

STŘEPY Z HUDEBNÍ AKUSTIKY

Jak mistrná struna málem zmátla Bruna

Žán Pól Kastról



9. února 2024



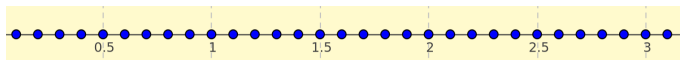
Obsah

1	Úvod – vlna postupná a stojatá	2
2	Módy kmitání struny upevněné na obou koncích	4
2.1	Základní frekvence f_1	5
2.2	Vyšší harmonické frekvence f_2, f_3, f_4, \dots	6
2.3	Experiment – vybuzení módů struny pomocí nucených kmitů	9
3	Brnknutí na strunu upevněnou na obou koncích	10
3.1	Odvození vzorce pro pohyb struny	12
3.2	Pohyb struny – aplet v GGB	18
3.2.1	Napnutí struny v bodě A v čase $t = 0$	18
3.2.2	Pohyb struny v čase	22
3.3	Pohyb struny – zpomalená videa	22
3.3.1	Zpomalená videa z mobilu – je náš model chybný?	25
3.3.2	Náš model zachráněn – podleli jsme ilusi jevu „rolling shutter“	26
4	Další odkazy	29



1 Úvod – vlna postupná a stojatá

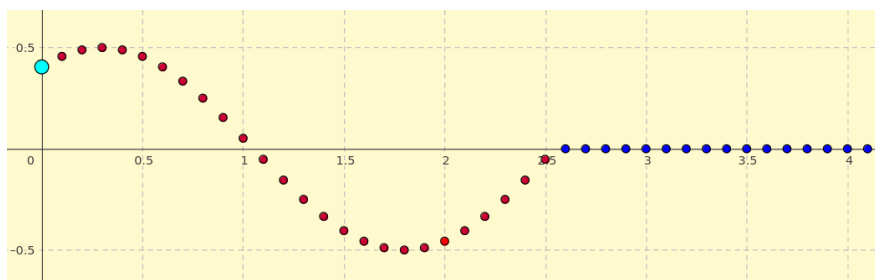
Pod pojmem **struna** si můžeme obecně představit řadu hmotných bodů propojených pružnou vazbou – malé hmotné kuličky propojené pružinkami.



Obr. 1: Struna

Bodová řada může být na obě strany teoreticky neomezená a pokračovat do nekonečna. Reálně je však každé prostředí omezené (nás bude za chvíli zajímat struna, která je na obou koncích upevněná.)

Již jsme se zabývali případem, kdy jedním z bodů začneme kmitat kolmo na bodovou řadu a díky vazbám se na struně začnou rozkmitávat další body a vzniká **postupná vlna příčná**.



Obr. 2: Postupná vlna **doprava**; první kmit šel **dolů**.

<https://www.geogebra.org/m/you33Q8Yr>

Odvodili jsme rovnici postupné vlny, která se šíří podél osy x **doprava**:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad (1)$$

respektive **doleva**:

$$y(x, t) = A \sin(kx + \omega t). \quad (2)$$



Rovnice (1) a (2) jsou odvozeny pro situaci, kdy první kmit šel **dolů**. Pokud půjde první kmit **nahoru**, bude mít vlna opačnou fázi a rovnice budou mít v závorkách členy kx a ωt prohozené (v apletu – viz odkaz v obr. 2 – lze nastavit směr prvního kmítu jezdcem):

$$y(x, t) = A \sin(\omega t \mp kx), \quad (3)$$

Připomeňme si jen, že $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je *úhlový vlnocet* a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je *úhlový kmitocet*.

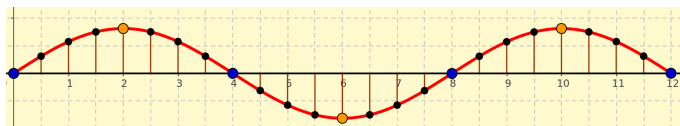
Dále jsme také probrali případ, kdy se proti sobě šíří dvě příčné vlny se stejnou amplitudou a frekvencí. Jejich složením (interferencí) vznikne **stojatá příčná vlna**.



Obr. 3: Vznik stojaté příčné vlny interferencí dvou stejných vln jdoucích proti sobě.

<https://www.geogebra.org/m/ExEzvNgy>

Ta je charakteristická tím, že nepostupuje ani doleva, ani doprava, ale jakoby stojí na místě. Přitom důležité jsou **uzly** a **kmitny**:



Obr. 4: Stojatá příčná vlna; modře uzly, žlutě kmitny.

<https://www.geogebra.org/m/ZrzQXB9f>

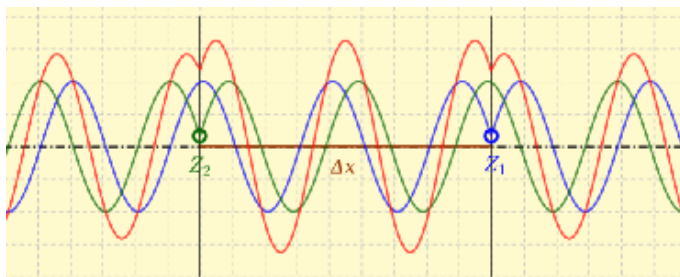
Odvodili jsme rovnici stojaté vlny, která vznikne součtem dvou stej-



ných vln, které postupují proti sobě

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (4)$$

Stojatou vlnu můžeme pozorovat třeba na vodní hladině na spojnici mezi dvěma zdroji (bodová řada tvořící „strunu“):



Obr. 5: Stojatá vlna na vodě mezi dvěma zdroji

<https://www.geogebra.org/m/e3w7qgvc>

Nás ale nyní budou zajímat stojaté vlny, které mohou vznikat na skutečné struně, která je upevněná na obou koncích – to je základ fungování všech strunných hudebních nástrojů.

2 Módy kmitání struny upevněné na obou koncích

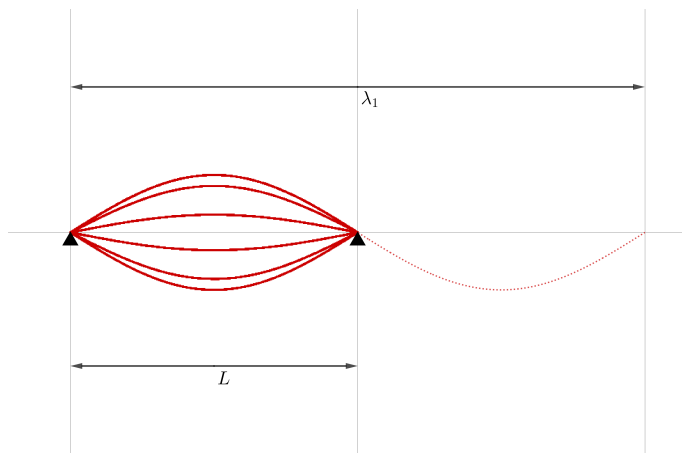
Pojďme se podívat, jaké stojaté vlny (nehledě zatím na to, jak je vyvoláme) mohou vzniknout na struně, která je upevněna na obou koncích. Tedy jakými způsoby může struna vůbec kmitat.

