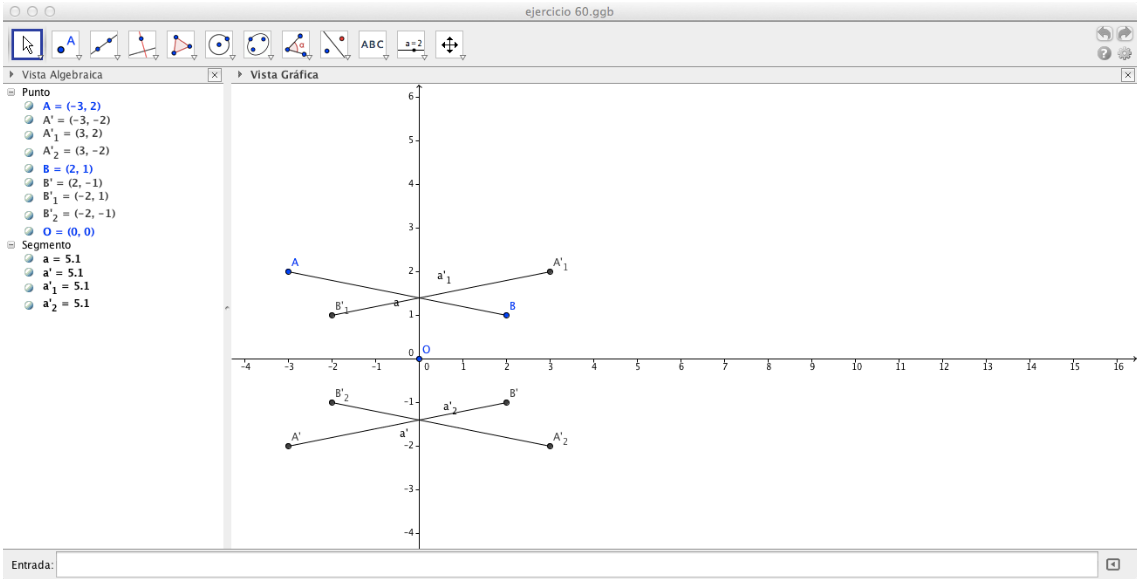


a) A'(1,0), B'(3,2) y C'(1,4)
b) A''(-1,0), B''(-3,-2) y C''(-1,-4)

59. Señala un eje de simetría en un:
a) Pentágono regular.
b) Triángulo rectángulo isósceles.



60. Calcula las coordenadas de los puntos simétricos de los extremos del segmento AB, donde A(-3,2) y B(2,1).
a) Respecto al eje OX.
b) Respecto al eje OY.
c) Respecto al origen de coordenadas.
d) Dibuja los apartados anteriores.



a) A(-3,-2) B(2,-1)
b) A(3,2), B(-2,1)
c) A(3,-2), B(-2,-1)

Cuestiones para aclararse (p 163):

64. Una traslación lleva el origen de coordenadas al punto P(5,3). ¿Cuál es su vector guía?
Origen de coordenadas + P= (0+5,0+3)= (5,3)
El vector guía es u(5,3).

65. ¿En qué recta se trasforma una recta paralela al vector guía de una traslación?
En sí misma.

66. Una traslación de vector guía u(-2,5) transforma un punto P en otro P'. ¿cuál es el vector guía que trasforma el punto P' en el punto P?
El vector guía que transforma P' en P es v(2,-5).

67. En un cuadrado tomamos el punto de corte de sus diagonales como centro de giro. ¿En qué figura se trasforma el cuadrado si aplicamos un giro de amplitud 90°? ¿Y de 180°? ¿Y de 270°?
En todos los giros (90°, 180° y 270°) se transforma en sí mismo.

68. ¿En qué figura se trasforma un círculo al que se le aplica un giro de centro el centro del círculo y de amplitud un ángulo a cualquiera?
Se trasforma en el mismo círculo, porque al ser redondo y tener el mismo centro da igual qué ángulo lo gires porque seguirá siendo el mismo círculo.

69. Juan y Andrés se encuentran después de mucho tiempo sin verse:
¿Cómo te va la mida? – pregunta Juan.
¡Muy diferente! – contesta Andrés –. Mi vida ha dado un giro de trescientos sesenta grados.
¿Qué error matemático encuentras en la contestación de Andrés?
Que si giras algo 360°, esto que hayas girado continuará igual.

