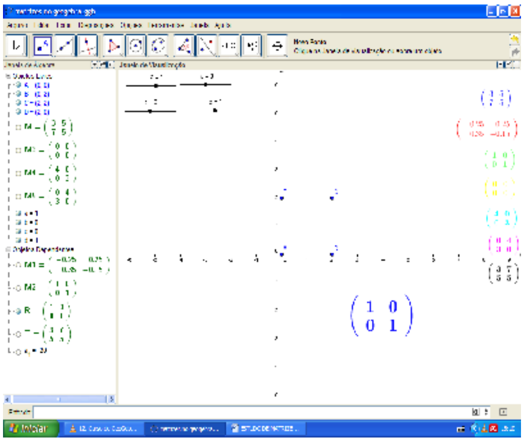
Transformações lineares

Quando um vetor pode ser escrito como uma constante k vezes outro vetor, ou seja, o vetor (u) é igual a k vezes o vetor (v), teremos que os vetores (u) e (v) são colineares, pertencem a uma mesma reta que os contém, e se podemos escrever um vetor por meio de uma combinação linear então temos que esta combinação linear gera outro vetor de mesmo sentido, mesma direção e de intensidade proporcional.

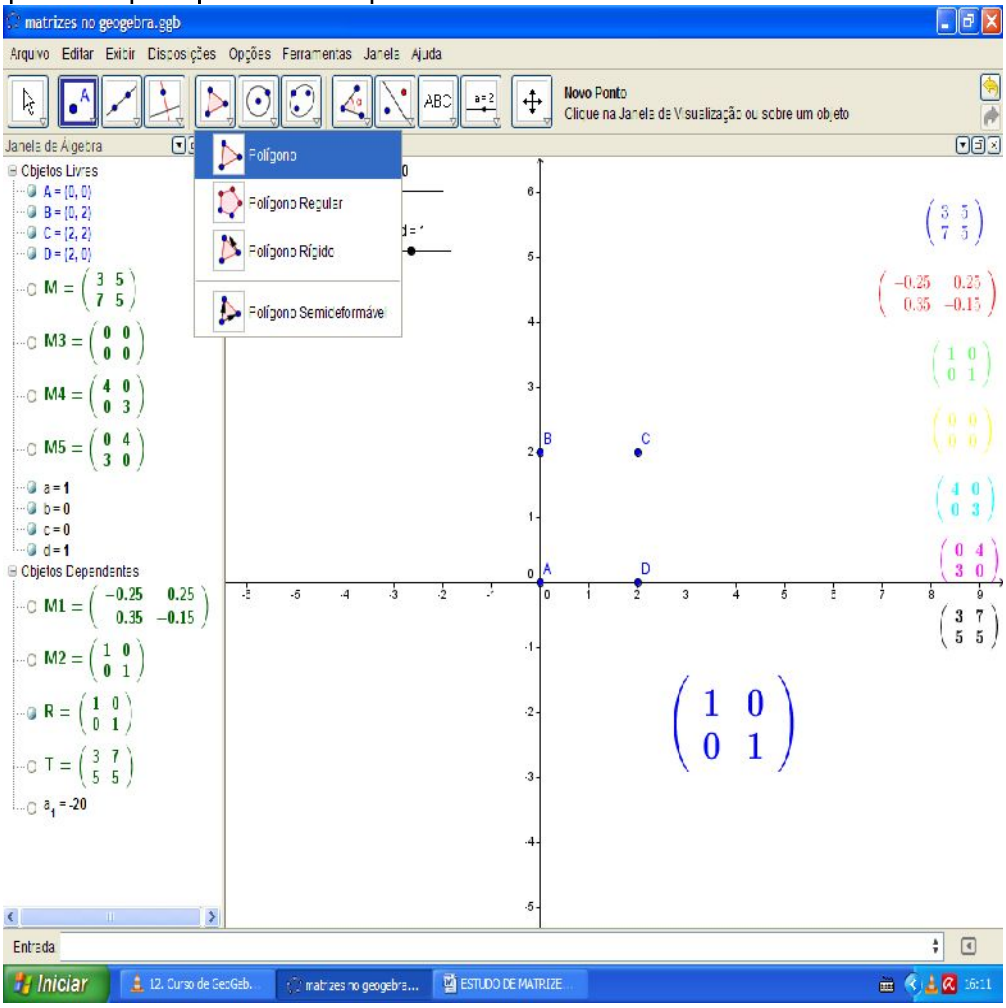
Com esta explicação, pensemos no segmento AB e em uma constante que poderá ser dado pelo seletor da tela anterior, seletor (a), quando multiplicarmos a constante “a” pelo segmento “AB” teremos outro segmento que será colinear a “AB”, mas com tamanho proporcional ao segmento AB, sendo uma quantidade “a” vezes maior.

Observe:
Com a construção anterior em aberto, construa um polígono como o modelo a seguir, polígono ABCD e faremos a combinação linear com os seletores a,b,c,d e a ferramenta “controle deslizante”.
Para construir o polígono ABCD devemos construir primeiramente os pontos A, B. C, e D. na seguinte forma: digite por vez A=(0,0) B=(0,2)   C=(2,2) e D=(2,0).

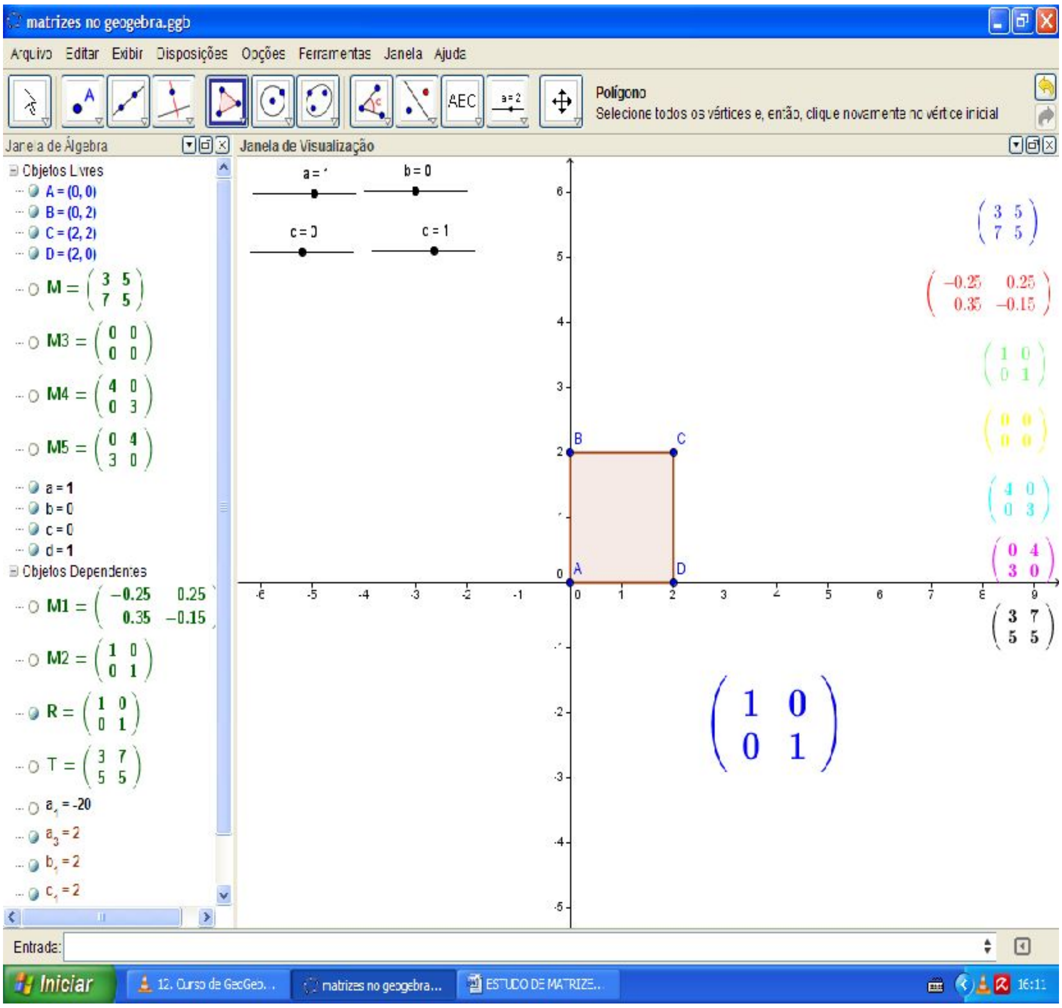


ISBN N° 978-85-8196-091-3

Agora com a ferramenta “polígono” clique em cada um dos pontos, começando em A passando por B depois por C e D e por fim de novo em A.