Je-li struna na obou koncích upevněna, potom tyto body nemohou kmitat a musí zde být **uzly**. Ukazuje se, že struna může kmitat mnoha různými způsoby (módy).



2.1 Základní frekvence f_1

První mód kmitání je takový, že uprostřed struny vznikne jedna kmitna (viz obr.6).



Obr. 6: $\lambda_1 = 2L$; $f_1 = \frac{v}{2L}$

<https://www.geogebra.org/m/tpxxh85b>

Z obrázku vidíme, že pro vlnovou délku tohoto módu platí

$$\lambda_1 = 2L \quad (5)$$

kde L je délka struny. S jakou frekvencí f_1 bude struna kmitat? Víme, že platí vztah $v = f\lambda$, kde v je rychlost vlny v daném prostředí. Tedy pro f_1 bude platit $f_1 = \frac{v}{\lambda_1}$, neboli:

$$f_1 = \frac{v}{2L}, \quad (6)$$

kde v je rychlost vlny v naší struně.



Ta je dána Taylorovým vzorcem¹

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad (7)$$

Kde F je síla napínající strunu, ρ je hustota struny a S je její průřez. Po dosazení (7) do (6) dostáváme

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \quad (8)$$

Tento vztah je jistě v souladu s naší zkušeností se strunami třeba na kytarě – hustější a tlustší struny dávají nižší frekvence, napínáním a zkracováním struny dostáváme vyšší frekvence.

Říkáme, že tato frekvence prvního módu kmitání je **základní frekvence** nebo také **první harmonická frekvence**.

2.2 Vyšší harmonické frekvence f_2, f_3, f_4, \dots

Druhý mód kmitání vypadá tak, že mezi konci struny je **jeden uzel** (viz obr. 7a). Z obrázku vidíme, že pro vlnovou délku 2. módu platí

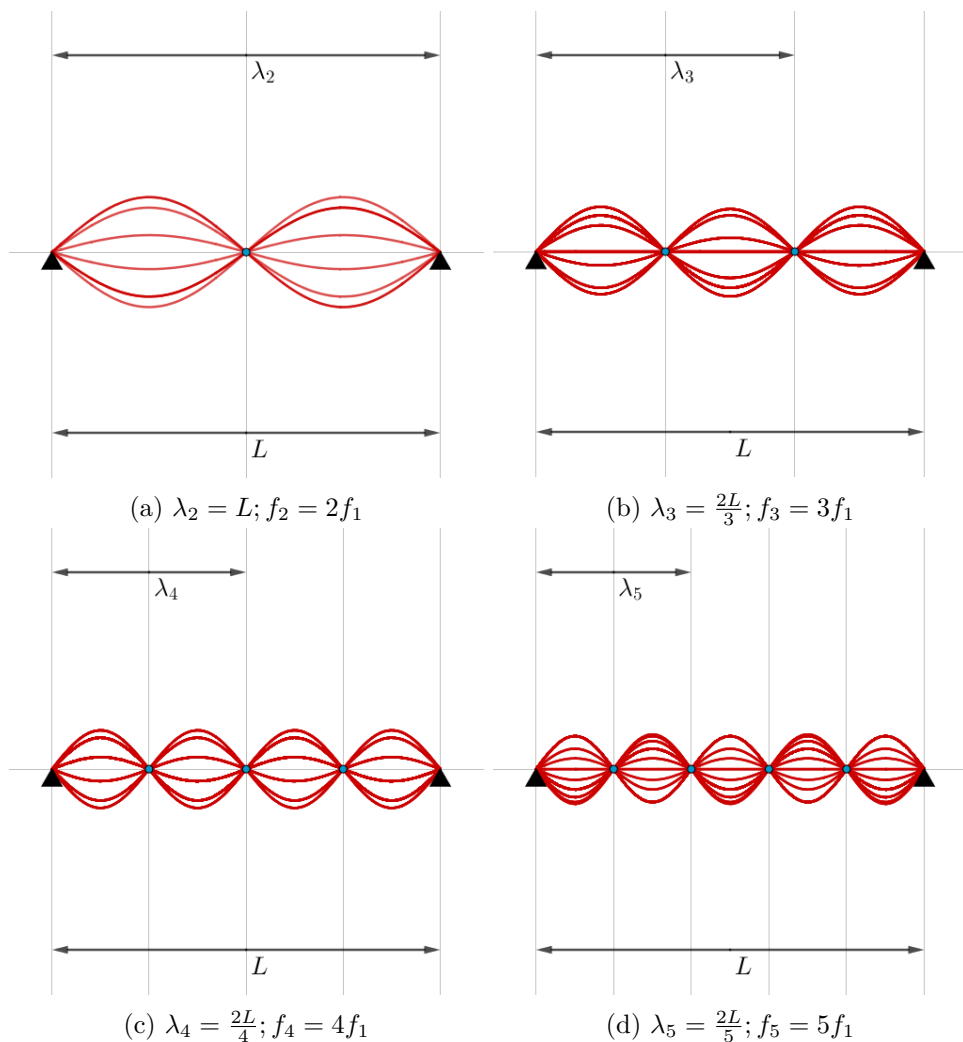
$$\lambda_2 = L \quad (9)$$

Pro f_2 bude platit $f_2 = \frac{v}{\lambda_2}$, neboli:

$$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1, \quad (10)$$

Frekvence 2. módu je dvojnásobkem frekvence základní (odpovídá tónu o oktávu vyššímu). Říkáme jí **druhá harmonická frekvence**.

¹Odvození z 2. Newtonova zákony třeba zde: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Teoreticka_mechanika/TM_10_SpojiteProstredi_ver_01a.pdf



Obr. 7: Vyšší harmonické frekvence

Třetí mód kmitání vypadá tak, že mezi konci struny jsou **dva uzly** (viz obr. 7b). Z obrázku vidíme, že pro vlnovou délku 3. módu



platí

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} \quad (11)$$

Pro f_3 bude platit $f_3 = \frac{v}{\lambda_3}$, neboli:

$$f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1, \quad (12)$$

Frekvence 3. módu je trojnásobkem frekvence základní. Říkáme jí **třetí harmonická frekvence**.

