Rovnice a nerovnice

Rovnice iracionální jako Milivoj Stín!

Žán Pól Kastról

1. dubna 2022

Rovnice iracionální

jako

Milivoj Stín!

Výklad + sbírka - 4 leté

Žán Pól Kastról

1. dubna 2022

Obsah

1 Iracionální rovnice – výklad

1.1 Prvotní konflikt s iracionální rovnicí

Iracionální rovnice jsou rovnice obsahující *neznámou* pod odmocninou. Ve středoškolské matematice se jedná většinou pouze o druhou odmocninu. (Ale v *Janečkovi* jsou i příklady na vyšší odmocniny.) Budeme se nyní zabývat jen rovnicemi s neznámou pod **druhou** odmocninou.

Abychom rovnici vyřešili, musíme v jisté fázi rovnici **umocnit** na druhou mocninu. Tady ale může nastat problém. Ukážeme si to na příkladech.

Příklad 1: Nevinná rovnice

Řešte v $\mathbb{R}: \sqrt{2x+4} = 3$

Rovnici řešíme umocněním:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+4} &= 3 \;|^2 \\ 2x+4 &= 9 \\ 2x &= 5 \\ x &= 2,5 \end{aligned}$$

- Je číslo $x = 2,5$ opravdu kořenem původní rovnice ze zadání? Nevloudil se tento kořen do našeho řešení v důsledku umocnění? Nebo neudělali jsme někde numerickou chybu?

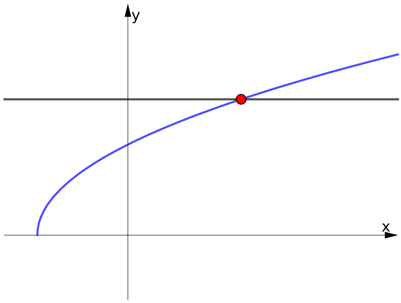
  O tom se přesvědčíme zkouškou:

  $$\begin{aligned} &L(2,5) = \sqrt{2 \cdot 2,5 + 4} = 3 \\ &P(2,5) = 3 \end{aligned}$$

  Ano, číslo $x = 2,5$ je vskutku kořenem původní rovnice.

- Nemá původní rovnice ještě nějaké další kořeny, které se možná umocněním ztratily? Tak zlé umocnění naštěstí není.

Umocnění rovnice nemůže ubrat kořeny – vysvětlíme to podrobně a obecně v sekci 1.2.



Abychom ale byli klidní, ověříme si to, že v našem konkrétním příkladě kořen nepřibyl, graficky. Na levou a pravou stranu rovnice se můžeme dívat jako na funkce proměnné x.

$$L(x) = \sqrt{2x+4} \quad P(x) = 3$$

Řešit tuto rovnici znamená hledat, pro která x se funkční hodnoty těchto funkcí rovnají. Graficky to znamená hledat body, ve kterých se grafy funkcí $L(x)$ a $P(x)$ protnou. Grafem levé strany je *ležatá půlparabola* a grafem pravé strany je *rovnoběžka* s x-ovou osou. Z obrázku vidíme, že tento průsečík je pouze jeden, a ten musí odpovídat našemu kořenu. Umocnění žádný kořen neubralo!

Závěr: Umocnění rovnice v tomto případě žádný kořen neubralo ani nepřidalo.

$$\underline{\underline{K = \{2, 5\}}}$$

Příklad 2: Záludná rovnice

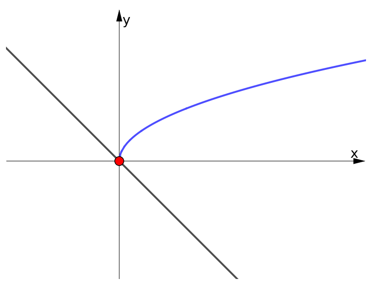
Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x} = -x$

Rovnici řešíme umocněním:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= -x \;\; |^2 \\ x &= (-x)^2 \\ x &= x^2 \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x = 0 \;&\vee\; x = 1 \end{aligned}$$

- Jsou oba kořeny, které jsme obdrželi, také kořeny původní rovnice? Pro $x = 0$ zkouška vychází. Ale pro $x = 1$ **zkouška nevychází**. Kořen $x = 1$ není kořenem původní rovnice za to, že nám v průběhu řešení **přibyl**, může umocnění, protože ostatní úpravy byly ekvivalentní. Proto musíme kořen $x = 1$ z řešení nemilosrdně **vyloučit**.

- Opět se graficky přesvědčíme, žádný kořen umocněním neubyl – viz obrázek.



Závěr: Umocnění rovnice v tomto případě žádný kořen neubralo, ale jeden kořen přidalo!

$$\underline{\underline{K = \{0\}}}$$

Z uvedených příkladů plyne následující domněnka:

Umocnění rovnice na druhou mocninu **není obecně ekvivalentní** úpravou.

- Nikdy sice nemůže ubrat kořeny
- Může však a nemusí přidat kořeny nové.