70. ¿En qué se trasforma por una simetría axial una recta perpendicular al eje de simetría?
En la misma recta pero con la y negativa.

71. ¿Qué puntos permanecen invariantes por una simetría axial? ¿Y por una central?
En una simetría axial, permanecen invariantes los que están en el eje. Y en una central, permanecen invariantes los que se encuentran en el punto de giro.

72. Un punto permanece invariante por una traslación de vector guía u(a,b). ¿Cuánto valen a y b?
a y b valen 0.

73. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un polígono regular?
Tiene tantos ejes como lados o vértices.

74. En un triángulo rectángulo encontramos un eje de simetría. ¿Qué tipo de triángulo es? ¿Cuál es el eje de simetría?

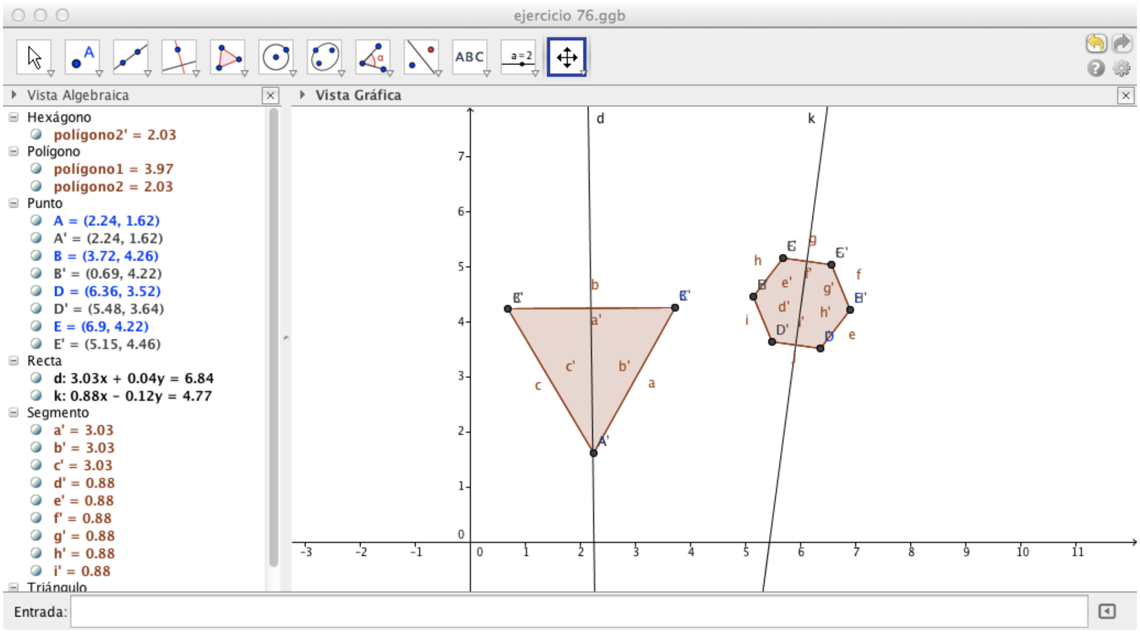
Es un triángulo rectángulo isósceles. Su eje de simetría es el que pasa por el vértice que se encuentra en el medio de las dos rectas que forman el ángulo recto.

Problemas para aplicar (p 164):

75. ¿Qué giro efectúa la aguja pequeña de un reloj desde las doce a las doce y veinticinco?