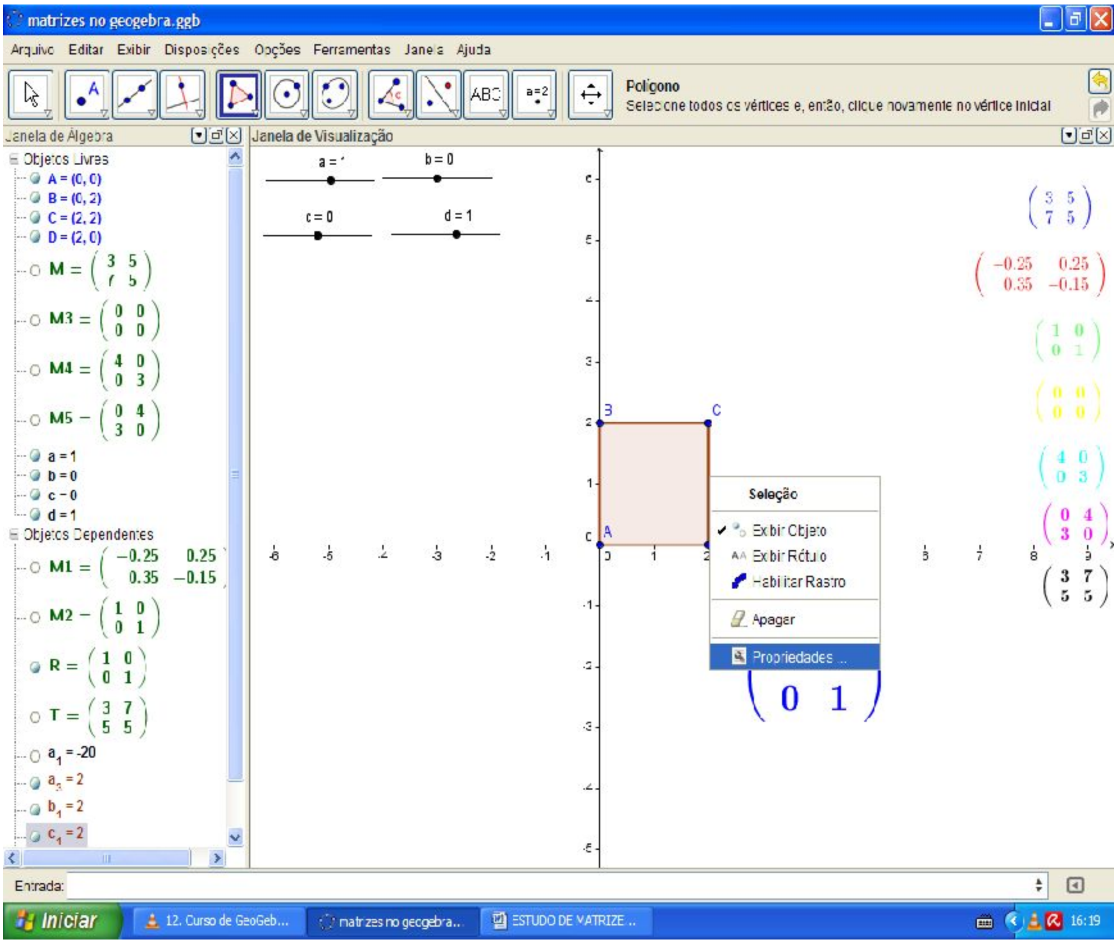
ISBN N° 978-85-8196-091-3



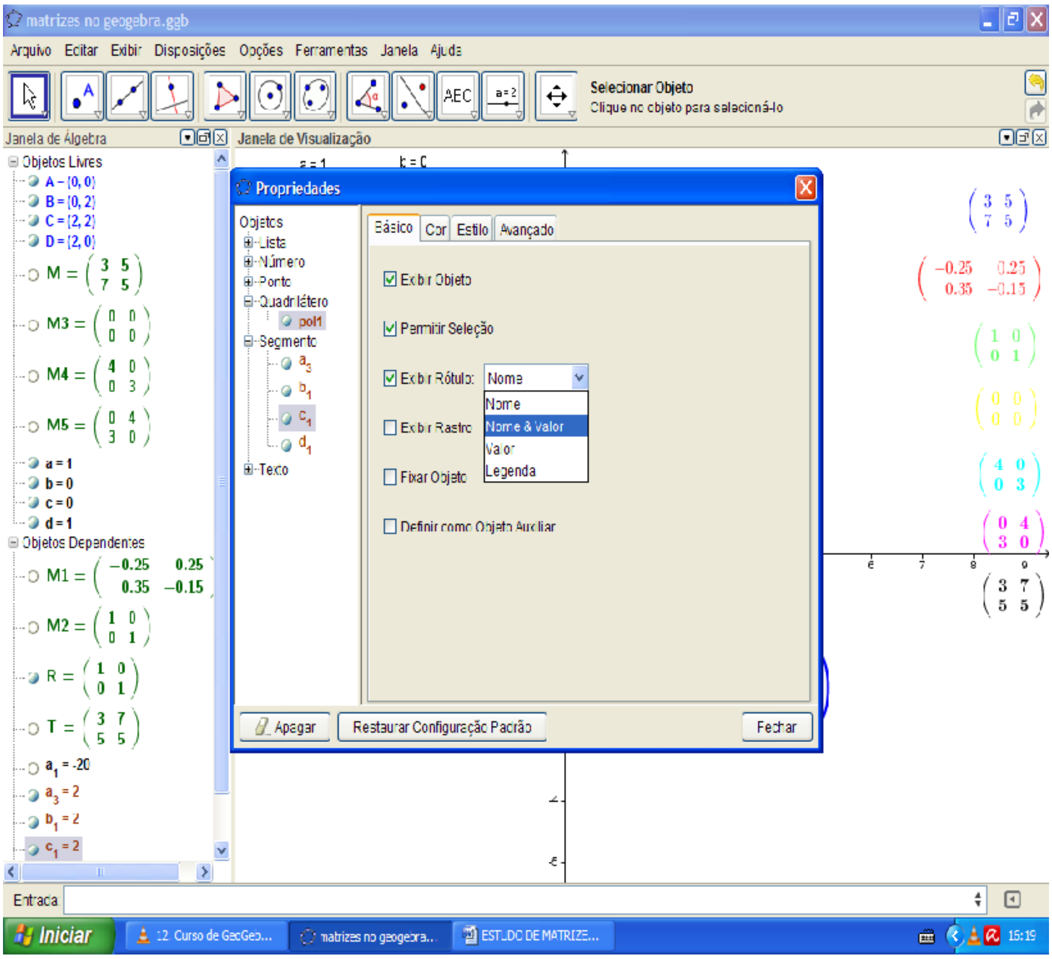
Ao determinarmos a transformação linear da matriz, estaremos na verdade fazendo a transformação linear de cada segmento cada lado do polígono ABCD pelas constantes representadas pelos seletores a,b,c,d respectivamente.

ISBN N° 978-85-8196-091-3

Para isto, exiba o nome de cada lado do polígono com o mouse, clicando com o botão esquerdo em cima do lado do polígono (e não dentro do polígono) e escolhendo a opção “básico” e depois “exibir rótulo” na forma que desejar.

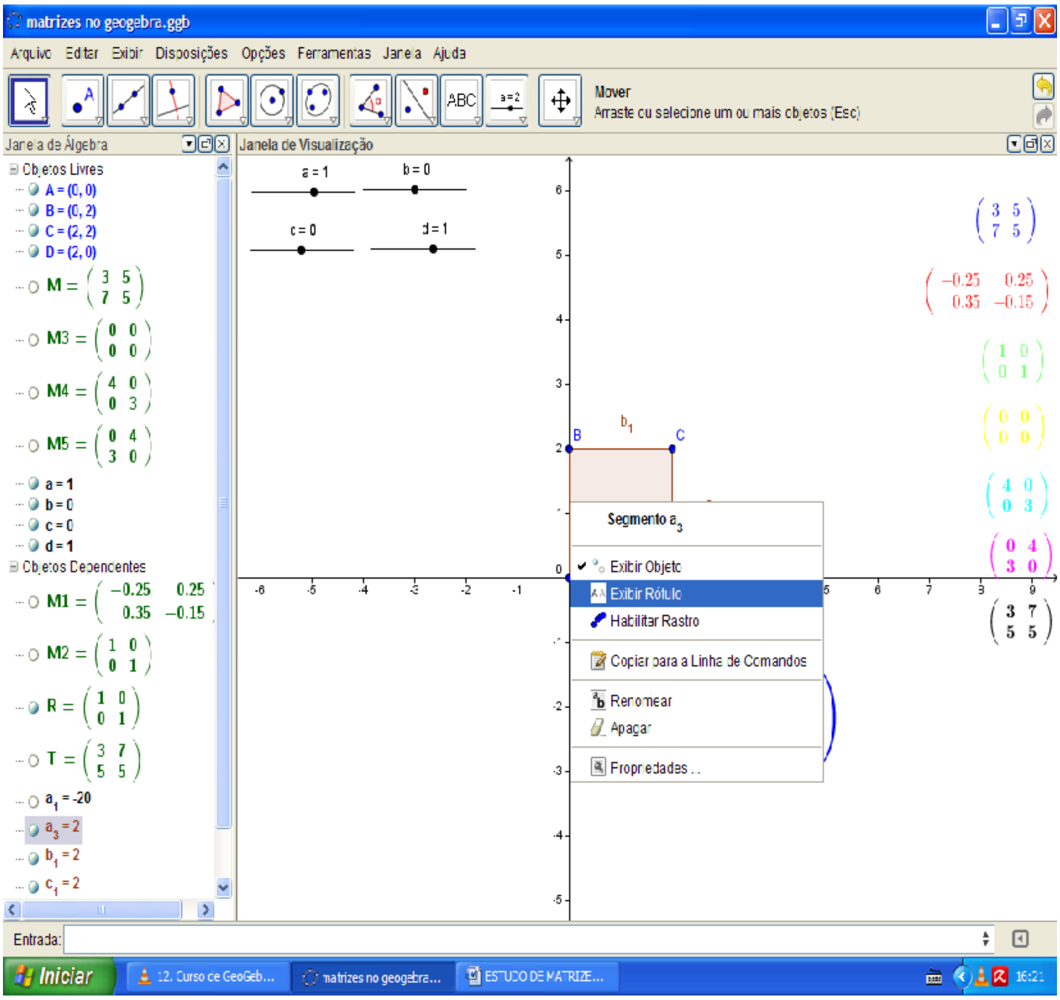


ISBN N° 978-85-8196-091-3

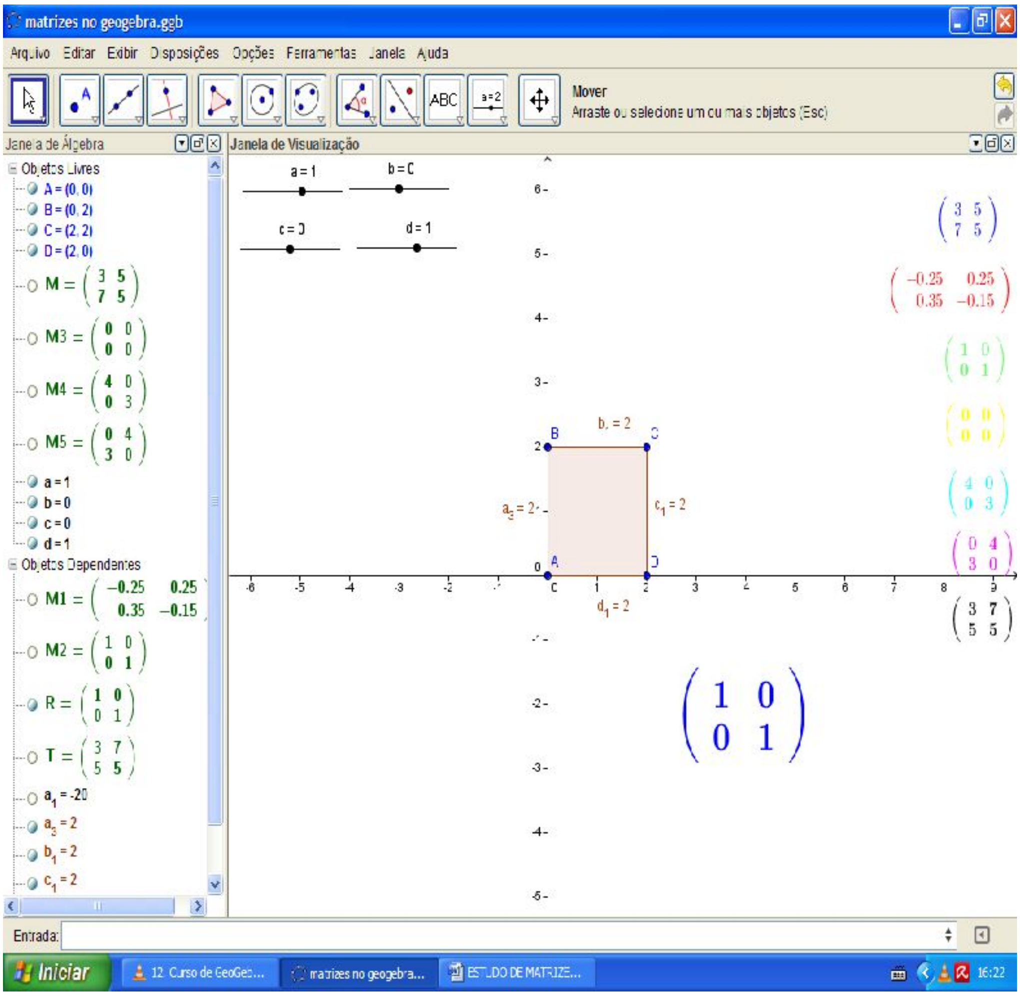


Ou ainda em “exibir rótulo”.