O tom, že je tato domněnka správná, se přesvědčíme v dalších dvou kapitolkách:

1.2 Proč nemůže umocnění rovnice ubrat kořeny?

Ze zkušenosti s umocňováním čísel víme, že když se rovnají dvě čísla, potom se rovnají i jejich druhé mocniny.

$$5 = 5 \Rightarrow 5^2 = 5^2$$

nebo

$$-6 = -6 \Rightarrow (-6)^2 = (-6)^2$$

nebo

$$0 = 0 \Rightarrow 0^2 = 0^2$$

Obecně tedy **platí tvrzení**:

Věta 1

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a = b \Rightarrow a^2 = b^2$$

Co z toho plyne pro řešení rovnic pomocí umocnění na druhou mocninu? Vezměme rovnici R_1 s proměnnou x a označme její *levou* stranu $L(x)$ a *pravou* stranu $P(x)$:

$$L(x) = P(x) \tag{R_1}$$

Tato rovnice má definiční obor D. Je to průnik definičních oborů výrazů $L(x)$ a $P(x)$. Pro její množinu kořenů K_1 platí $K_1 \subset D$ (kořeny nemohou samolitr existovat mimo definiční obor). Rovnici R_1 umocníme a dostaneme rovnici R_2:

$$L^2(x) = P^2(x) \tag{R_2}$$

Vezmeme-li libovolný kořen x_1 z množiny kořenů K_1, musí jistě platit číselná rovnost

$$L(x_1) = P(x_1)$$

Ale dle věty 1 potom na betón platí i rovnost čísel

$$L^2(x_1) = P^2(x_1)$$

To ale znamená, že kořen x_1 je rovněž kořenem rovnice R_2. Platí tedy, že každý kořen rovnice R_1 je také kořenem rovnice R_2. Tedy platí dozajista

$$K_1 \subset K_2 \tag{1}$$

Tím jsme dokázali naši hypotézu, že **umocnění rovnice na druhou mocninu nemůže kořeny ubrat**.

1.3 Proč může umocnění rovnice přidat kořeny?

Věta 1 říká, že z rovnosti dvou čísel plyne nutně rovnost jejich druhých mocnin. Obráceně to platit může:

$$3^2 = 3^2 \Rightarrow 3 = 3 \tag{2}$$

nebo

$$(-4)^2 = (-4)^2 \Rightarrow -4 = -4 \tag{3}$$

nebo

$$0^2 = 0^2 \Rightarrow 0 = 0, \tag{4}$$

ale také **nemusí**:

$$(-3)^2 = 3^2 \not\Rightarrow -3 = 3 \tag{5}$$

Obrácená věta tedy **neplatí**. Z rovnosti druhých mocnin dvou čísel neplyne obecně rovnost čísel samotných.

Věta 2: Neplatná věta!

$$\cancel{\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 = b^2 \Rightarrow a = b}$$

Co z toho plyne pro řešení rovnic pomocí umocnění na druhou mocninu? Vezmětež libovolný kořen x_2 rovnice R_2. Pro něj dozajista platí

$$L^2(x_2) = P^2(x_2)$$

Odtud ale obecně neplyne

$$L(x_2) = P(x_2)$$

protože neplatí věta 2! Kořen x_2 tedy může, ale také **nemusí** být kořenem původní rovnice R_1. Umocnění na druhou tedy může a nemusí přidat kořeny! Umocnění na druhou tedy vskutku není obecně ekvivalentní úprava.

1.4 Vysvětlení vzniku *lžikořenů* pomocí grafů funkcí

Kořeny, které vzniknou umocněním a nejsou tak kořeny původní rovnice, jsou **LŽIKOŘENY**, které se jen přetvařují a chtějí nás ošálit. Ale my jim na to samozřejmě neskočíme! Jak vzniknou lžikořeny lze krásně ukázat graficky.

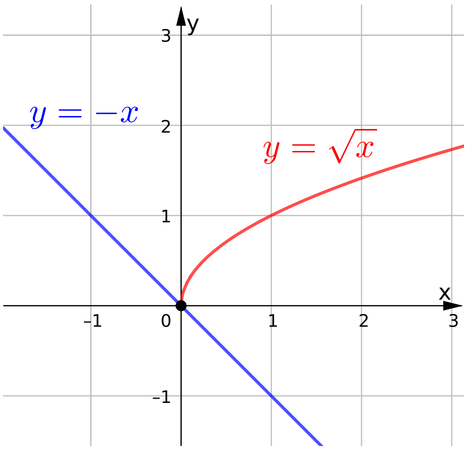
Vraťme se k příkladu 2. Před umocněním máme rovnici R_1, která představuje rovnost funkce *druhá odmocnina* a funkce *lineární*.

$$\sqrt{x} = -x \tag{R_1}$$

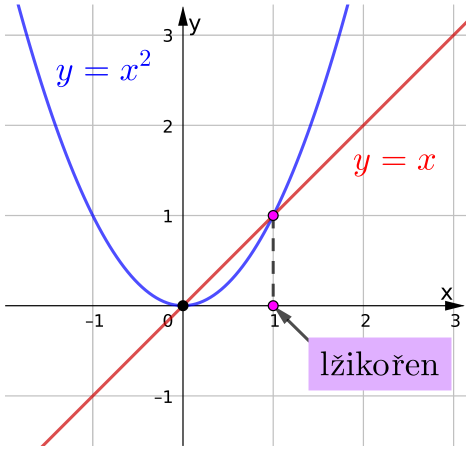
Grafem levé strany je *půlparabola*, grafem pravé strany je *přímka* (obr.1a). Po umocnění dostaneme rovnici R_2, kdy levá strana se změnila na funkci *lineární* a pravá strana na *kvadrátickou*

$$x = x^2 \tag{R_2}$$

Graf levé strany se **napřímí** a graf pravé strany se **ohne** (obr.1b). A tím nám vznikne **lžikořen**!



(a) Před umocněním: $K_1 = \{0\}$



(b) Po umocnění: $K_2 = \{0; 1\}$

Obr. 1: Vznik lžikořenu umocněním

Obdobně bychom mohli rozebrat graficky i příklad 1 – zde se poloparabola napřímí a rovnoběžka s osou x se jen posune nahoru $\rightarrow$ počet průsečíků se nezmění, lžikořen se neobjeví!