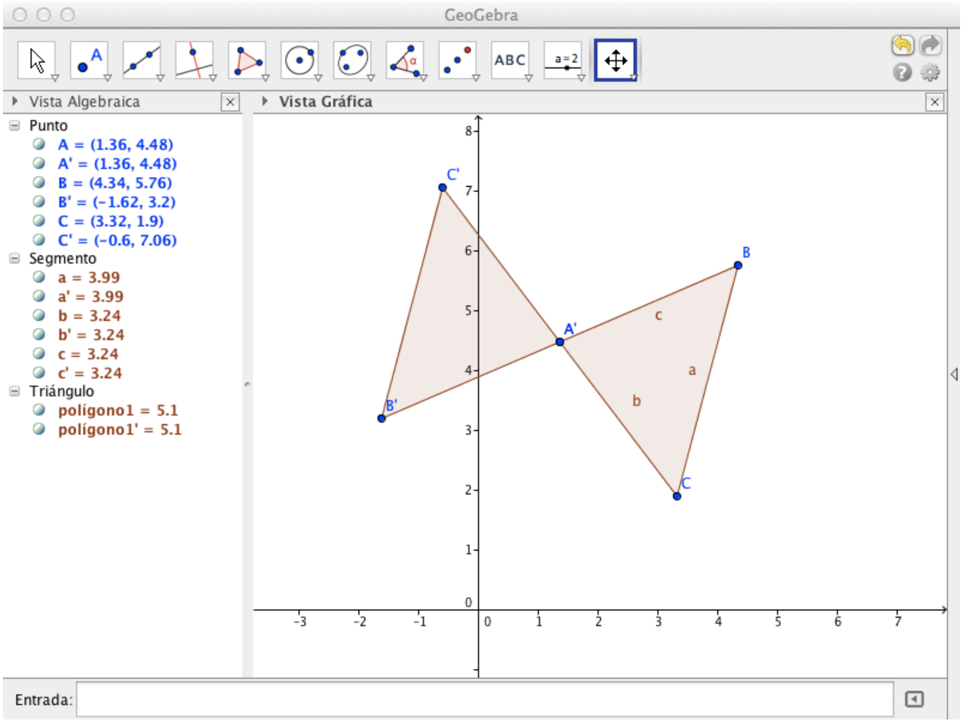
Efectúa un giro de 150°.

76. Investiga si las siguientes señales de tráfico poseen simetría axial o central y, en su caso, indica un eje o un centro de simetría.

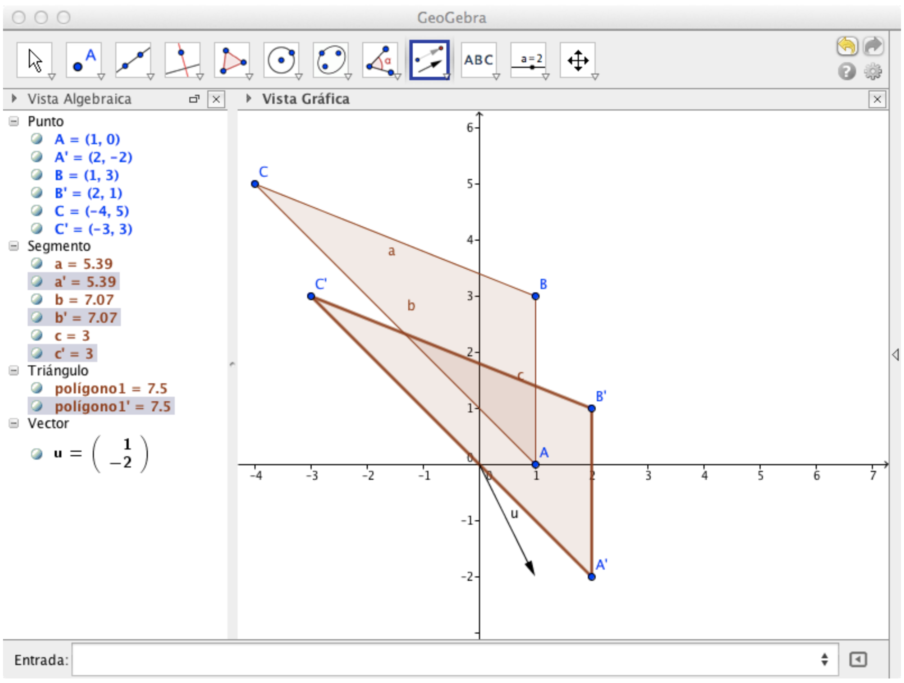


Las dos tienen simetría axial.