ISBN N° 978-85-8196-091-3

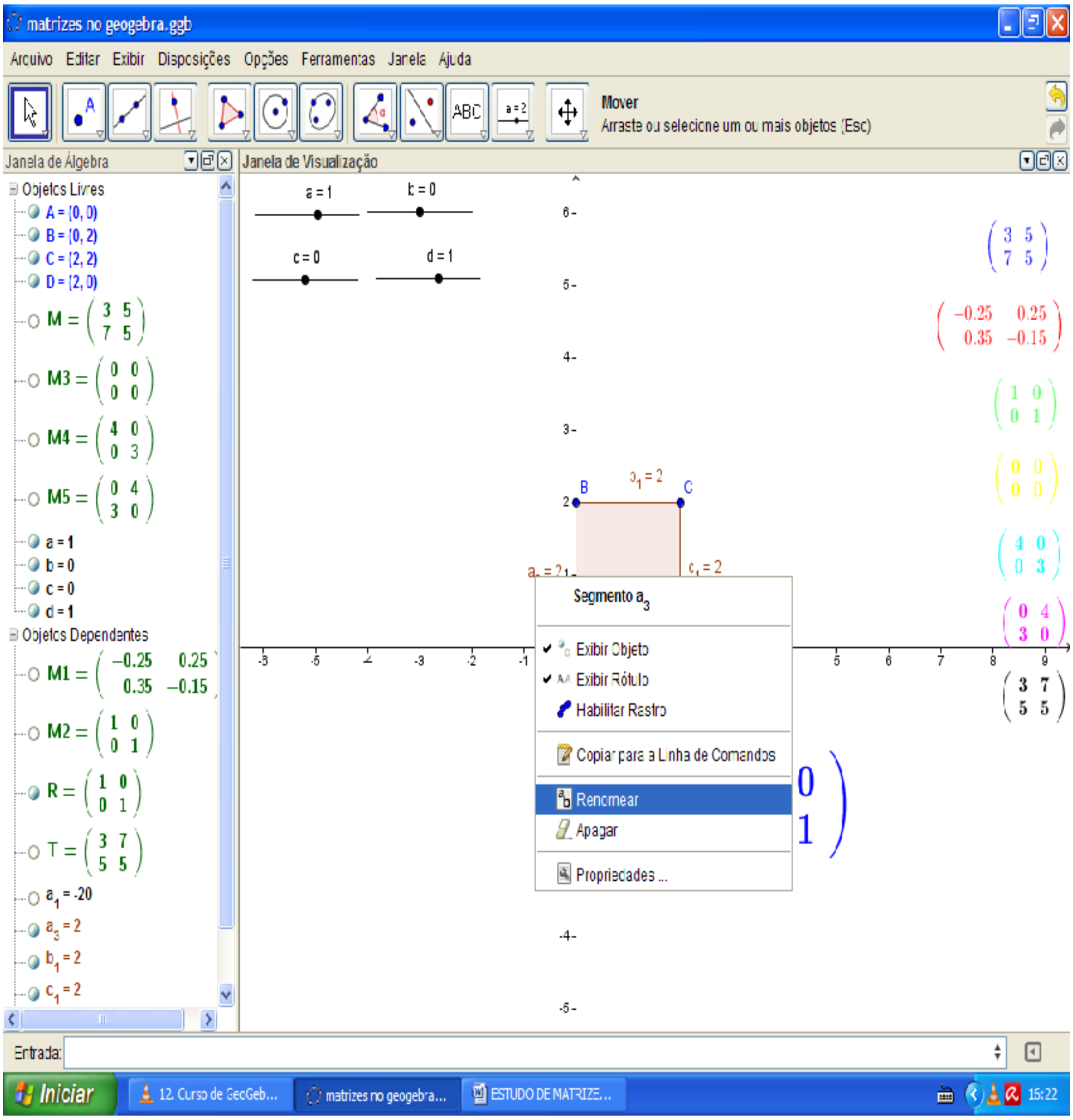


ISBN N° 978-85-8196-091-3

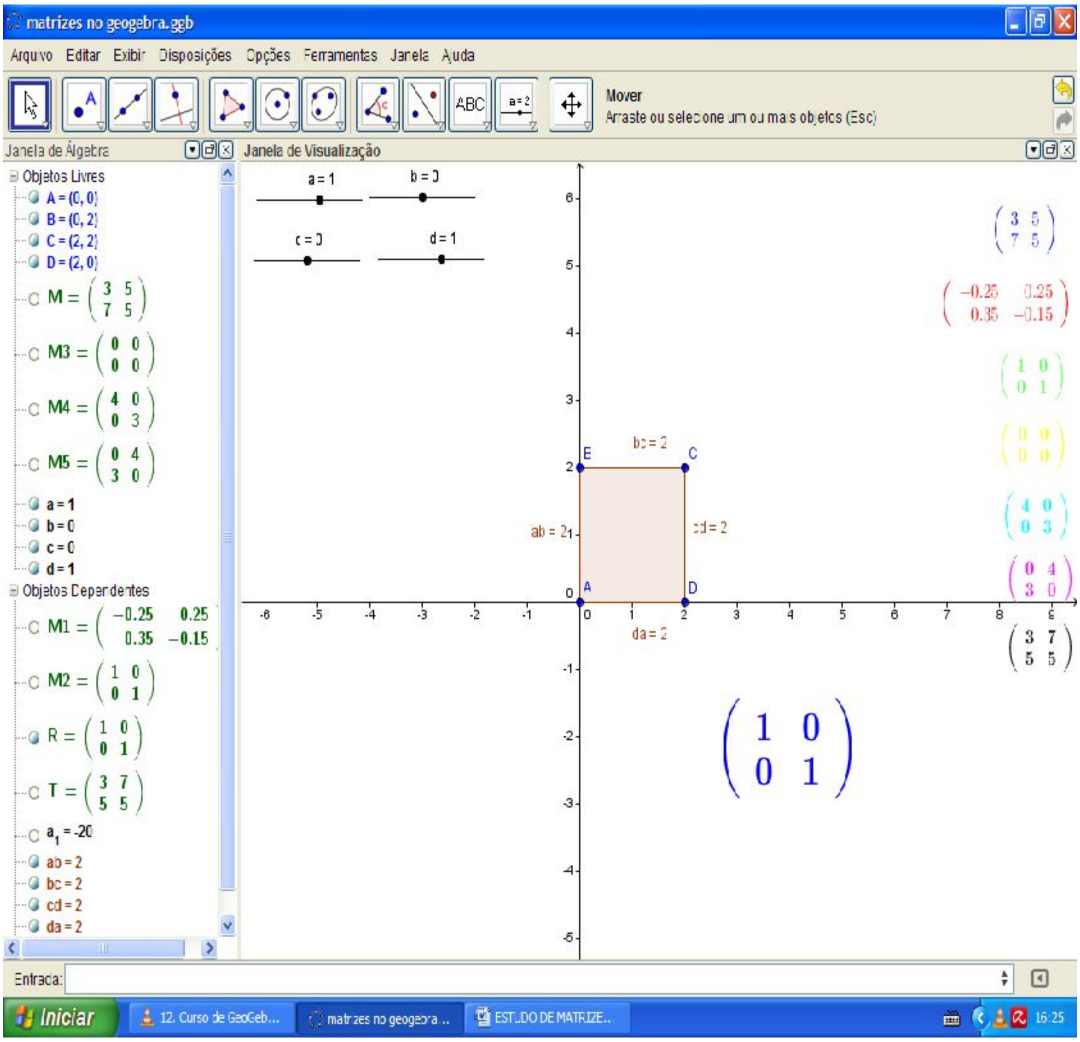


Para que facilite nosso estudo, troque os nomes dos segmentos de acordo com os pontos de origem e extremo do mesmo, os vértices do polígono.

ISBN N° 978-85-8196-091-3



ISBN N° 978-85-8196-091-3



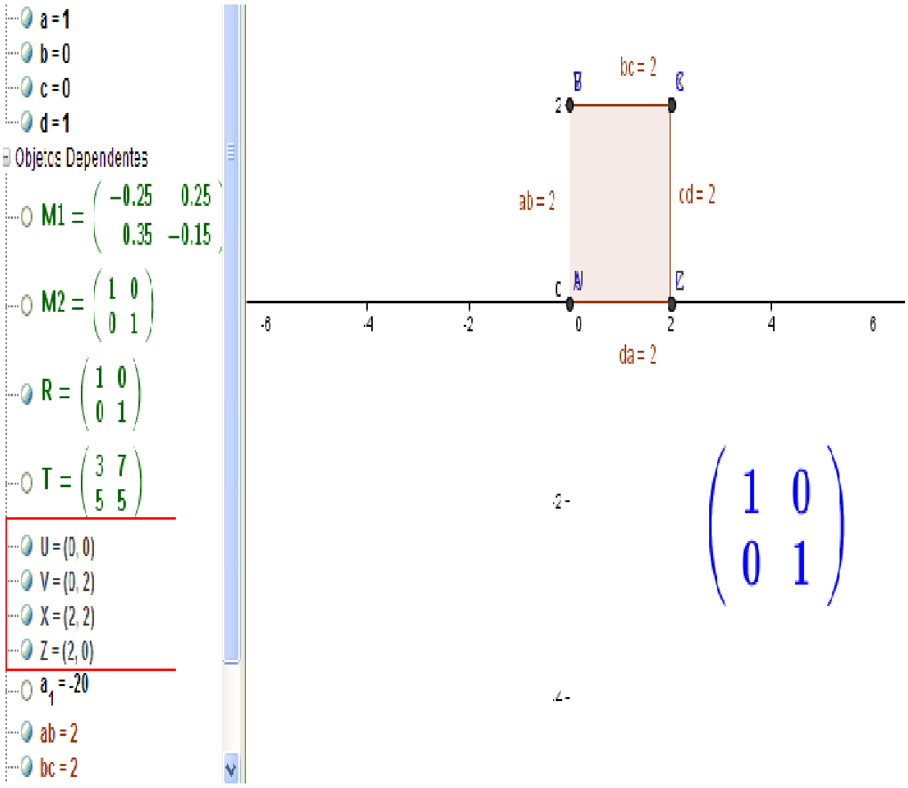
Agora vamos para as transformações lineares.

ISBN N° 978-85-8196-091-3

Vamos tratar cada ponto como um vetor, pois vamos assim multiplicar a matriz R pelos pontos (a partir de agora DENOMINADOS de vetores) vetores A, B, C, D um de cada vez, criando novas matrizes na seguinte forma:

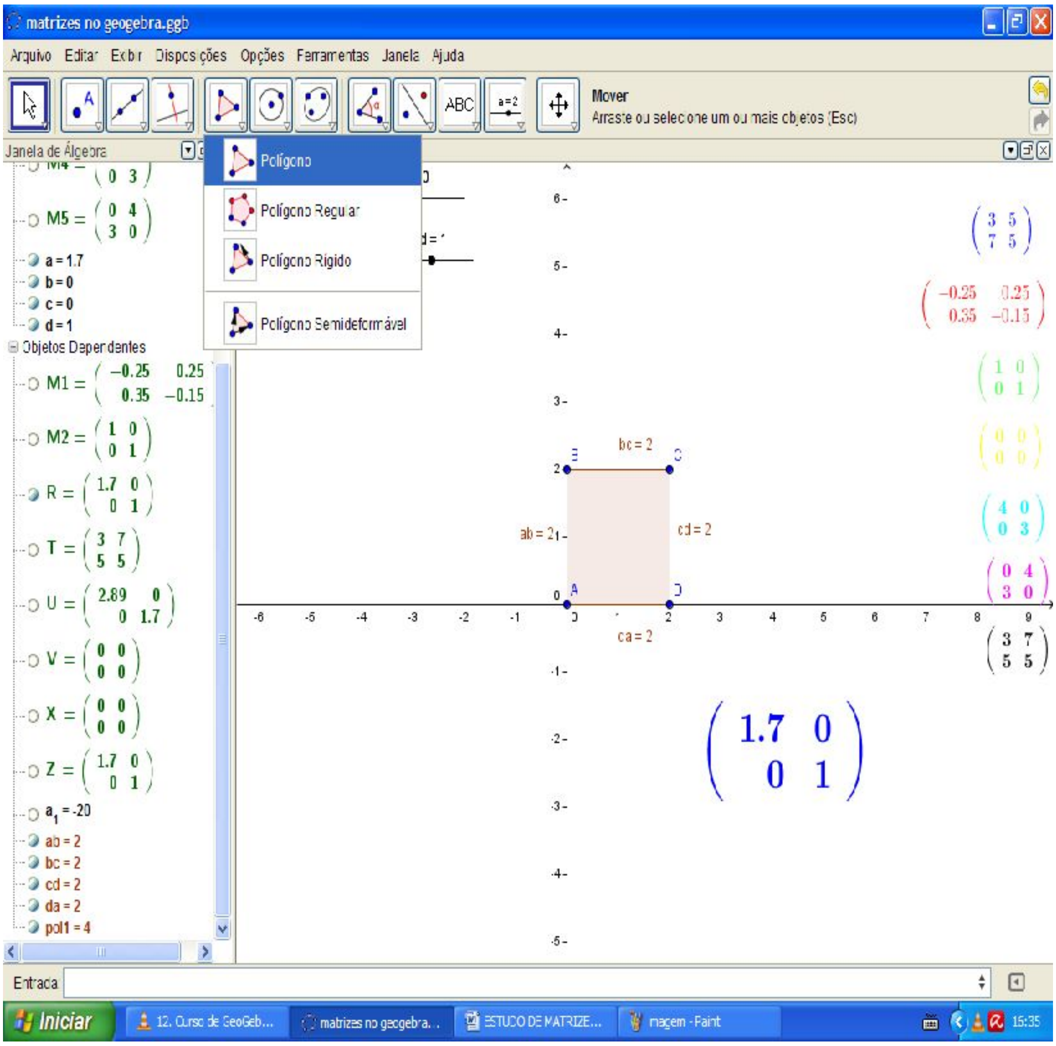
U= R*A   V= R*B   X= R*C   e   Z= R*D

Perceba que cada um desses vetores aparece em forma matricial na janela de álgebra.

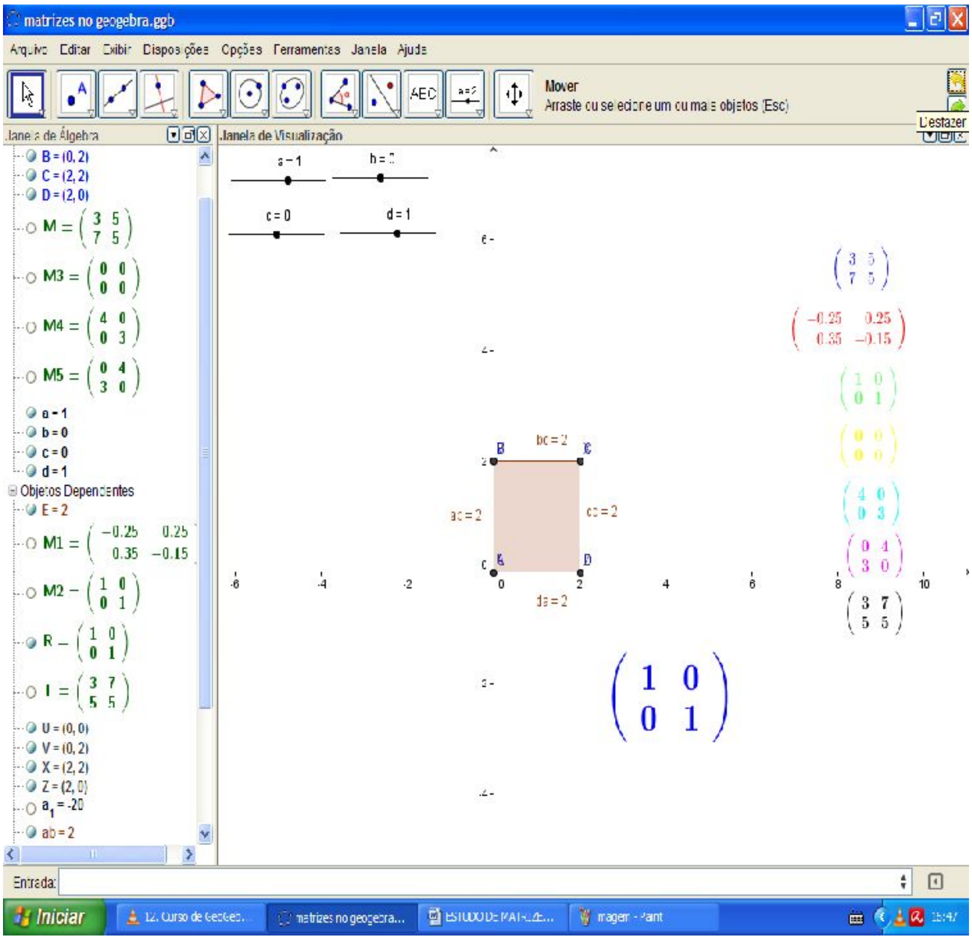


Agora vamos formar outro polígono com a ferramenta “polígono”, mas desta vez clicando nos vetores U, V, X, Z, U na janela de álgebra.

ISBN N° 978-85-8196-091-3

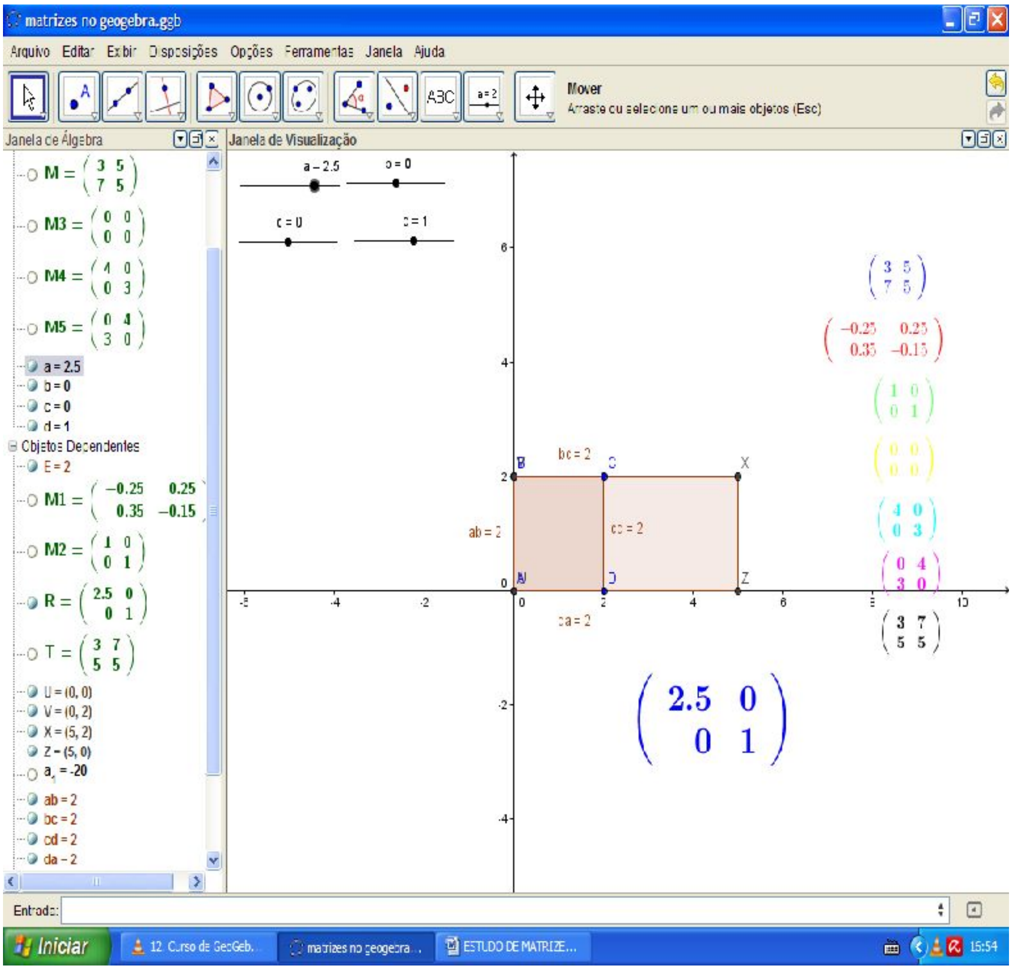


ISBN N° 978-85-8196-091-3



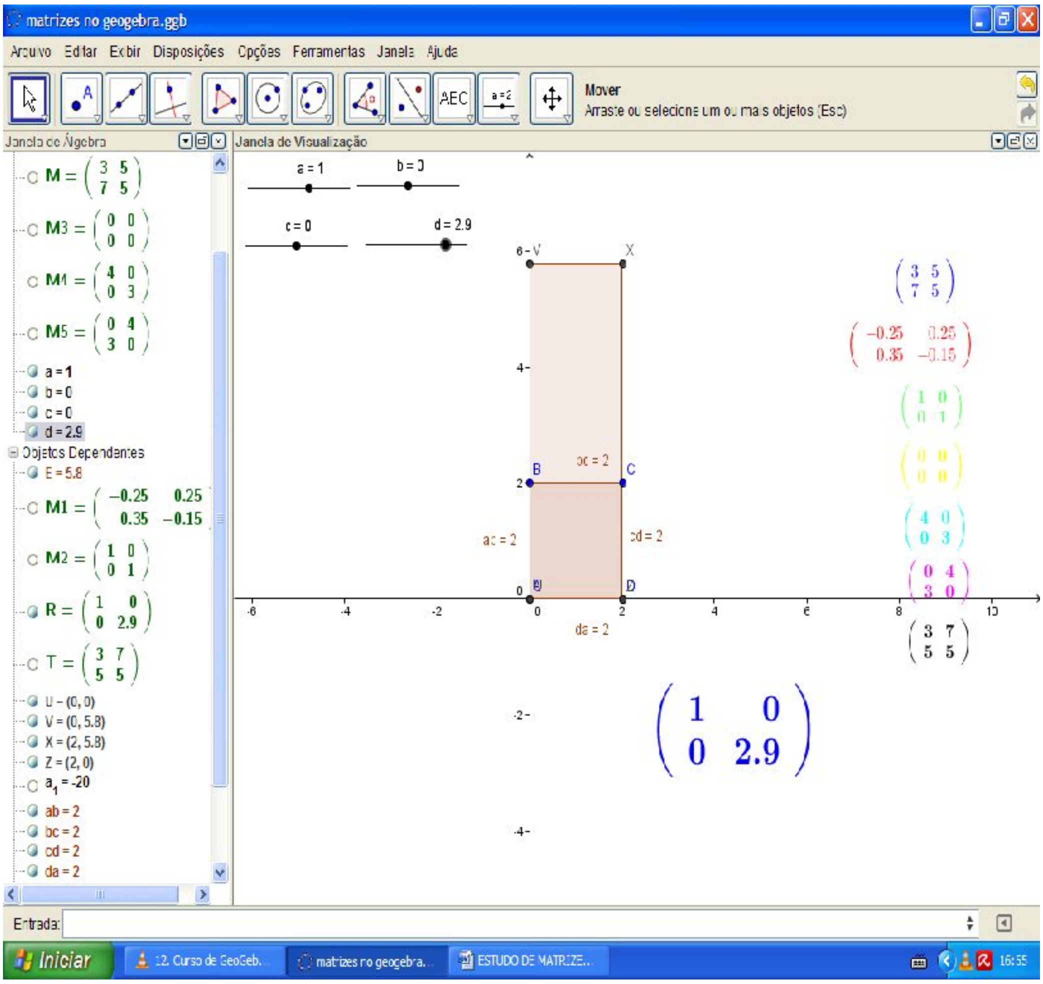
Pronto, basta agora com a ferramenta “mover” alterar os valores dos seletores para ver as transformações lineares que costumamos ver no caderno.