A tak bychom mohli pokračovat teoreticky do nekonečna. Vztahy pro vlnovou délku a frekvenci jednotlivých módů můžeme snadno zobecnit:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2L = \frac{2L}{1} & f_1 = \frac{v}{2L} \\ \lambda_2 = L = \frac{2L}{2} & f_2 = 2f_1 \\ \lambda_3 = \frac{2}{3}L = \frac{2L}{3} & f_3 = 3f_1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

tedy

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{a} \quad f_n = nf_1 = \frac{nv}{2L} \quad (13)$$

a vzhledem k Taylorovu vztahu (8) dostáváme

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \quad (14)$$

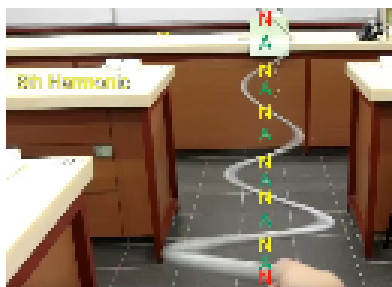
Frekvencím $f_2, f_3, f_4 \dots$ říkáme souhrnně **vyšší harmonické frekvence**.

Souhrnně frekvencím $f_1, f_2, f_3 \dots$ říkáme **rezonanční frekvence** nebo také **vlastní frekvence** struny.

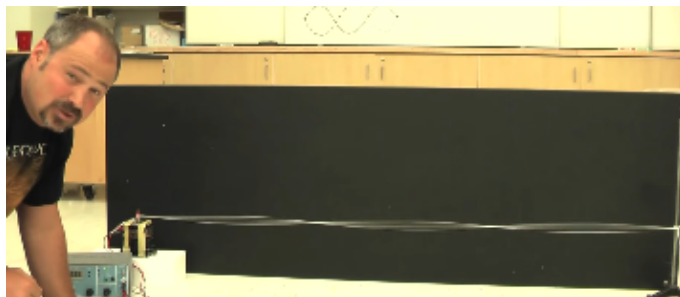


2.3 Experiment – vybuzení módů struny pomocí nucených kmitů

Chceme-li pozorovat jednotlivé módy kmitů struny, které jsme si výše rozebrali theoreticky, je to velice snadné. Stačí růčo (video – obr. 8) nebo pomocí vhodného oscilátoru (video – obr. 9) donutit strunu, aby kmitala. Přitom budící frekvenci musíme zkusmo nastavit takovou, aby byla rovna nějaké z harmonických frekvencí struny $f_1, f_2, f_3 \dots$. Struna se tak dostane do **resonance** a vznikne na ní pěkná stojatá vlna.

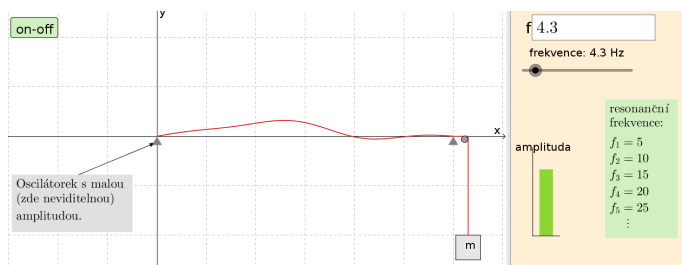


Obr. 8: <https://youtu.be/PVX4V5Adbzk?feature=shared>



Obr. 9: <https://youtu.be/-gr7KmT0rx0?feature=shared>

Pokud budící frekvence neodpovídá jedné z rezonančních frekvencí $f_1, f_2, f_3 \dots$, vznikne na struně jen chaotické nepěkné kmitání (obr. 10).



Obr. 10: <https://www.geogebra.org/m/zjjvhgse>

3 Brnknutí na strunu upevněnou na obou koncích

V předchozí kapitole jsme předpověděli a potom pomocí experimentu potvrdili, že struna (upevněná na obou koncích) má své oblíbené frekvence **rezonanční, vlastní**, na kterých s radostí může kmitat (vztah (14)) a když ji **nutíme** vnějším buzením kmitat na takové frekvenci, tak se rozveselí a dostane se do resonance – a kmitá výhradně v daném módu.

No jó, ale nás nyní zajímá mnohem přirozenější a častější případ, kdy na **hudebním strunném nástroji** (kytara, housle, viola, violoncello, basa, lyra, harfa, klavír, cimbál, banjo, balalajka, mandolína, sitár, sarangi, sarod atd.) vyvoláme kmitání **brnknutím, úderem** nebo **smyčcem**.

Vokazuje se, v takovém případě struna nekmitá pouze na **jedné** z vlastních frekvencí $f_1, f_2, f_3 \dots$, ale na všech současně – vykonává tedy **pohyb složený z nekonečně mnoha stojatých vln!** Výsledkem je určitý **hudební tón**, který nástroj vydává. Tento tón má **výšku** a **barvu**:

- Základní frekvence f_1 určuje **výšku tónu**.
- Vyšší harmonické frekvence určují **barvu tónu**.



Kdo nevěří, že tón vydávaný strunou obsahuje celé spektrum frekvencí, může se o tom přesvědčit tak, že si nahraje zvuk kytarové struny a provede spektrální analýzu v programu **Audacity**, nebo si pustí následující video:



Obr. 11:

https://youtu.be/nQ_xIvUxGME?feature=shared

Přítom:

1. Spektrum frekvencí $f_1, f_2, f_3 \dots$ má s rostoucím n **klesající amplitudu**.
2. Velikost amplitud jednotlivých frekvencí závisí na **způsobu, jakým strunu rozkmitáme** (brnknutí nehtem, tah smyčce, úder paličky).
3. Některé frekvence mohou mít **nulovou amplitudu** – podle toho, ve kterém místě struny působí nehet, smyčec, palička.
4. Kmity struny jsou **tlumené** a vyšší harmonické se utlumí dříve než nižší.
5. Spektrum frekvencí struny je ovlivněno **kvalitou struny - žádná struna není ideální**.



6. Velikost amplitud jednotlivých frekvencí, které z nástroje lezou, závisí také na konkrétním nástroji – speciálně na konstrukci jeho **rezonanční skříňky, která některé frekvence spektra zesiluje více či méně** – ale to už není záležitost samotné struny, ale umění mistra, který nástroj vyrobil.

My se nyní budeme dále zabývat již jen případem, kdy na strunu brkneme (tedy nerozkmitáme ji smyčcem či úderem paličky).

3.1 Odvození vzorce pro pohyb struny

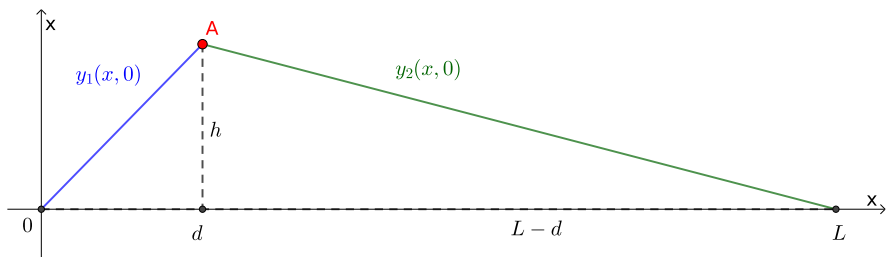
Tato kapitolka vychází z textu „The Plucked Fixed-Fixed String“ od D.Russela². Kromě toho jsou esenciální tato dvě videa z MIT:

<https://youtu.be/1JeBWHzrRD4?feature=shared>

https://youtu.be/X60J__-GMx8?feature=shared

Co se stane, když brkneme na strunu? Tedy v určitém místě trsátkem nebo nehtem vychýlíme strunu (počáteční stav = klid), struna tvoří s hmatníkem trojúhelník (viz obr. 12), a potom ji pustíme.