77. Dibuja un triángulo ABC y aplícale una simetría central de centro el punto A.

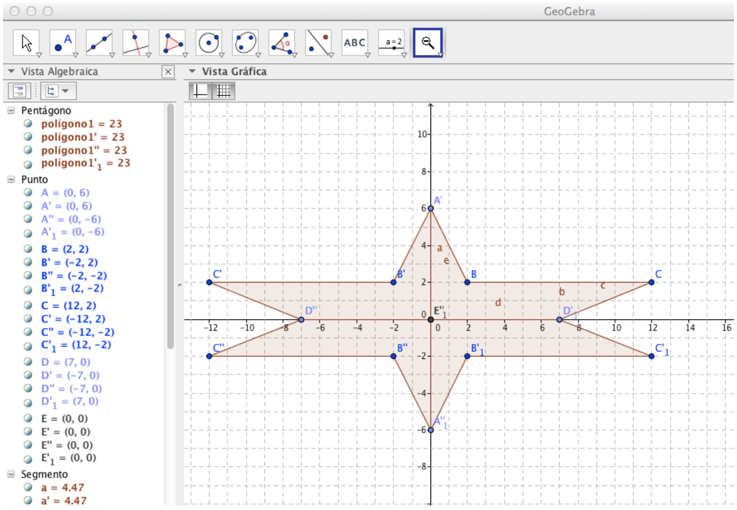


78. A un triángulo de vértices A(1,0), B(1,3) y C(-4,5) se le aplica una traslación de vector guía u(1,-2). Halla las coordenadas de los puntos homólogos de los vértices y dibuja el triángulo resultante.

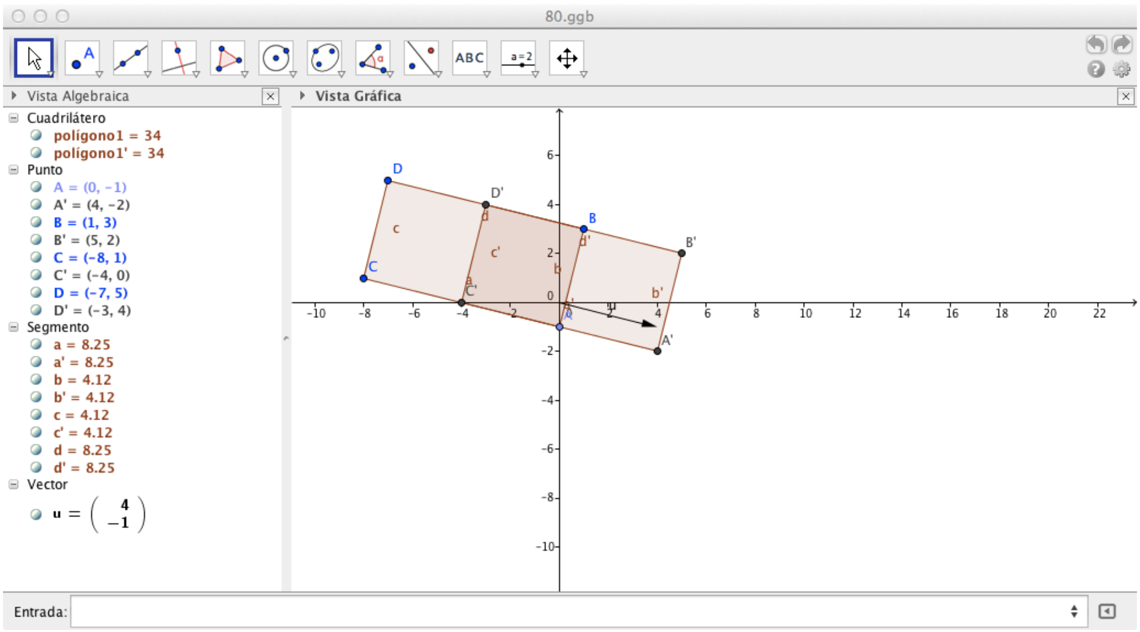


Las coordenadas de los puntos homólogos de los vértices son A’(2,-2), B’(1,3) y C’(-3,3)

79. Sabemos que una figura, de la que solo tenemos un trozo, es simétrica respecto a los ejes e y e’. Completa su dibujo.