ISBN N° 978-85-8196-091-3



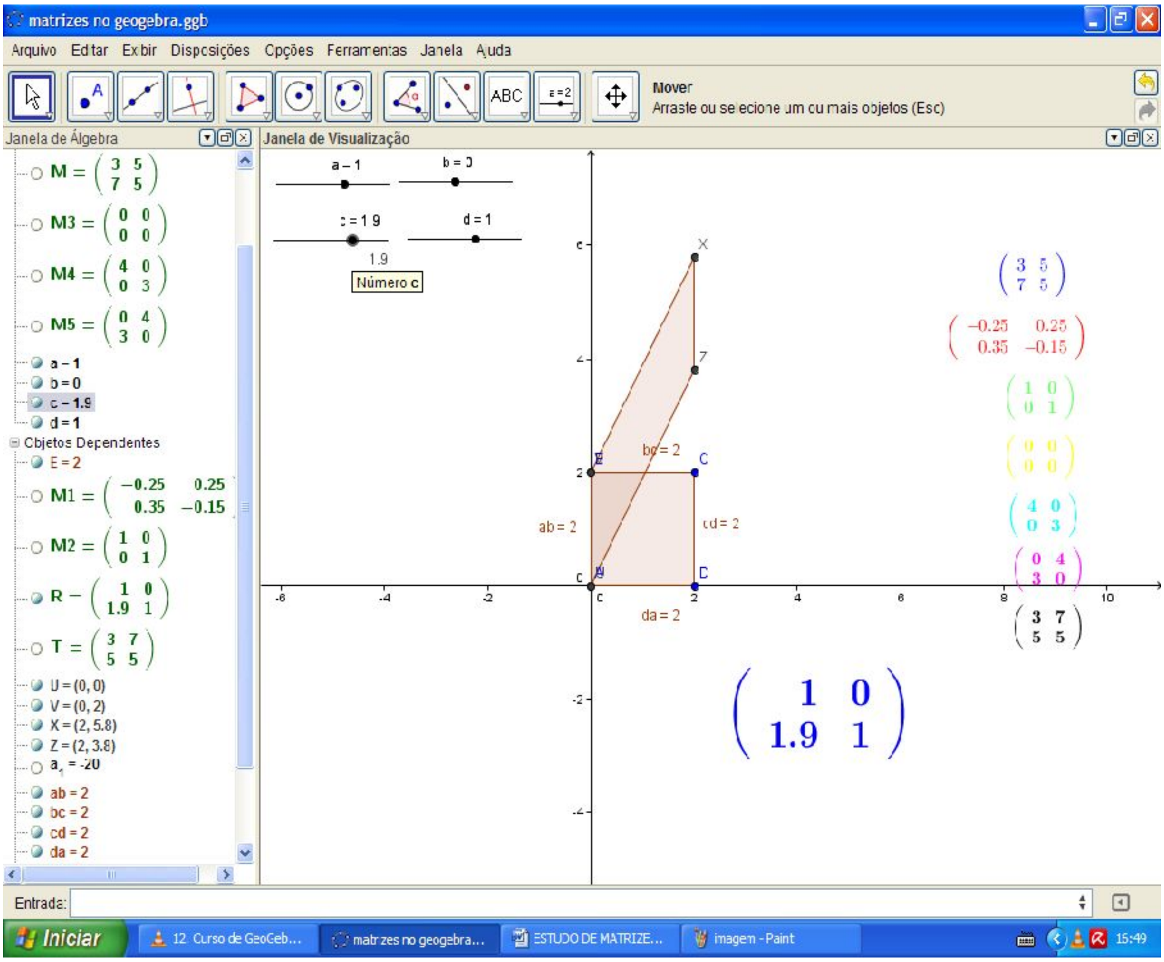
Por escalar.

ISBN N° 978-85-8196-091-3



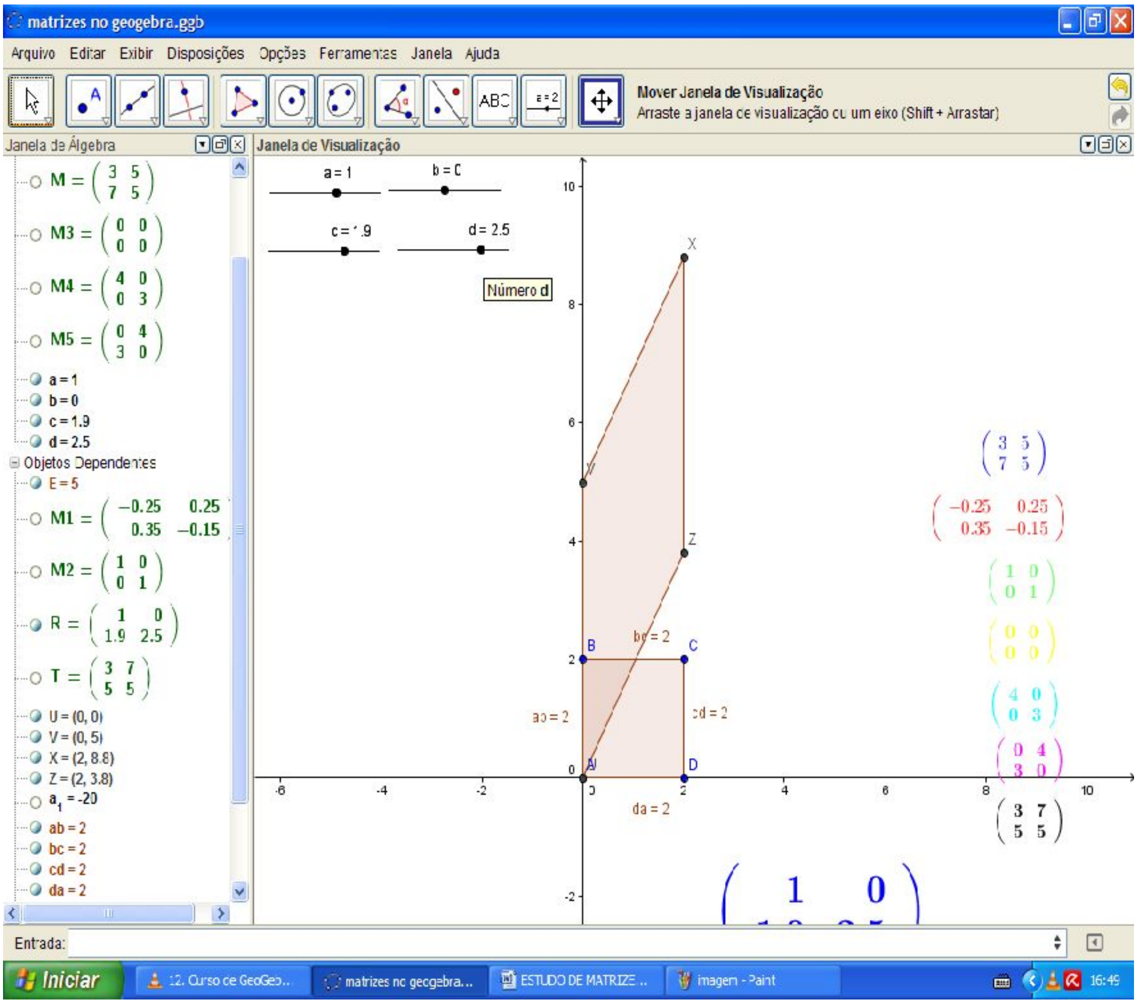
Por cisalhamento.

ISBN N° 978-85-8196-091-3

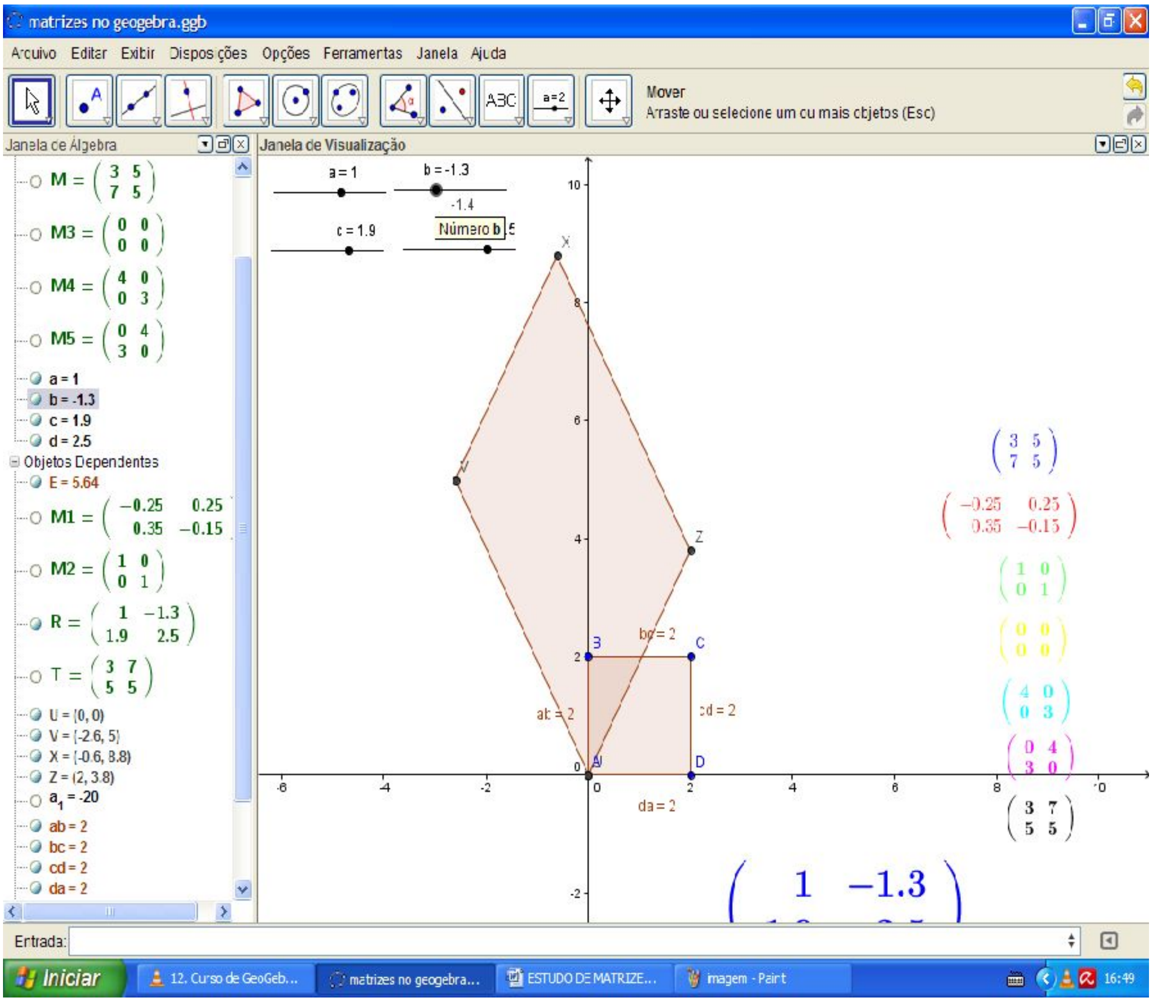


Observe que a representação matricial em forma de texto e sua representação geométrica têm alterações, isto se dá por serem diferentes formas de representar a mesma matriz.