²<https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/Pluck-Fourier/Pluck-Fourier.html>



Obr. 12: Struna napnutá nehtem při brnknutí – před vypuštěním.

Řekli jsme, že vznikne nekonečně mnoho stojatých vln s frekvencemi $f_1, f_2, f_3 \dots$ danými vztahy (13) a (14). Vzniká otázka,

- jaké budou **amplitudy jednotlivých stojatých vln** v závislosti na **místě**, ve kterém na strunu brkneme – tedy jakou **barvu** bude mít výsledný tón (bez ohledu na to, že barvu následně ovlivní kvalita rezonanční skříňky)
- jak bude vypadat **výsledný pohyb struny**, který vznikne složením těchto nekonečně mnoha stojatých vln.

Dříve jsme připomněli, že rovnice stojaté vlny, která vznikne interferencí dvou stejných vln jdoucích proti sobě, je (4). Toto však není nejobecnější tvar stojaté vlny. Z teorie plyne, že **obecný tvar rovnice stojaté vlny** je:

$$y(x, t) = A_0 + A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(kx) \cos(\omega t + \varphi)$$

(15)

Snadno se přesvědčíme v GeoGebře (obr. 13), že to je opravdu stojatá vlna. Konstanta A_0 jen posouvá vlnu nahoru či dolů vůči ose x . Fázový posun φ jen posouvá vlnu v čase. Z tohoto obecného tvaru stojaté vlny nyní vyjdeme.



Nejprve se znovu přesvědčíme, že **okrajové podmínky**, tedy že struna délky L je na obou koncích upnutá, vedou ke kvantování vlnových délek a frekvencí daných vztahy (13), které jsme jednoduchou úvahou vyvodili v sekci 2.

- **Struna je upevněná na levém konci** ($x = 0$). Tedy platí, že $y(0, t) = 0$ pro všechny časy t . Dosadíme-li do (15) za $x = 0$:

$$0 = A_0 + 0 + B \cos(\omega t + \varphi)$$

Toto musí platit pro libovolný čas t , takže musí být $A_0 = 0$ a $B = 0$. Rovnice stojaté vlny na struně upevněné na obou koncích je proto

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi) \quad (16)$$

- **Struna je upevněná na pravém konci** ($x = L$). Tedy platí, že $y(L, t) = 0$ pro všechny časy t . Dosadíme-li do (16) za $x = L$:

$$0 = A \sin(kL) \cos(\omega t + \varphi)$$

Toto musí platit pro libovolný čas t , takže musí být

$$\sin(kL) = 0$$

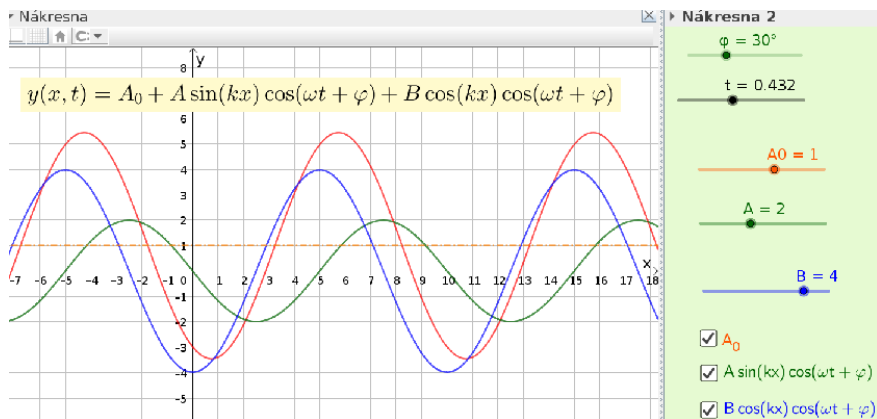
(protože $A \neq 0$ a $\cos(\omega t + \varphi)$ není obecně vždy nulové). Musí tedy platit $kL = n\pi$; $n = 1, 2, 3, \dots$ a úhlový vlnčet je tedy kvantován:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Tím jsou kvantovány také veličiny λ, f, ω ³:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}; \quad f_n = \frac{nv}{2L}; \quad \omega_n = \frac{n\pi v}{L}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

³Připomeňme, že $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $f = \frac{v}{\lambda}$, $\omega = 2\pi f$



Obr. 13: Obecná rovnice stojaté vlny
<https://www.geogebra.org/m/k828qzka>

Tím jsou potvrzeny vztahy (13) a rovnici (16) můžeme psát ve tvaru

$$y_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t + \varphi_n\right); \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(19)

Díky okrajovým podmínkám jsme tedy dostali rovnici (19) všech **možných** stojatých vln, které mohou vznikat na kmitající struně, která je upevněna na obou koncích.

Jeich **amplitudy** A_n **jsou zatím neurčené** a **fázový posun** je **zatím také neurčený**. Ještě jsme totiž neuplatnili **počáteční podmínky**, že struna je na počátku brnknutí v **klidu** a má tvar **trojúhelníka**.

1. **Struna je na počátku brnknutí v klidu**. Proto musí být $y'_n(x, 0) = 0$, pro každé $x \in \langle 0; L \rangle$. Přitom pro derivaci funkce (19) podle času platí:

$$y'_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \left(-\frac{n\pi v}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t + \varphi_n\right)$$



Tedy po dosazení $t = 0$ dostáváme

$$\forall x \in \langle 0; L \rangle : y'_n(x, 0) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \left(-\frac{n\pi v}{L}\right) \cdot \sin(\varphi_n) = 0$$

Protože $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ není pro každé $x \in \langle 0; L \rangle$ nulové, musí být jedinečně $\sin(\varphi_n) = 0$, tedy $\varphi_n = 0$ a dostáváme

$$y_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Připomeňme si, že při brnkutí na strunu vznikne nekonečně mnoho stojatých vln ve tvaru (20) a výsledná vlna $y(x, t)$ bude dána jejich součtem:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) \quad (21)$$

Zbývá určit amplitudy A_n jednotlivých stojatých vln.