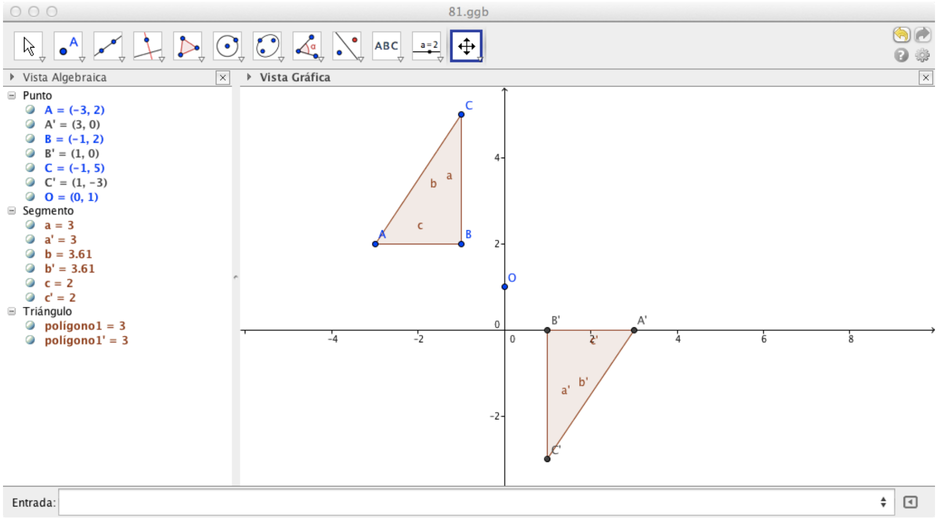


80. Aplícale al rectángulo del dibujo una traslación de vector guía u(4,-1). Escribe las coordenadas de los vértices A,B,C,D y sus correspondientes homólogos.



Las coordenadas del rectángulo son A(0,-1), B(1,3), C(-8,1) y D(-7,5). Y las homólogas son A(4,-2), B(5,2), C(-4,0) y D(-3,4).

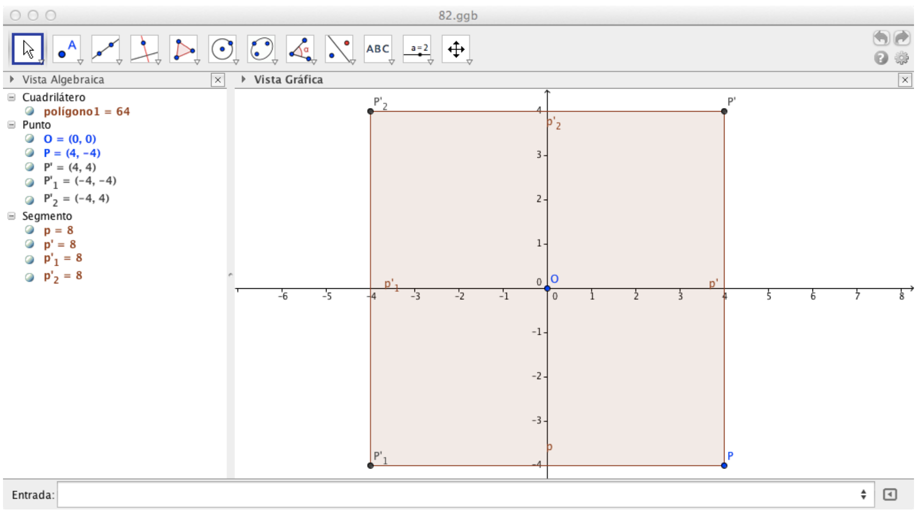
81. A un triángulo de vértices A(-3,2), B(-1,2) y C(-1,5) se le aplica una simetría de centro O(0,1). Halla las coordenadas de los puntos simétricos de los vértices y dibuja el triángulo resultante.



Las coordenadas de los vértices son A'(3,0), B'(1,0) y C'(1,-3).