1.5 Co musí platit, aby umocnění rovnice na druhou kořeny nepřidalo?

Ze vztahů 2–5 vidíme, že implikace

$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$$

platí jen tehdy, mají-li čísla a a b stejná znaménka (resp. to jsou obě nuly), tedy jsou-li obě současně buď **nezáporná** nebo **nekladná**.

Platí tedy věta:

Věta 3

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$$

a také věta:

Věta 4

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^- : a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$$

Co z toho plyne pro řešení rovnic pomocí umocnění na druhou mocninu? Vezměmež rovnici R_1

$$L(x) = P(x) \tag{R_1}$$

s definičním oborem D a množinou kořenů K_1, pro kterou v celém definičním oboru D platí

$$L(x) \geq 0 \quad \wedge \quad P(x) \geq 0,$$

tedy obě strany rovnice jsou v D **nezáporné**. Rovnici umocníme na druhou a dostaneme rovnici R_2

$$L^2(x) = P^2(x) \tag{R_2}$$

s množinou kořenů K_2. Pro libovolný kořen x_2 rovnice R_2 platí číselná rovnost
$$L^2(x_2) = P^2(x_2).$$
Dle věty 3 platí potom také
$$L(x_2) = P(x_2),$$
takže kořen x_2 je rovněž kořenem rovnice R_1. Každý kořen rovnice R_2 je tedy i kořenem rovnice R_1. Tedy pro množiny kořenů rovnic R_1 a R_2 platí
$$K_2 \subset K_1.$$
Již předtím (viz vztah (1)) jsme ukázali, že platí současně
$$K_1 \subset K_2.$$
Proto platí dohromady
$$K_1 = K_2.$$
Rovnice R_1 a R_2 jsou tedy ekvivalentní a umocnění na druhou bylo v tomto případě ekvivalentní úpravou.

Dospěli jsme k tomu, že umocnění rovnice na druhou mocninu je ekvivalentní úpravou vždy, když jsou obě strany rovnice v celém definičním oboru rovnice **nezáporné**.

Úplně analogicky můžeme pomocí věty (4) ukázat, že umocnění rovnice na druhou mocninu je ekvivalentní úpravou, pokud jsou obě strany rovnice v celém definičním oboru rovnice **nekladné**.

Dostáváme slavnou větu:

Věta 5: Ekvivalentní umocnění rovnice na druhou

a) Jsou-li obě strany rovnice **v celém definičním oboru rovnice nezáporné**, potom je umocnění rovnice na druhou mocninu **ekvivalentní úpravou**.

b) Jsou-li obě strany rovnice **v celém definičním oboru rov-**

nice nekladné, potom je umocnění rovnice na druhou mocninu **ekvivalentní úpravou**.

1.6 Dvě methody pro rozlousknutí iracionální rovnice

Z předchozího výkladu nám přirozeně vyplynuly dvě methody řešení iracionálních rovnic:

1. **Methoda SUMO (Slepé umocnění)**
    - Nestarám se o definiční obor D rovnice ani o to, zda umocnění je ekvivalentní – umocním rovnici, ať si klidně vzniknou lžikořeny, mně je všechno jedno!
    - **Zkouška je nutná**, pač odhalí případné **lžikořeny**.
2. **Methoda EKUMO (Ekvivalentní umocnění)**
    - Použijeme-li správně větu 5, máme zaručeno, že při umocnění nevzniknou lžikořeny. Pokud i všechny další úpravy budou ekvivalentní, bude množina kořenů původní rovnice rovna množině kořenů, kterou dostaneme na konci.
    - **Zkouška není nutná** (ale můžu ji udělat, abych odhalil numerickou chybu).

Příklad 3

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x} = x - 2$ methodou **SUMO**

Rovnici slepě umocníme:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x - 2 \ |^2 \\ x &= x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x-1)(x-4) &= 0 \\ \cancel{x_1 = 1} \quad & x_2 = 4 \end{aligned}$$

Zkouška vyloučí lžikořen $x_1 = 1$.

$$\underline{\underline{K = \{4\}}}$$

Příklad 4

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x} = x - 2$ methodou **EKUMO**

Pod odmocninou nesmí být záporná čísla: Kořeny nemá smysl hledat mimo definiční obor rovnice. Tak ho určíme. Pod odmocninou nesmí být záporná čísla:

$$\boxed{\textbf{podmínka 1:} \qquad x \geq 0}$$

Definiční obor rovnice je tedy

$$D = \langle 0; \infty)$$

Druhá odmocnina je vždy nezáporná: Levá strana rovnice je tvořena druhou odmocninou, takže je vždy **nezáporná**. Pravá strana tedy musí být také **nezáporná**:

$$\boxed{\textbf{podmínka 2:} \qquad x - 2 \geq 0}$$

Průnik podmínek: Kořeny má smysl hledat jen tam, kde jsou současně splněny obě podmínky:

$$\begin{array}{ccc} x \geq 0 & \wedge & x - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 & \wedge & x \geq 2 \end{array}$$

Průnikem těchto podmínek je interval

$$\boxed{D' = \langle 2; \infty)}$$

Označení D' volíme proto, že pracujeme vlastně se **zúženým definičním oborem**. Vidíme, že $D' \subset D$. Kořeny rovnice má smysl hledat pouze v D'.