2. **Struna má v čase $t = 0$ tvar trojúhelníka.** Každý blbec tedy vidí (obr. (12)), že pro strunu v čase $t = 0$ platí recepisy:

$$y(x, 0) = \frac{h}{d}x \quad \text{pro } x \in \langle 0; d \rangle \quad (22)$$

$$y(x, 0) = \frac{h}{L-d}(x-d) \quad \text{pro } x \in \langle d; L \rangle \quad (23)$$

Zároveň pro $t = 0$ dostáváme z (21)

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (24)$$

Tedy rozepsáno na součet:

$$y(x, 0) = A_1 \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) + A_1 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) + A_1 \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) \dots \quad (25)$$



Abychom vypočítali A_1 , vynásobíme rovnici 24 výrazem $\sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right)$ a zintegrujeme podle x od nuly do L :

$$\int_0^L y(x, 0) \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L y(x, 0) \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx &= \int_0^L A_1 \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx + \\ &+ \int_0^L A_2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx + \\ &+ \int_0^L A_3 \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx + \dots \end{aligned}$$

Ukazuje se naštěstí, že všechny integrály v součtu na pravé straně jsou kromě prvního **rovny nule** a první integrál má hodnotu $A_1 \cdot \frac{2}{L}$. Díky tomu dostáváme

$$\int_0^L y(x, 0) \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx = A_1 \cdot \frac{2}{L}$$

A odtud

$$A_1 = \frac{L}{2} \int_0^L y(x, 0) \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx$$

Podobným postupem dostaneme vztahy pro $A_2, A_3, A_4 \dots$ a obecně pro amplitudu kterékoli stojaté vlny dostáváme

$$A_n = \frac{L}{2} \int_0^L y(x, 0) \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx \quad (27)$$

Sem dosadíme z (22) a (23):

$$A_n = \frac{L}{2} \int_0^d \frac{h}{d} x \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx + \frac{L}{2} \int_d^L \frac{h}{L-d} (x-d) \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{L}x\right) dx \quad (28)$$



A když se trochu vyblbneme s těmi integrály, dostaneme:

$$A_n = \frac{2h}{n^2\pi^2} \frac{L^2}{d(L-d)} \sin\left(\frac{dn\pi}{L}\right) \quad (29)$$

Dostáváme tedy výslednou rovnici kmitající struny, na kterou jsme brnkli ve vzdálenosti d od jejího konce:

$$y(x, t) = \frac{2hL^2}{\pi^2 d(L-d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{dn\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) \quad (30)$$

No a jdeme si to frknout do GeoGebry.

3.2 Pohyb struny – aplet v GGB

Pro ověření odvozených vztahů a jejich rozbor slouží následující model v GeoGebře:

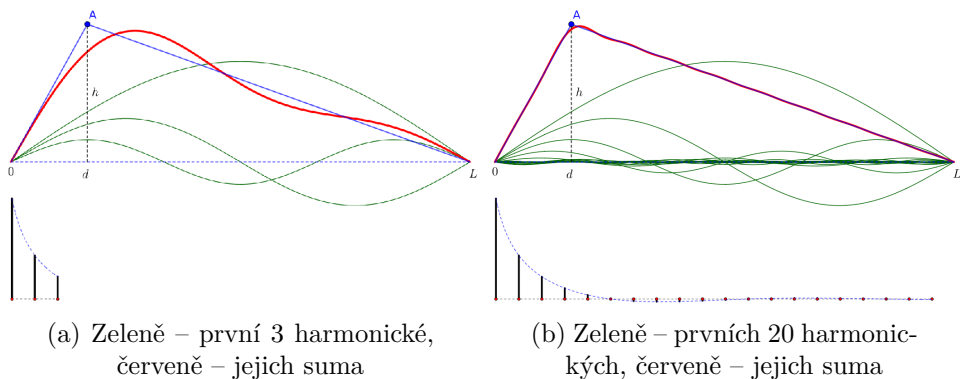
<https://www.geogebra.org/m/fkxvumjb>

Je lepší si aplet stáhnout a spustit na počítačím strojků, pač online běží děsně pomalu.

3.2.1 Napnutí struny v bodě A v čase $t = 0$

Pro $t = 0$ platí dle (30) pro tvar struny vztah:

$$y(x, 0) = \frac{2hL^2}{\pi^2 d(L-d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{dn\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (31)$$



Obr. 14: Napnutá struna v čase $t = 0$ (modře) & Fourierova řada (červeně)

Vliv počtu členů řady na kvalitu aproximace tvaru struny:

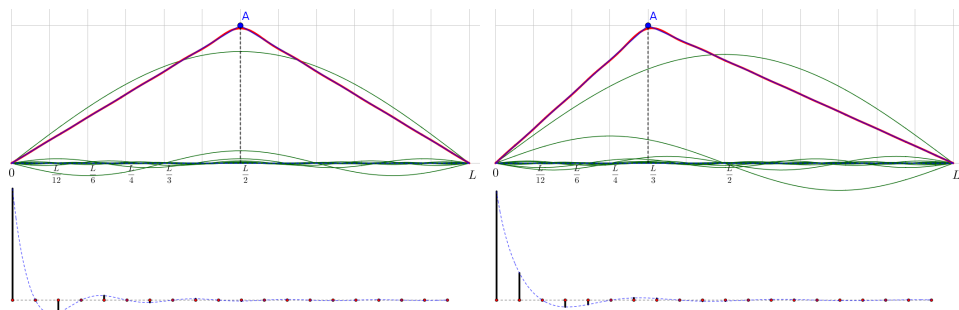
V obrázku 14a je modře struna napnutá nehtem ve vzdálenosti d od jejího levého konce. Vidíme, že již pouhé tři první členy řady (31) (první tři harmonické) dávají slušnou aproximaci skutečného tvaru struny.

Vezmeme-li dvacet členů řady (obr. 14b), tak jejich suma napodobuje tvar struny již velice přesně.

Pokles amplitud s rostoucím n : Z obrázku 14b vidíme dobře, jak s rostoucím n amplitudy harmonických rychle klesají. To je dáno modrým členem ve vztahu (31) a ve spodní části obrázku je tato funkce (pro spojitě n) vynesena čárkovaně modře a jednotlivé černé tyčky představují amplitudy jednotlivých harmonických.

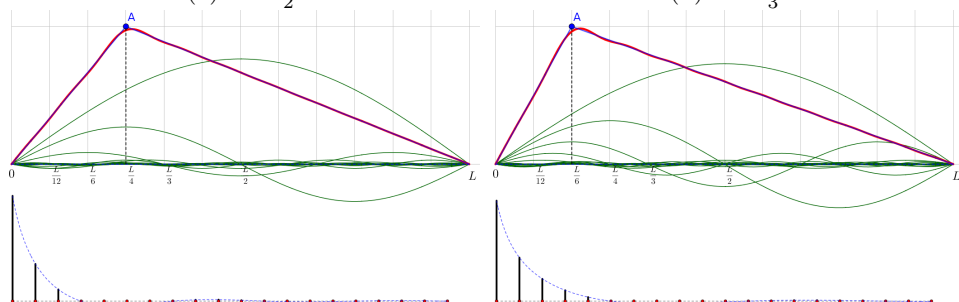
Skutečné kmitání struny je tlumené a vysoké harmonické s malými amplitudami rychle zaniknou, takže barva tónu struny se v průběhu doznívání mění, začíná dominovat první a druhá harmonická.