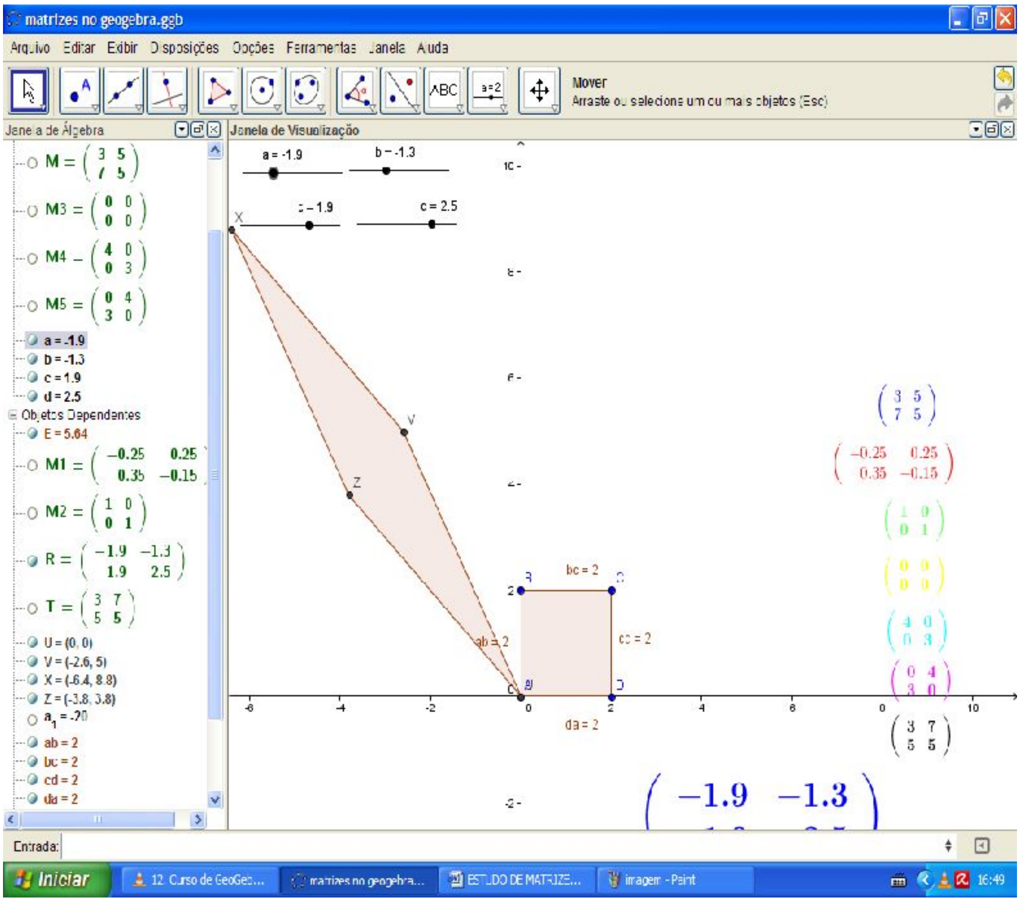
ISBN N° 978-85-8196-091-3



ISBN N° 978-85-8196-091-3



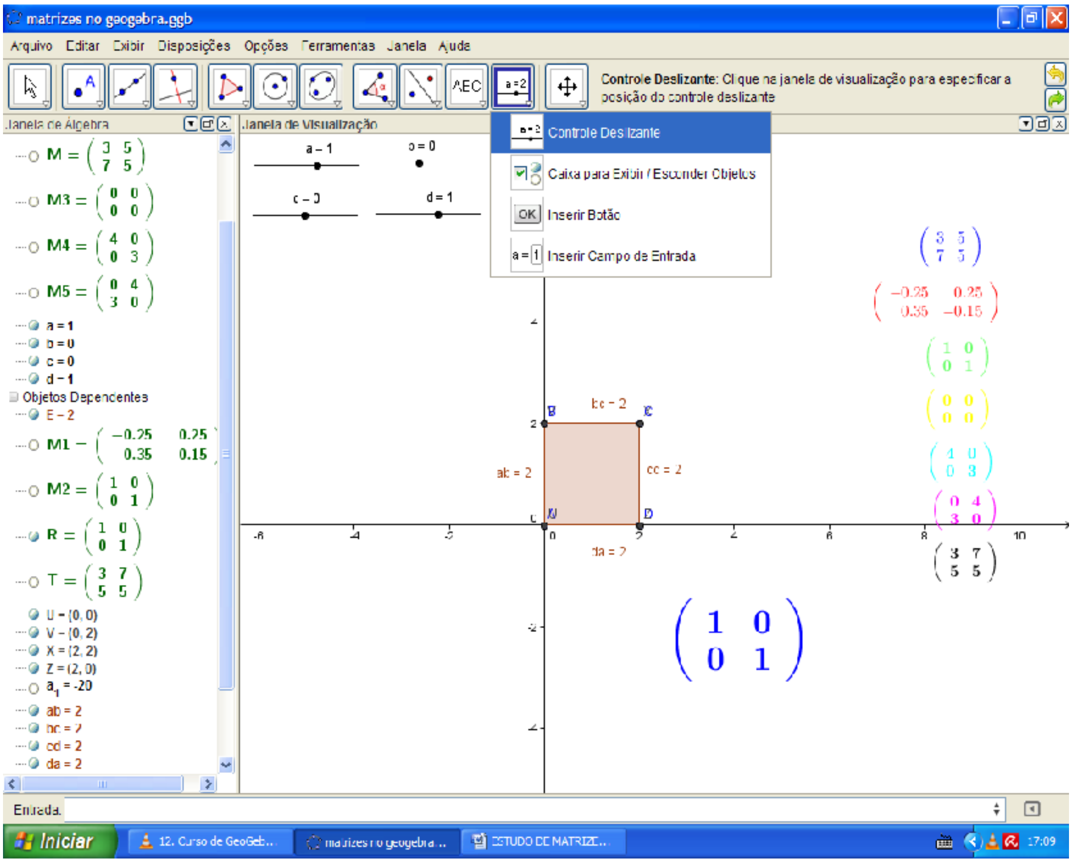
ISBN N° 978-85-8196-091-3



Fique à vontade.

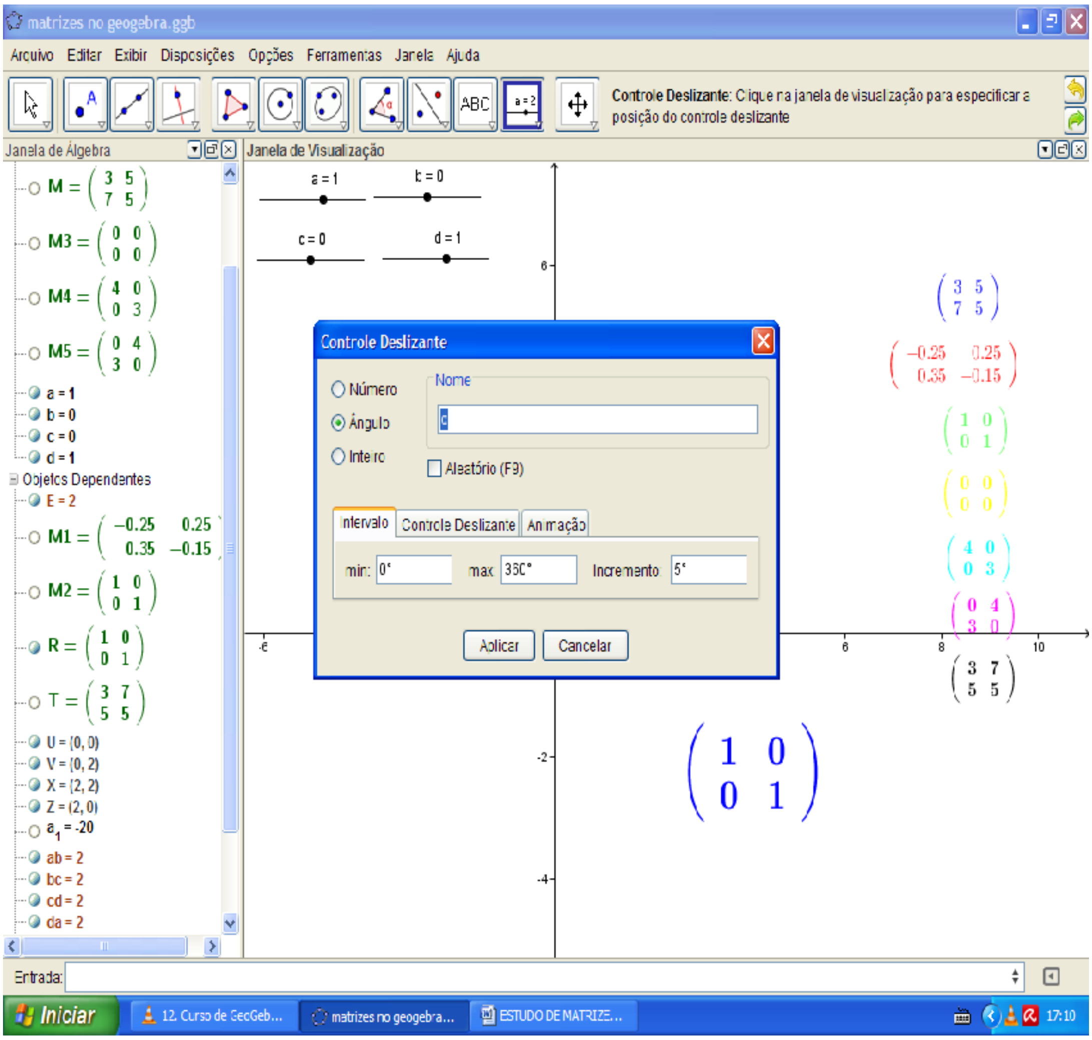
Vamos agora trabalhar com a transformação em rotação:
Crie um novo seletor (ferramenta "controle deslizante"), usaremos um ângulo para ele uma vez que a transformação não será mais linear e sim de rotação, ou seja, não irá variar por escala (no eixo OX) ou de cisalhamento (variando no eixo OY), mas sim por um determinado grau.