Ekvivalentní umocnění rovnice: Uvědomíme si, že ve zúženém definičním oboru D' jsou splněny požadavky na to, aby umocnění rovnice bylo ekvivalentní úpravou.

> Obě strany rovnice jsou v D' **nezáporné**, takže ji můžeme bez obav ekvivalentně umocnit!

Každý kořen, který nám vyjde a bude ležet v D', bude kořenem původní rovnice. Každý kořen, který v D' ležet nebude, bude **lžikořen** a my ho nelítostně vyškrtneme:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x - 2 \;|^2 \\ x &= x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x-1)(x-4) &= 0 \\ \xcancel{x_1 = 1} \notin D' & \quad x_2 = 4 \in D' \end{aligned}$$

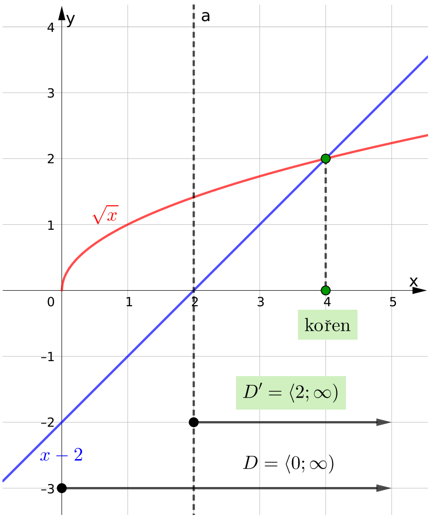
Kořen x_1 neleží v D', takže je to **lžikořen**, který přibyl umocněním a my ho **vyškrtneme**.

Kořen x_2 leží v D', takže je to **skutečný** kořen. Zkouška není nutná. Množina kořenů původní rovnice je tedy

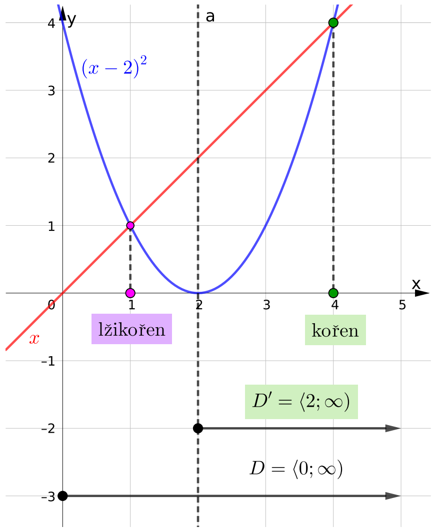
$$\underline{\underline{K = \{4\}}}$$

Příklad 5: Grafická analysa předchozího příkladu

Grafy levé a pravé strany před a po umocnění jsou krástně názorné:



(a) $\sqrt{x} = x - 2$



(b) $x = (x-2)^2$

Obr. 2

- **Obrázek vlevo:** Před umocněním se jedná o průnik *poloparaboly* a *přímky*. Hned vidíme, že kořen bude jen jeden.

  Definiční obor D rovnice odpovídá oblasti, kde se vyskytuje *poloparabola*.

  Zúžený definiční obor D' odpovídá oblasti, kde leží graf $x = -2$ nad osou x. Tam mají pravá i levá strana rovnice stejné znaménko – jen tam se můžou protnout.

- **Obrázek vpravo:** Po umocnění se jedná o průnik *paraboly* a přímky. Vznikl **lžikořen**.

  Pokud jsme použili **SUMO**, vyloučíme lžikořen zkouškou.

  Pokud jsme použili **EKUMO**, vyloučíme lžikořen proto, že neleží v D'.

Příklad 6

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 + 24} = x + 2$.
Řešte pomocí **SUMO** i **EKUMO**.

SUMO: Slepě umocníme.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 24} &= x + 2 \\
\cancel{x^2} + 24 &= \cancel{x^2} + 4x + 4 \\
4x &= 20 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Zkouška kořen potvrzuje.

$$\underline{\underline{K = \{5\}}}$$

EKUMO: Stanovíme podmínky.

- $x^2 + 24 \geq 0$ (pod odmocninou nesmí být záporná čísla)
- $x + 2 \geq 0$ (druhá odmocnina je vždy nezáporná)

První podmínka je splněna vždy. Definiční obor rovnice je tedy

$$D = R$$

Druhá podmínka znamená, že

$$x \geq -2$$

Průnik podmínek tedy je $x \geq -2$ a zúžený definiční obor je

$$\boxed{D' = \langle -2; \infty)}$$

V D' jsou obě strany nezáporné. Ekvivalentně umocníme a dořešíme:

$$\sqrt{x^2 + 24} = x + 2$$

$$\cancel{x^2} + 24 = \cancel{x^2} + 4x + 4$$
$$4x = 20$$
$$x = 5 \in D'$$

$$\underline{\underline{K = \{5\}}}$$

Příklad 7

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{2x+3} = 2$.
Řešte pomocí **SUMO** i **EKUMO** a proveďte grafickou analysu!

SUMO: Slepě umocníme.

$$2x + 3 = 4$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Zkouška kořen potvrdí.

$$\underline{\underline{K = \left\{\frac{1}{2}\right\}}}$$

EKUMO: Stanovíme podmínky.