Vliv místa brnknutí na spektrum frekvencí: V modelu můžeme měnit místo brnknutí posouváním bodu A doleva či doprava. Tím měníme ve vztahu (31) parametr d – viz obr 15.



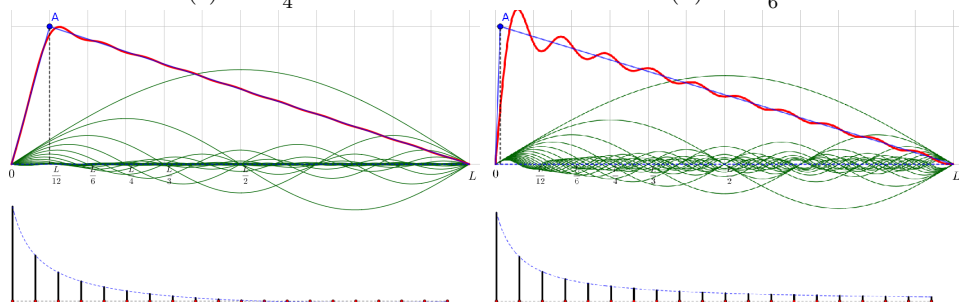
(a) $d = \frac{L}{2}$

(b) $d = \frac{L}{3}$



(c) $d = \frac{L}{4}$

(d) $d = \frac{L}{6}$



(e) $d = \frac{L}{12}$

(f) $d = \frac{L}{100}$

Obr. 15: Vliv místa brnknutí na spektrum prvních dvaceti harmonických. S klesající vzdáleností d místa brnknutí od kraje struny je spektrum čím dál tím bohatší a intenzivnější!



- $d = \frac{L}{2}$: strunu vychýlíme v polovině (obr. 15a). V tomto místě tedy nemůže být uzel. To ale znamená, že na struně nemůže vzniknout druhá harmonická, která právě uprostřed struny má mít uzel!

Z téhož důvodu nemůže vzniknout ani harmonická čtvrtá, šestá, osmá atd.

Jinými slovy každá druhá harmonická ($n = 2m; m \in N$) bude mít nulovou amplitudu.

Vidíme to také na grafu amplitud ve spodní části obrázku⁴.

Zároveň je to jasné i ze vztahu (31)⁵.

Spektrum harmonických struny vychýlené v polovině je absencí každé druhé harmonické velice ochuzeno a zvuk struny má tudíž trochu vyblitou barvu.

- $d = \frac{L}{3}$: strunu vychýlíme ve třetině (obr. 15b). V tomto místě tedy nemůže být uzel. Každá třetí harmonická ($n = 3m; m \in N$) bude mít nulovou amplitudu.
- $d = \frac{L}{4}$: strunu vychýlíme ve čtvrtině (obr. 15c). V tomto místě tedy nemůže být uzel. Každá čtvrtá harmonická ($n = 4m; m \in N$) bude mít nulovou amplitudu.
- $d = \frac{L}{6}$: strunu vychýlíme v šestině (obr. 15d). V tomto místě tedy nemůže být uzel. Každá šestá harmonická ($n = 6m; m \in N$) bude mít nulovou amplitudu.

⁴V grafu jsou některé tyčky záporné – to znamená, že daná sinusoida popisující stojatou vlnku má v čase $t = 0$ opačnou fázi než vlnka s tyčkou kladnou.

⁵Ptáme-li se, které členy řady pro $d = \frac{L}{2}$ budou nulové, je zřejmé, že konstanta před sumou nulová není, dále černá sinusoida $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ není nulová pro každé x , tedy zbývá jen modrá sinusoida $\sin\left(\frac{dn\pi}{L}\right)$, která musí být nulová, tedy

$$\frac{dn\pi}{L} = m \cdot \pi; \quad m \in N$$

Pač $d = \frac{L}{2}$, musí tedy být $\frac{n\pi}{2} = m\pi$ a odtud $n = 2m; \quad m \in N$, jak jsme předpověděli.



- $d = \frac{L}{12}$: strunu vychýlíme ve dvanáctině (obr. 15e). V tomto místě tedy nemůže být uzel. Každá dvanáctá harmonická ($n = 12m; m \in N$) bude mít nulovou amplitudu.
- $d = \frac{L}{100}$: strunu vychýlíme v setině (obr. 15f). V tomto místě tedy nemůže být uzel. Každá stá harmonická ($n = 100m; m \in N$) bude mít nulovou amplitudu.

Vidíme, že čím blíže ke kraji na strunu brkneme, tím bohatší a silnější spektrum dostaneme. O tom se snadno můžeme přesvědčit na kytarě experimentálně – jednak sluchem a dvojak si můžeme zvuky nahrát a v Audacity sledovat jejich spektrální analýsu!