82. Dado el punto P(4,-4), calcula su simétrico al aplicarle:

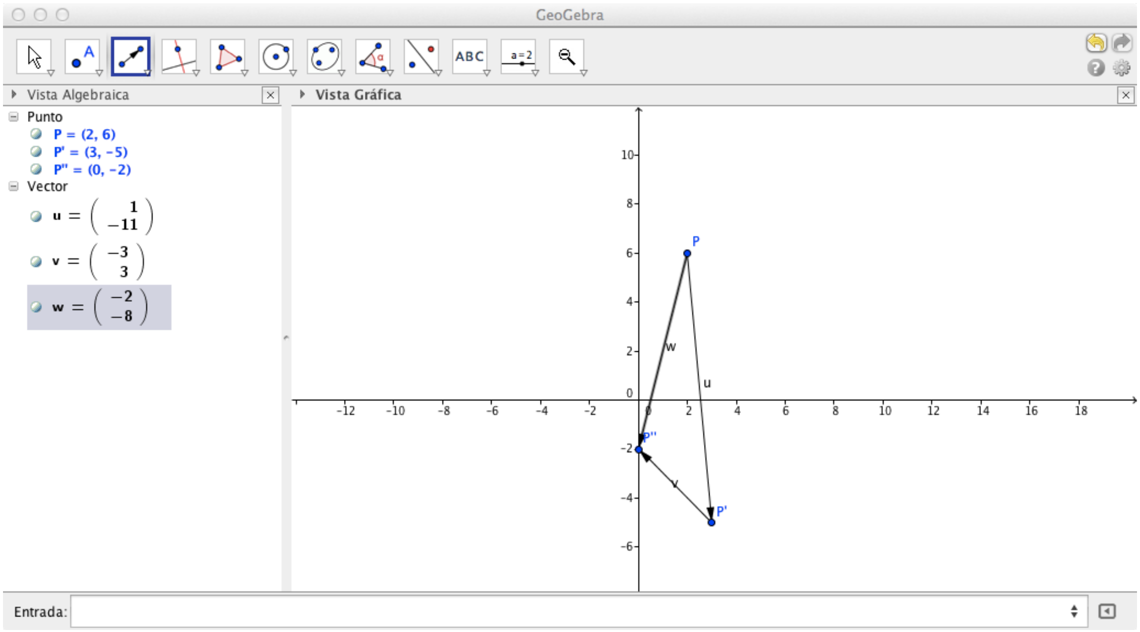
a) Una simetría de eje OX.
b) Una simetría de eje OY.
c) Una simetría de centro el origen de coorenadas.
d) Describe la figura que se obtiene al unir los cuatro puntos.



a) (4,4)
b) (-4,-4)
c) (-4,4)
d) Un cuadrado

Refuerzo (p. 165):

89. (Traslaciones) A un punto P(2,6) se le aplica una traslación de vector guía u y se obtiene su trasformado, P’(3,-5). A su vez, a P’ se le aplica otra traslación de vector guía v y se obtiene P’’(0,-2). Averigua cuál es el vector guía que traslada P a P’’.

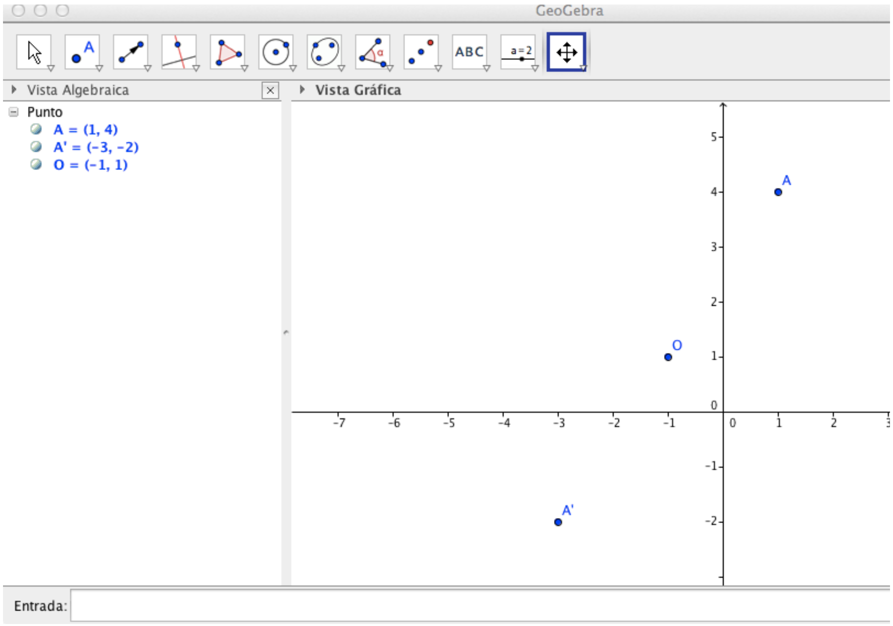


El vector guía que trasforma el punto P en P’’ es w(-2,-8).

90. (Giros) A una figura se le aplica un giro de centro O y amplitud de 200° y a continuación, un nuevo giro con el mismo centro y amplitud 230°. Explica cuál es el giro resultante.

El giro resultante será la suma de los dos giros sucesivos.
200° + 230° = 430°

93. (Simetrías) Halla las coordenadas del punto simétrico al punto A(4,2) por una simetría de centro O(-1,1).



El punto simétrico a A es A'(-3,-2).