- $2x + 3 \geq 0$ (pod odmocninou nesmí být záporná čísla)
- $2 \geq 0$ (druhá odmocnina je vždy nezáporná)

První podmínka znamená, že $x \geq -\frac{3}{2}$. Definiční obor rovnice je tedy

$$\boxed{D = \left\langle -\frac{3}{2}; \infty \right)}$$

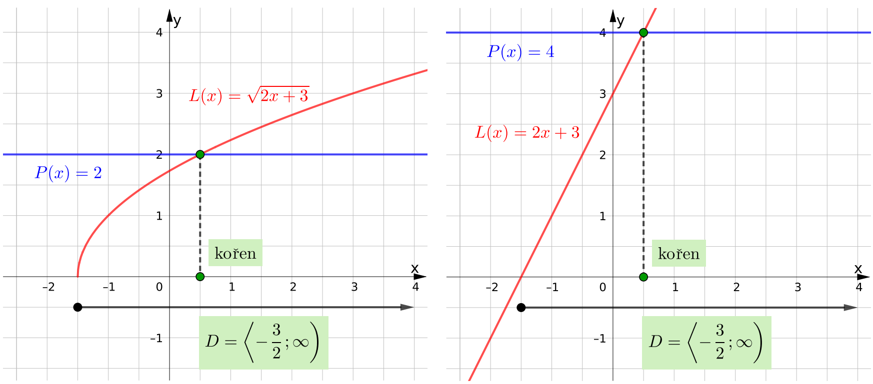
Druhá podmínka je samozřejmě splněna vždy. Definiční obor tedy není druhou podmínkou zúžen.
Obě strany rovnice jsou v celém D nezáporné. Ekvivalentně tedy rovnici umocníme a dořešíme:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 4 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \in D \end{aligned}$$

Kořen leží v D.

$$\underline{\underline{K = \left\{\frac{1}{2}\right\}}}$$

GRAFICKY: Levá strana je *poloparabola*, která se po umocnění změní na přímku. Pravá strana je konstantní funkce, takže grafem je rovnoběžka s osou x a po umocnění se jen posune rovnoběžně nahoru. Proto nemůže přibýt lžikořen.



(a) $\sqrt{2x+3} = 2$ (b) $2x + 3 = 4$

Obr. 3

Příklad 8

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x} = \sqrt{5-2x}$.
Řešte pomocí **SUMO** i **EKUMO** a proveďte grafickou analysu!

SUMO: Slepě umocníme.

$$x = 5 - 2x$$
$$3x = 5$$
$$x = \frac{5}{3}$$

Zkouška kořen potvrdí.

$$\underline{\underline{K = \left\{\frac{5}{3}\right\}}}$$

EKUMO: Stanovíme podmínky.

- $x \geq 0$ (pod odmocninou vlevo nesmí být záporná čísla)
- $5 - 2x \geq 0$ (pod odmocninou vpravo nesmí být záporná čísla)

Obě strany jsou odmocniny, takže jsou vždy nezáporné, takže žádná další podmínka není a definiční obor nebude zúžen. Průnik podmínek je $\left\langle 0; \frac{5}{2} \right\rangle$. Rovnici řešíme v nezúženém def. oboru

$$\boxed{D = \left\langle 0; \frac{5}{2} \right\rangle}$$

Obě strany rovnice jsou v D nezáporné, takže je můžeme ekvivalentně umocnit.

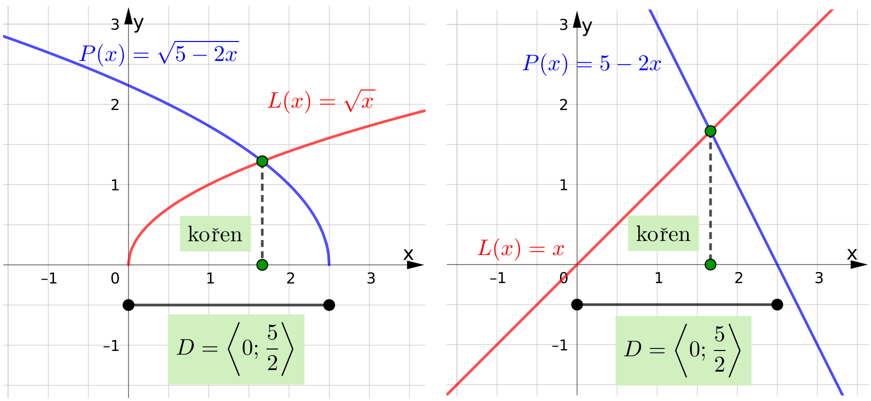
$$x = 5 - 2x$$

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3} \in D$$

$$\underline{\underline{K = \left\{\frac{5}{3}\right\}}}$$

GRAFICKY: Dvě *poloparaboly* se umocněním změní na dvě přímky. Lžikořen nemůže vzniknout.



(a) $\sqrt{x} = \sqrt{5-2x}$

(b) $x = 5 - 2x$

Obr. 4

1.7 Koho volíš? SUMO nebo EKUMO?

Na první pohled se zdá, že **SUMO** je výrazně jednodušší a rychlejší. Čím složitější jsou podmínky (vícero odmocnin), tím je **EKUMO** obtížnější:

Příklad 9: SUMO začíná vítězit

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+3} = \sqrt{x+1} - 2$ pomocí **SUMO** i **EKUMO**.

SUMO: Slepě umocníme (budem muset dvakrát).

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+3} &= \sqrt{x+1} - 2 \ |^2 \\
x+3 &= x+1-4\sqrt{x+1}+4 \\
4\sqrt{x+1} &= 2 \\
\sqrt{x+1} &= \frac{1}{2} \ |^2 \\
x+1 &= \frac{1}{4} \\
x &= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Zkouška kořen vyloučí:

$$L\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} \qquad \text{ale} \qquad P\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{K = \emptyset}}$$

EKUMO: Stanovíme podmínky.