3.2.2 Pohyb struny v čase

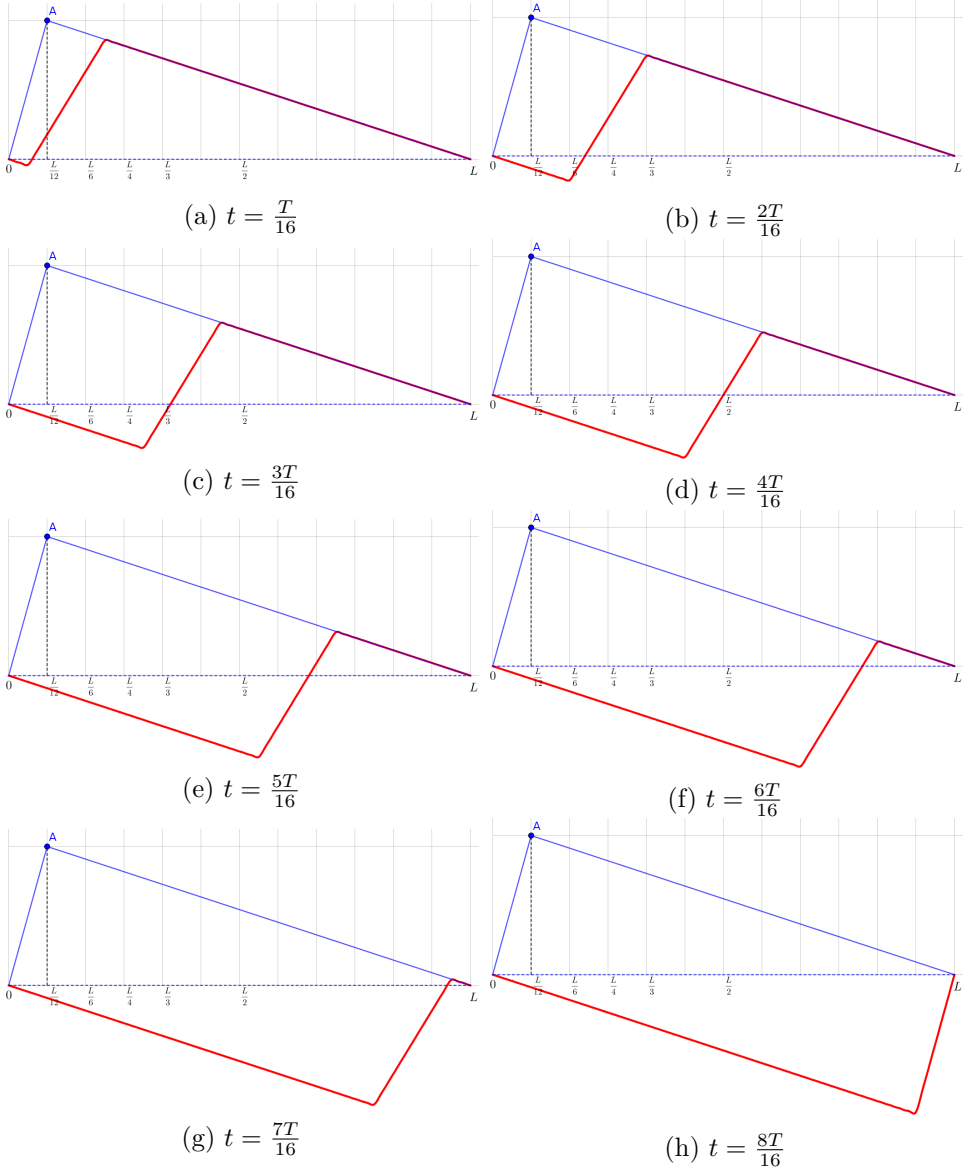
Jakmile spustíme v našem apletu čas, je to nádhera. Bohužel online pohyb je dost pomalý a cukavý – přestože je nastaveno jen $n = 10$. Je lepší si aplet stáhnout a pustit v kompjútru, ale i tak při nastavení $n = 100$ bude pohyb dost trhaný.

Je dobré si čas zastavit a použít časová tlačítka vpravo, kde se dají nastavit časy po osmině peroidy od nuly do $t = \frac{T}{2}$. Takto vznikly obrázky 16 a 17, ve kterých vidíme pohyb struny krásně i bez apletu. V popisu obrázků jsou také odkazy na videjka na TyTubě se záznamem pohybu struny z apletu.

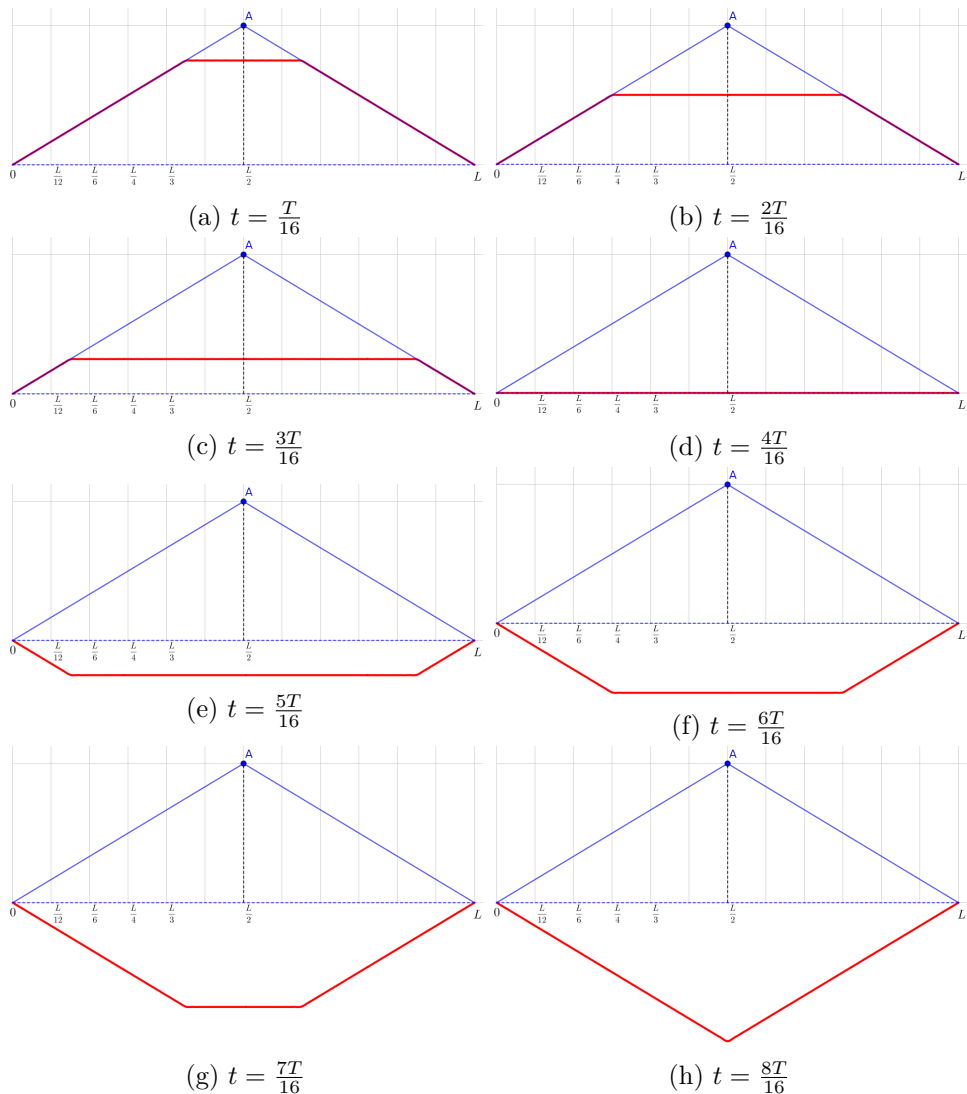
3.3 Pohyb struny – zpomalená videa

Možná nás **podivný pilovitý tvar** kmitající struny překvapí a nebudeme modelu v GeoGebře věřit. Tak si to budeme chtít ověřit experimentálně. Když na však strunu brkneme, její pohyb je tak rychlý, že vše vidíme jen rozmazně.

Takže to uděláme mazaně – zkusíme se podívat na Tubu a vyhledat zpomalená videa pohybu struny.



Obr. 16: Pohyb struny ($n = 100$) pro $d = \frac{L}{12}$ v čase od nuly do $t = \frac{T}{2}$.
<https://youtu.be/3qD0JgSSFUw?feature=shared>



Obr. 17: Pohyb struny ($n = 100$) pro $d = \frac{L}{2}$ v čase od nuly do $t = \frac{T}{2}$.

https://youtu.be/vbo7CXWU_gE?feature=shared



Obr. 18: Wataheldis? Je náš model špatně?