- $(x+3 \geq 0) \wedge (x+1 \geq 0)$ (def. obor)
- $\sqrt{x+1} - 2 \geq 0$ (vlevo je nezáporná druhá odmocnina $\to$ pravá strana musí být také nezáporná)

První podmínka je znamená

$$\begin{gathered}
(x \geq -3) \ \wedge \ (x \geq -1) \\
x \geq -1
\end{gathered}$$

Definiční obor rovnice je tedy

$$D = \langle -1; \infty)$$

Druhá podmínka znamená, že

$$\sqrt{x+1} \geq 2$$

Nyní musíme vyřešit iracionální nerovnici, což teprvá budeme brát. Naštěstí je jedno-duchá. Kdyby byla dvoj-duchá, bylo by to horší. Nerovnici nemůžeme umocnit **slepě**. Museli bychom udělat zkoušku, ale ta by nebyla možná, pač vyjde nekonečně mnoho ře-šení! Musíme proto provést **ekvivalentní umocnění nerovnice**. Naštěstí existuje pro nerovnice věta obdobná větě 5a) – jsou-li obě strany nerovnice v D nezáporné (což zde platí), můžeme nerovnici ekvivalentně umocnit a **znaménko nerovnosti se nezmění**:

$$\begin{aligned} x+1 &\geq 4 \\ x &\geq 3 \end{aligned}$$

a zúžený definiční obor tedy je

$$\boxed{D' = \langle 3; \infty)}$$

Umocníme a dořešíme:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= \sqrt{x+1} - 2 \ |^2 \\ x+3 &= x+1-4\sqrt{x+1}+4 \\ 4\sqrt{x+1} &= 2 \\ \sqrt{x+1} &= \frac{1}{2} \ |^2 \\ x+1 &= \frac{1}{4} \\ x &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Vidíme, že $x = -\frac{3}{4} \notin D'$, takže to je lžikořen a dostáváme:

$$\underline{\underline{K = \emptyset}}$$

Příklad 10: Tentýž příklad efektivněji

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+3} = \sqrt{x+1} - 2$ pomocí **SUMO** i **EKUMO**.

Je překvapující, že se příklad velice zjednoduší, když nejprve dvojku z pravé strany převedeme na stranu levou:

SUMO:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} + 2 &= \sqrt{x+1} \;|^2 \\ x + 3 + 4\sqrt{x+3} + 4 &= x + 1 \\ 4\sqrt{x+3} &= -6 \end{aligned}$$

Hned vidíme, že rovnice nemá řešení, pač levá strana je nezáporná, takže nemůže být rovna -6.

$$\underline{\underline{K = \emptyset}}$$

EKUMO: Také zde to bude jednodušší – po převedení čísla 2 nalevo

$$\sqrt{x+3} + 2 = \sqrt{x+1}$$

se zjednoduší podmínky:

- $(x + 3 \geq 0) \wedge (x + 1 \geq 0)$ (def. obor)
- $\sqrt{x+3} + 2 \geq 0$ (vpravo je nezáporná druhá odmocnina $\rightarrow$ levá strana musí být také nezáporná)

První podmínka po úpravě dává $x \geq -1$. Druhá podmínka je splněna vždy, takže **výsledná podmínka** je jen nezúžený def. obor:

$$\boxed{D = \langle -1; \infty)}$$

Umocníme a stejně jako u SUMO dostáváme

$$4\sqrt{x+3} = -6$$

Takže tím končíme a píšeme

$$\underline{\underline{K = \emptyset}}$$

Ano, je to tak:

SUMO (slepé umocnění + zkouška) je ve většině příkladů snadnější a rychlejší methoda než EKUMO (podmínky – bez nutnosti zkoušky).

Ale BACHA! Jsou příklady, kdy je efektivnější **EKUMO**, nebo kdy se ani **SUMO použít nedá**! Ukažme si to na příkladech.

Příklad 11: EKUMO boduje

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{5-5x} = \sqrt{3x-11}$

SUMO: Slepě umocníme:

$$\begin{aligned} \sqrt{5-5x} &= \sqrt{3x-11} \\ 5-5x &= 3x-11 \\ 8x &= 16 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Zkouška kořen vyloučí – pod odmocninami vycházejí záporná čísla.

$$\underline{\underline{K = \emptyset}}$$

EKUMO: Pač obě strany rovnice jsou v D vždy nezáporné, stačí jen určit podmínku pro def. obor:

- $(5 - 5x) \geq 0 \ \wedge \ (3x - 11) \geq 0 \qquad \text{(def. obor)}$

Dostáváme

$$x \leq 1 \ \wedge \ x \geq \frac{11}{3}$$

Ale průnik těchto intervalů je prázdný, takže rovnice **není definovaná pro žádné číslo**. Množina kořenů je prázdná a nemusíme nic řešit!

$$\underline{\underline{K = \emptyset}}$$

V tomto příkladě bylo EKUMO mnohem jednodušší. Je vidět, že:

Určit si definiční obor rovnice (i když chci dále pokračovat pomocí SUMO) se někdy vyplatí.

Další příklad vokazuje, že se bez EKUMO někdy neobejdeme!

Příklad 12: EKUMO je na koni

Řešte v $\mathbb{R}: 2\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = 1 - 2x$

SUMO: SUMO je nějak moc pyšné. Ale pýcha předchází pád!

$$2\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = 1 - 2x \ |^2$$
$$4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 1 - 4x + 4x^2$$
$$4x^2 - 4x + 1 = 1 - 4x + 4x^2$$
$$0 \cdot x = 0$$

Vychází nám, že kořenem je **každé reálné číslo**. Jak ale udělat zkoušku, abychom vyloučili **lžikořeny**? A jsme v čudu! SUMO totálně selhalo.
EKUMO: Tak se předveď:

- $x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$ (def. obor)
- $1 - 2x \geq 0$ (Vlevo je odmocnina $\rightarrow$ pravá strana musí být nezáporná)

První podmínka je splněna vždy – pač platí

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

Definiční obor je tedy

$$D = R$$

Druhá podmínka dává $x \leq \frac{1}{2}$. Zúžený definiční obor je tedy

$$\boxed{D' = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle}$$

Zbylý postup viz SUMO. Dostáváme

$$K = D' \cap R = D'$$

$$\underline{\underline{K = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle}}$$

Je zajímavé, že příklad lze řešit ještě úsporněji. Každý blbec asi zná vzorec, který platí pro každé reálné číslo a:

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|} \tag{6}$$

Díky tomu lze levou stranu upravit jako:

$$2\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$$

a rovnice má tvar

$$2\left|x - \frac{1}{2}\right| = 1 - 2x$$

Po vydělení dvěma a vytknutí máme

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Ale každý blbec asi zná též definici absolutní hodnoty reálného čísla a:

$$|a| = -a \quad \text{pro všechna} \quad a \leq 0$$

Naše rovnice je tedy splněna pro každé reálné x, pro které je

$$x - \frac{1}{2} \leq 0$$

Tedy pro $x \leq \frac{1}{2}$. Odtud

$$\underline{\underline{K = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle}}$$

Teď bude obdobný, ale mnohem jednodušší příkládek:

Příklad 13: Esencialita

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2} = x$

SUMO:

$$\sqrt{x^2} = x \;\big|^2$$
$$x^2 = x^2$$

Rovnice je splněna pro **každé reálné** x. Zkouška není možná. Nastupuje EKUMO:

EKUMO: Stručně – podmínka pro definiční obor není – za x pod odmocninou můžeme dosadit cokoliv, takže $D = R$. Levá strana je vždy nezáporná, takže jediná podmínka je pro pravou stranu $\rightarrow x \geq 0$. Definiční obor se zúžil na

$$\boxed{D' = \langle 0; \infty)}$$

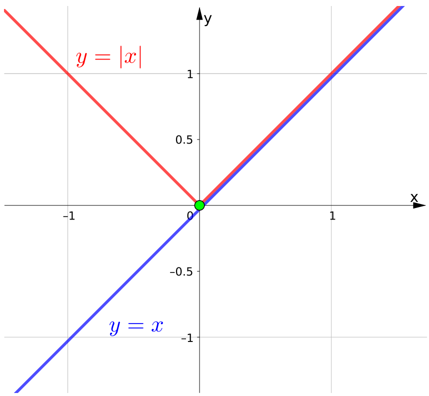
Dostáváme tedy

$$\underline{\underline{K = \langle 0; \infty)}}$$

Řešení pomocí vzorce (6):

$$\sqrt{x^2} = x$$
$$|x| = x \qquad \text{(a)}$$
$$x \geq 0$$

Jak vypadá rovnice (a) graficky?



Z grafu je řešení hned vidět – grafy levé a pravé strany rovnice splývají v intervalu $\langle 0; \infty)$.

Někdy je třeba umocňovat dvakrát:

Příklad 14: Dvojí umocnění – Janeček 3.2.3. 14)

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4}$

SUMO:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} &= \sqrt{3x+4} \;|^2 \\
2x+1+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}+x-3 &= 3x+4 \\
2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3} &= 6 \\
\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3} &= 3 \;|^2 \\
(2x+1)(x-3) &= 9 \\
2x^2-6x+x-3 &= 9 \\
2x^2-5x-12 &= 0 \\
D = 121 &= 11^2 \\
x_1 = 4 \quad & \xcancel{x_2 = -\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Zkouška $\rightarrow$ x_2 je lžikořen.

$$\underline{\underline{K = \{4\}}}$$

Příklad 15: Divo-Čína z Janečka – 3.2.9 5)

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+1} + x^2 - 2x - 1 = 0$

SUMO:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1}+x^2-2x-1&=0\\
x^2-2x-1&=-\sqrt{x+1}\ |^2\\
(x^2-2x-1)^2&=x+1\\
&\vdots \qquad \text{(umocnit, převést vlevo)}\\
x^4-4x^3+2x^2+3x&=0\\
x(x^3-4x^2+2x+3)&=0
\end{aligned}$$

Dostáváme rovnici v součinovém tvaru, vidíme, že jeden kořen bude

$$x_1=0.$$

Ale co s tou závorou? Pokusíme se ji rozložit na kationty a anionty. Zachrání nás SOSO:

$$\begin{aligned}
x^3-4x^2+2x+3&=x^3-3x^2-x^2+2x+3\\
&=(x^3-3x^2)-(x^2-2x-3)\\
&=x^2(x-3)-(x-3)(x+1)\\
&=(x-3)(x^2-x-1)
\end{aligned}$$