3.3.1 Zpomalená videa z mobilu – je náš model chybný?

Když si vygooglíme pár videí se zpomaleným pohybem kytarové struny, tak budeme v šoku – to, co vidíme, **vůbec neodpovídá našemu modelu**, ve kterém běhá po struně pilovitý tvar.

Místo toho vidíme, že na strunách vznikají **podivné vlnky** záhadných tvarů – viz následující 3 videa a obr. 18.

<https://www.youtube.com/watch?v=XOCGb5ZGEV8>

<https://youtu.be/RNt8d6vJj8c?feature=shared>

<https://youtu.be/8YGQmV3NxMI?feature=shared>

V popisech videí jsou všelijaká fyzikální moudra o kráse stojatých vln a v kometářích lidé autory videí chválí, že jim konečně pomohli pochopit a pozorovat stojaté vlny.

Ve skutečnosti jsou tvary strun na těchto záběrech jen iluzí způsobenou nevhodnou methodou vytvoření zpomalených snímků a se skuteč-



ným pohybem strun nemají nic společného.

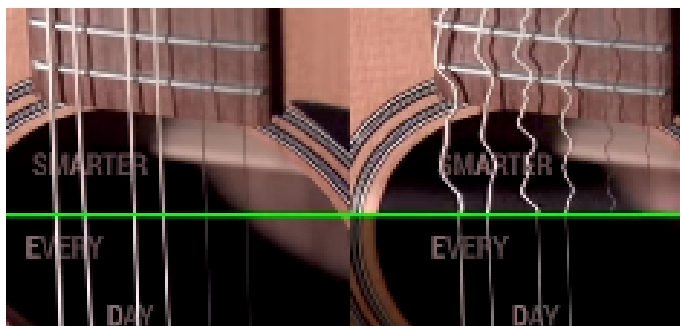
3.3.2 Náš model zachráněn – podlehlí jsme ilusi jevu „rolling shutter“

Když totiž pátráme na na Googlu pozorněji, zjistíme, že jsme podlehlí ilusi jevu „rolling shutter“⁶, který vzniká, když k vytvoření videa použijeme místo pořádné kamery běžný mobil nebo digitální foťák.

Všechno je bezvadně vysvětleno v následujícím videu (odkaz v obr. 19). Důležité je v tomto videu srovnání s běžným scannerem a pokus s pohybem předlohy při skenování – obraz se natáhne či stlačí.

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Rolling_shutter

Rolling shutter je metoda snímání obrazu, při níž se statický snímek (u statického fotoaparátu) nebo každý snímek videa (u videokamery) pořizuje nikoliv snímáním celé scény v jednom časovém okamžiku, ale rychlým vertikálním, horizontálním nebo rotačním snímáním scény. Jinými slovy, ne všechny části obrazu scény jsou zaznamenány přesně ve stejném okamžiku. (Ačkoli během přehrávání se zobrazuje celý obraz scény najednou, jako by představoval jediný časový okamžik.) To způsobuje zkreslení rychle se pohybujících objektů nebo rychlých záblesků světla. Opakem je **„global shutter“**, kdy je celý snímek zachycen ve stejném okamžiku.

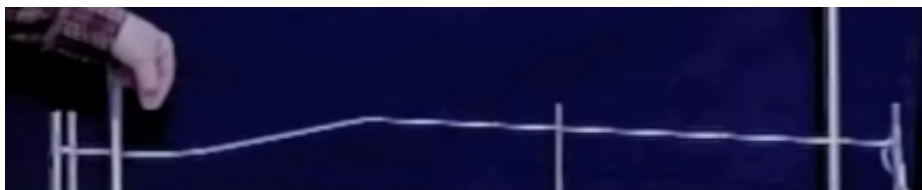


Obr. 19: Why Do Cameras Do This? – Rolling Shutter Explained - Smarter Every Day 172

<https://www.youtube.com/watch?v=dNVtMmLlnoE>

Když tedy použijeme **vhodnou techniku** (abychom se vyhnuli jevu „rolling shutter“), zjistíme, že model odpovídá skutečnému pohybu struny (počáteční výchylka struny na kytáře je samozřejmě menší než v modelu). Pojďme se na pár takových videí podívat:

Perfektní je toto video (obr. 20) Dana Russela s obyčejnou gumou místo skutečné struny:



Obr. 20: Dan Russel a brnknutí na kraji struny

https://youtu.be/_X72on6CSL0?feature=shared

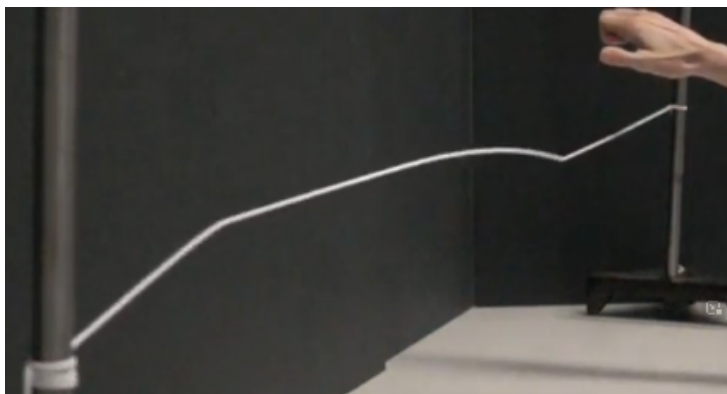


Nebo tato videa (obr. 21 a 22 – Dr Paul Cruickshank z University of St Andrews – i když zde se nejedná přesně o počáteční stav, kdy struna tvoří trojúhelník):



Obr. 21: Paul Cruickshank a úder uprostřed struny

<https://youtu.be/903VEXzu0KI?feature=shared>



Obr. 22: Paul Cruickshank a slap bass technique

<https://youtu.be/7WJ-QNccp3U?feature=shared>



A dále tato dvě videa se skutečnou kytarou:

https://youtu.be/PETuX_pXLNU?feature=shared

<https://youtu.be/LNNQvG0jWtw?feature=shared>

A taky tohle: více strun

<https://youtu.be/3ATVOTJfkg8?feature=shared>

Poznámka: Pokud bychom zkoumali pohyb **houslové** struny, jejíž tón byl vytvořen **smyčcem**, byl by model mnohem složitější⁷ – zde jsme zkoumali jen strunu rozkmitanou brnknutím.

4 Další odkazy

D.Russel – normální módy:

<https://youtu.be/kvG70rjBirI?feature=shared>

<https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/multi-dof-springs/multi-dof-springs.html>

<https://youtu.be/uRbvTm9yc38?feature=shared>

Phet:

https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_all.html

Falstad:

<http://falstad.com/loadedstring/>

⁷<https://core.ac.uk/reader/291564080>

**Strouhal:**

https://physics.mff.cuni.cz/historie/Strouhal/DVD/Ucebnice/Fysika_experimentalni/Akustika.pdf