Vrátíme se k rovnici

$$(x-3)(x^2-x-1)=0$$

Vidíme, že další kořen bude

$$x_2=3.$$

Zbývá vyřešit KVARO:

$$x^2-x-1=0$$

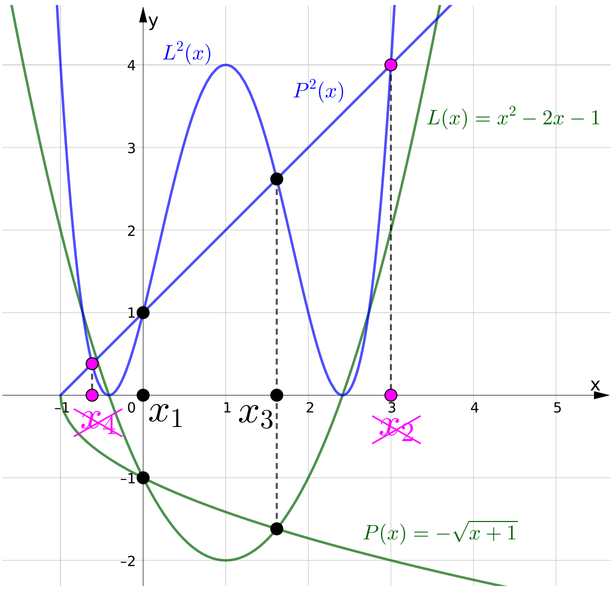
Každej blbec v ní poznáná rovnici pro **zlatý řez** φ. Přes diskroš dostáváme

$$x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (= \varphi \doteq 1,618) \qquad x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ \left(= -\frac{1}{\varphi} \doteq -0,618\right)$$

Zkouška vokáže, že x_2 a x_4 jsou lžikořeny.

$$\underline{\underline{K = \left\{0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}}$$

Graficky to vypadá takto:



2 Cvičení

Cvičení 1: Názef Řešení ⇒

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+1} = 5 - x$

Cvičení 2: Janeček 83/3.2.1 4) Řešení ⇒

Řešte v $\mathbb{R}$: $21 + \sqrt{2x-7} = x$

Cvičení 3: Janeček 83/ 9) nahoře Řešení ⇒

Řešte v $\mathbb{R}$: $6x - 13\sqrt{x} + 6 = 0$

Cvičení 4: Janeček 83/17) Řešení ⇒

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$

Cvičení 5: Janeček 84/8) nahoře Řešení ⇒

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{9-x}$

3 Řešení cvičení

Řešení cvičení 1: Názef **Zadání ⇒**

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+1} = 5 - x$

Výsledek:

$K = \{3\}$

Řešení:

SUMO:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= 5 - x \\ x + 1 &= 25 - 10x + x^2 \\ x^2 - 11x + 24 &= 0 \\ (x-3)(x-8) &= 0 \\ x_1 = 3 \quad x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Zkouška odhalí, že 8 je lžikořen.

$$\underline{\underline{K = \{3\}}}$$

Řešení cvičení 2: Názef **Zadání ⇒**

Řešte v $\mathbb{R}$: $21 + \sqrt{2x-7} = x$

Výsledek:

28

Řešení:

SUMO:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-7} &= x-21 \\ 2x-7 &= (x-21)^2 \\ 2x-7 &= x^2-42x+441 \end{aligned}$$

$$x^2-44x+448=0$$

$$D=144=12^2$$

$$x_{1,2}=\frac{44\pm 12}{2}=22\pm 6$$

$$x_1=28 \quad ; \quad \cancel{x_2=16}$$

Zkouška jeden kořen vyloučila.

$$\underline{\underline{K=\{28\}}}$$

Řešení cvičení 3: Janeček 83/ 9) nahoře

Zadání ⇒

Řešte v $\mathbb{R}$: $6x-13\sqrt{x}+6=0$

Výsledek:

$$\frac{4}{9}, \frac{9}{4}$$

Řešení:

SUMO:

$$6x+6=13\sqrt{x}$$

$$36x^2 + 72x + 36 = 169x$$
$$36x^2 - 97x + 36 = 0$$
$$\sqrt{D} = 65$$
$$x_{1,2} = \frac{97 \pm 65}{72}$$
$$x_1 = \frac{162}{72} = \frac{9}{4} \quad ; \quad x_2 = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$

Oba kořeny projdou zkouškou.

$$\underline{\underline{K = \left\{\frac{4}{9}, \frac{9}{4}\right\}}}$$

Řešení cvičení 4: ⇒

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$

Výsledek:

4

Řešení:

Něco mi říká, že je lepčí před umocněním nejprve převést tu zápornou odmocninu doprava:

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{x-3} + 2$$
$$\cancel{x} + 5 = \cancel{x} - 3 + 4\sqrt{x-3} + 4$$
$$4 = 4\sqrt{x-3}$$
$$\sqrt{x-3} = 1$$
$$x - 3 = 1$$

$$x = 4$$

Kořen projde zkouškou.

$$\underline{\underline{K = 4\{\}}}$$

Schválně si zkus příklad vyřešit tak, že se to rovnou umocní – uvidíš, že se to zkomplikuje.

Řešení cvičení 5: Zadání ⇒

Řešte v $\mathbb{R}$: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{9-x}$

Výsledek:

0

Řešení:

Umocníme:

$$\begin{aligned}
3x + 1 + 2\sqrt{3x+1}\sqrt{x+4} + x + 4 &= 9 - x \\
2\sqrt{3x+1}\sqrt{x+4} &= 4 - 5x \\
4(3x+1)(x+4) &= (4-5x)^2 \\
4(3x^2 + 13x + 4) &= 16 - 40x + 25x^2 \\
12x^2 + 52x + 16 &= 16 - 40x + 25x^2 \\
-13x^2 + 92x &= 0 \\
x(-13x + 92) &= 0
\end{aligned}$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = \cancel{\frac{92}{13}}$$

Druhý kořen neprojde zkouškou (nechtělo se mi to počítat, tak jsem si to radši nakreslil v GeoGebře – viz obr.).