ISBN N° 978-85-8196-091-3

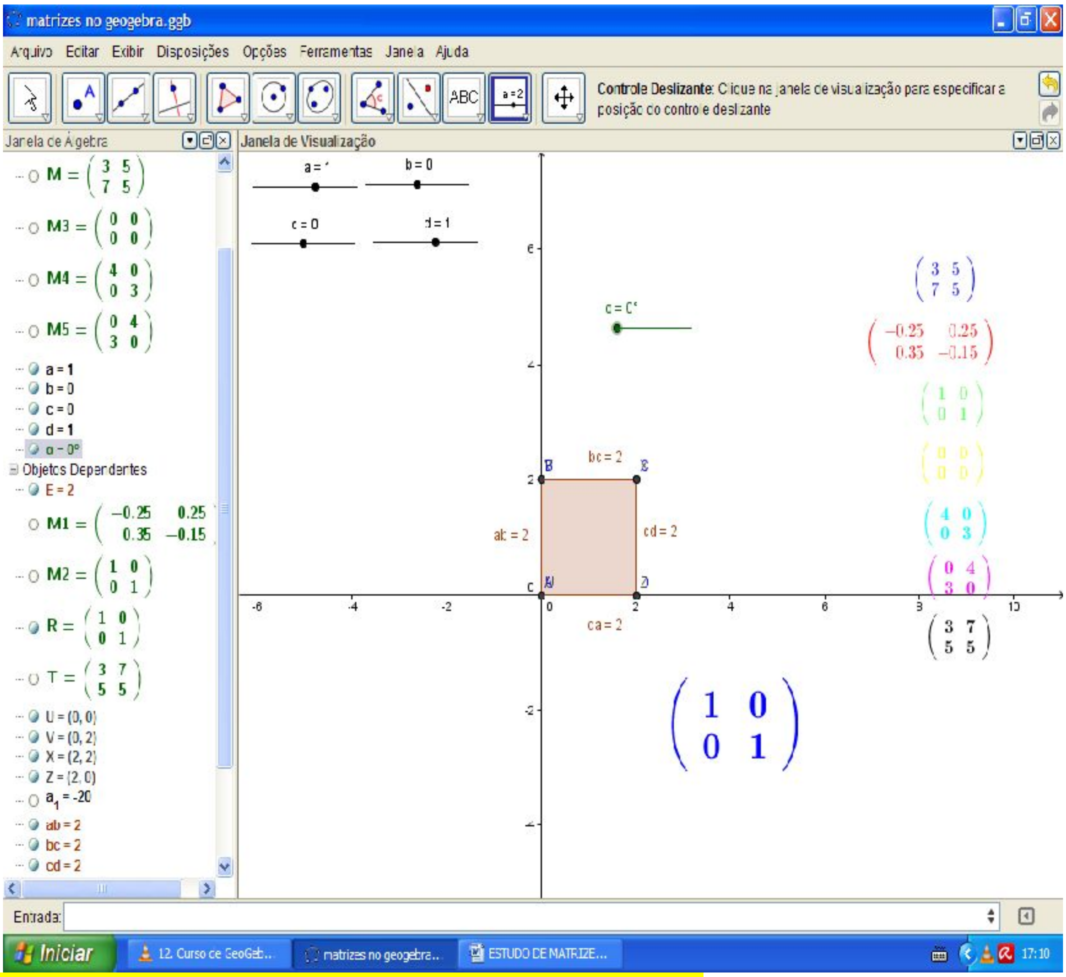


Escolha α=5° para que este varie de 5° em 5°.
Este ângulo de variação tem um nome especial, incremento, podemos ver o mesmo incremento no estudo de coordenadas polares no livro em que fala de funções desta coleção. ESTUDO DE FUNÇÕES COM O USO DO SOFTWARE GeoGebra.

ISBN N° 978-85-8196-091-3

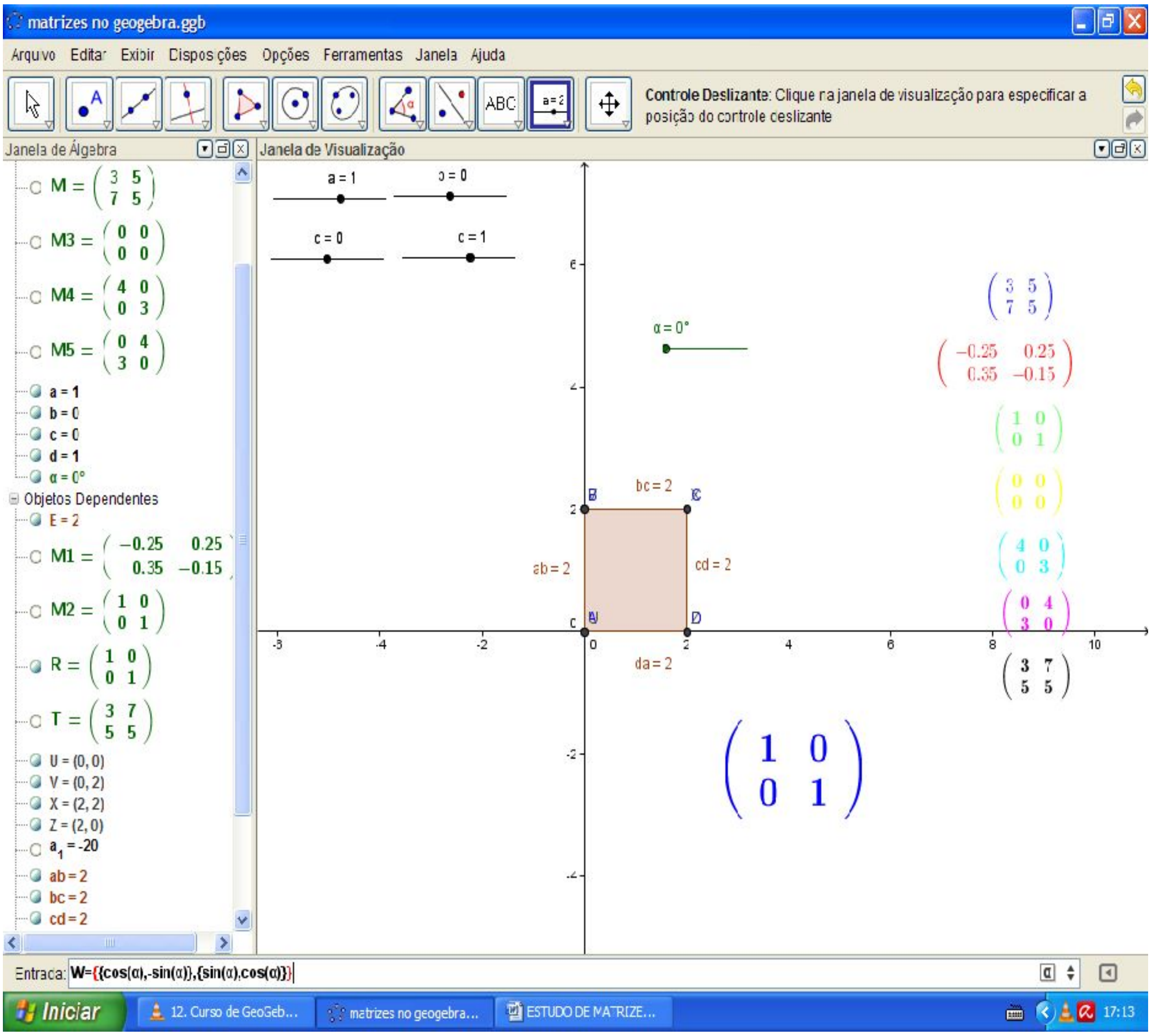


ISBN N° 978-85-8196-091-3

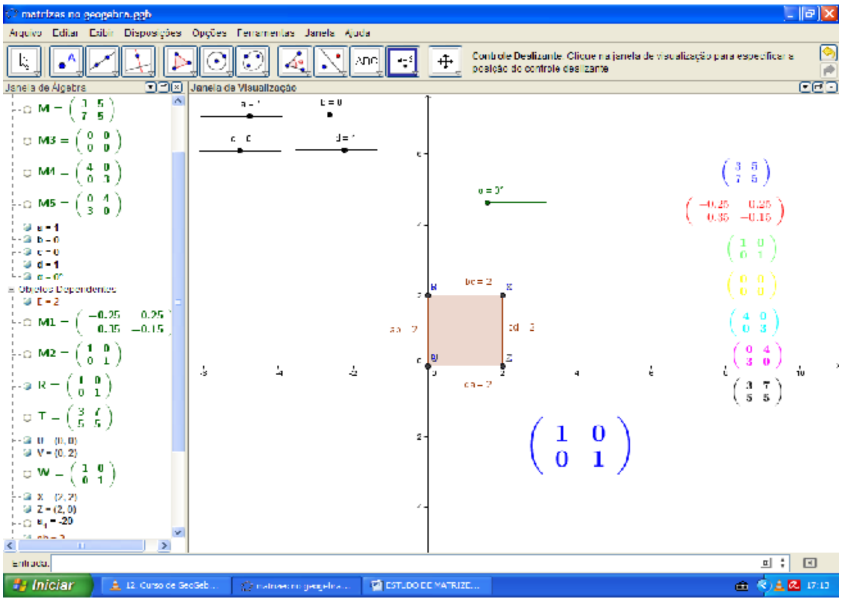


Crie uma nova matriz W={{cos(α),-sin(α)},{sin(α),cos(α)}}.
Esta matriz não é por acaso, ela é a própria matriz de rotação.

ISBN N° 978-85-8196-091-3



ISBN N° 978-85-8196-091-3



Só falta agora fazer a alteração nos vetores U, V, X, Z para que os mesmos passem a ser o produto entre as constantes apresentadas nos seletores a,b,c,d e a matriz W.

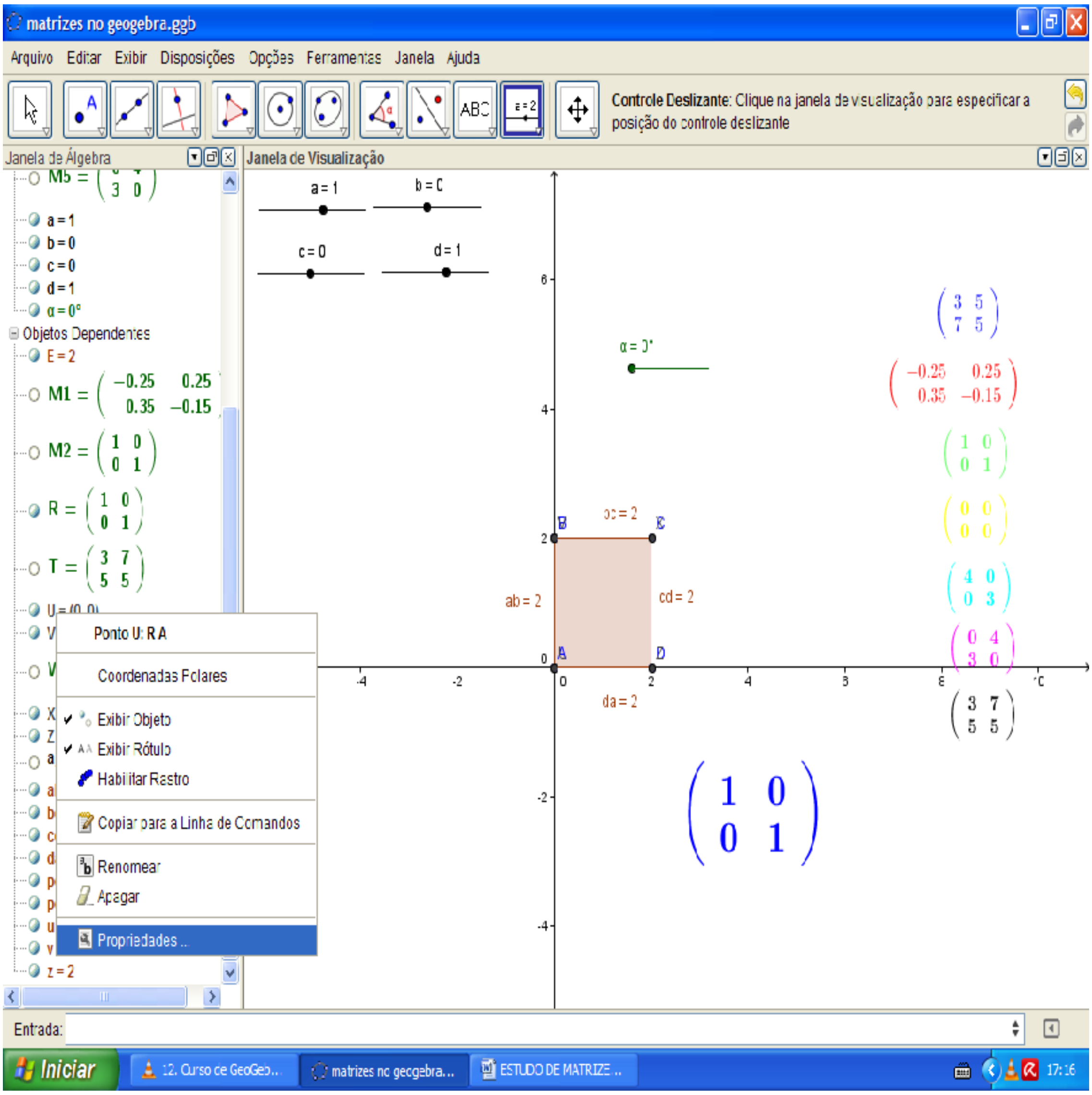
Clicando na janela de álgebra com o botão esquerdo do mouse em cada um destes vetores e alterando:

U= R*A V= R*B X= R*C e Z= R*D
Por
U= W*A V= W*B X= W*C e Z= W*D

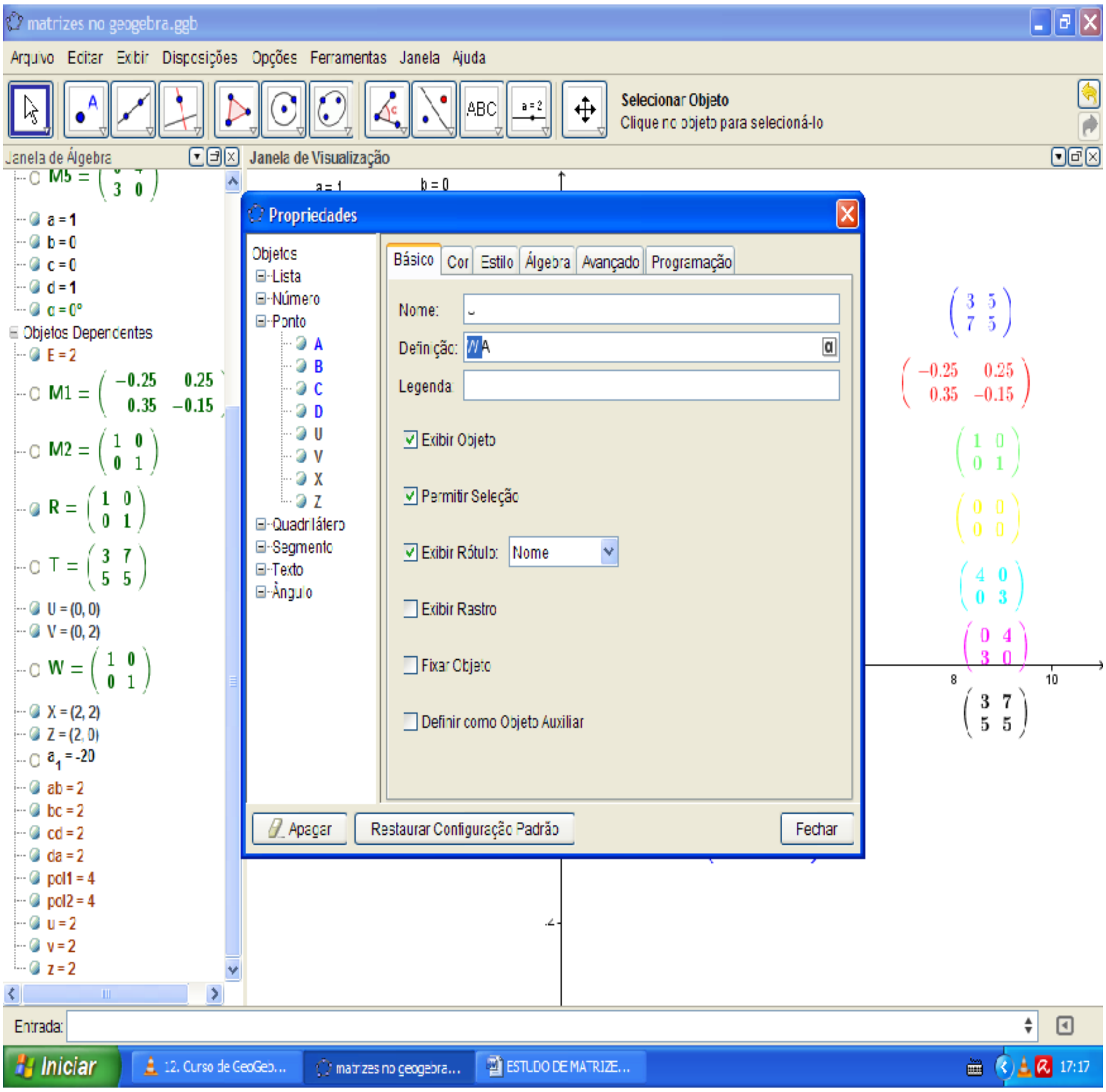
Caso queira que a matriz sofra transformações de rotação e linear ao mesmo tempo, basta que a alteração seja a seguinte:
U= W*R*A V= W*R*B X= W*R*C e Z= W*R*D

Ou seja, o produto entre os dados das matrizes e dos vetores.

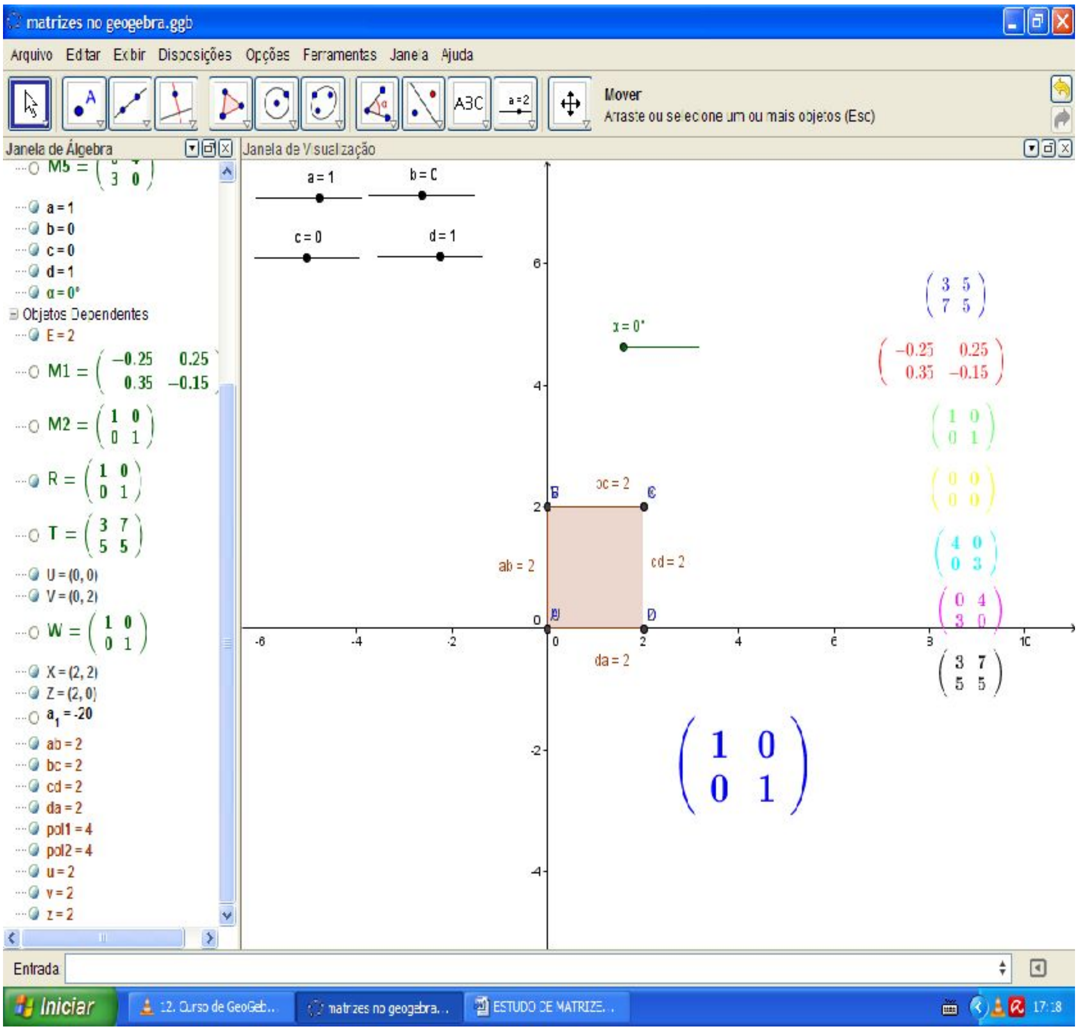
ISBN N° 978-85-8196-091-3



ISBN N° 978-85-8196-091-3

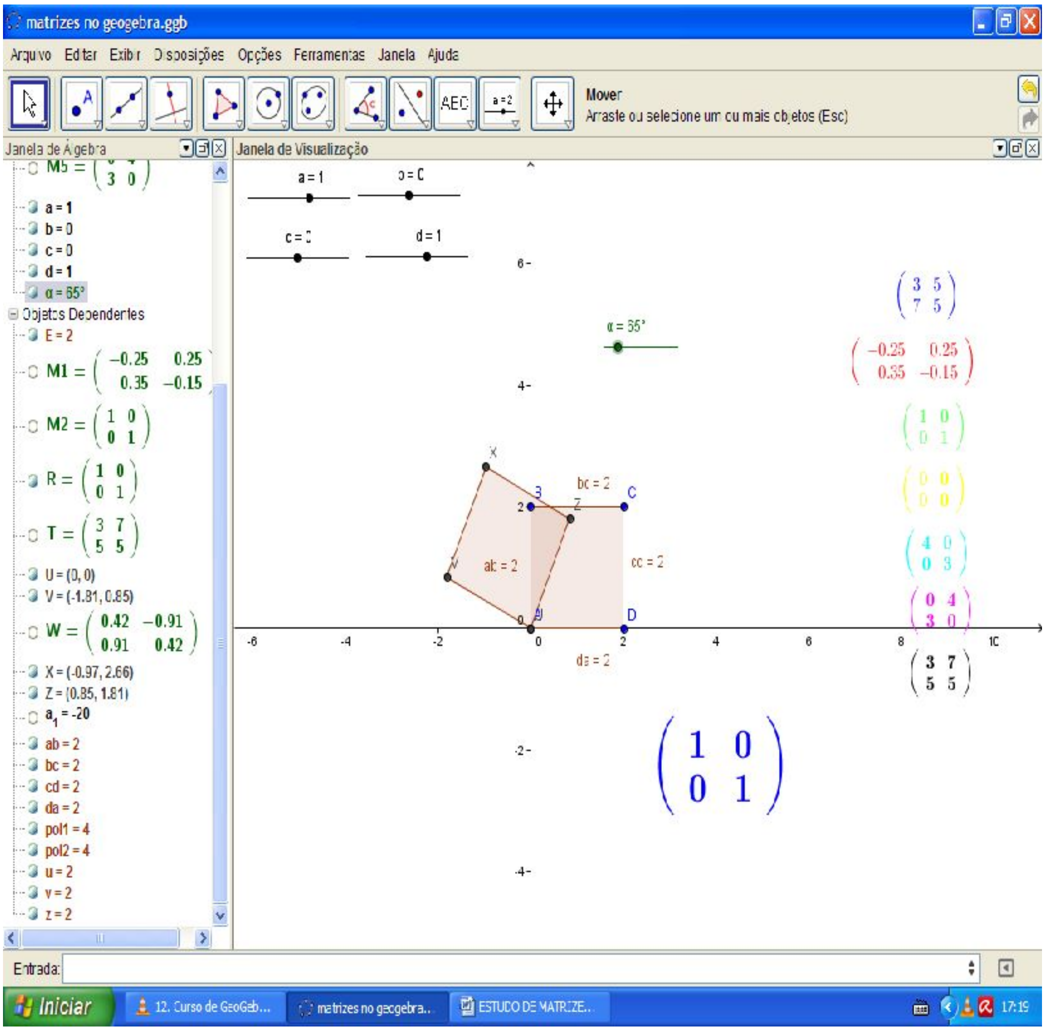


ISBN N° 978-85-8196-091-3



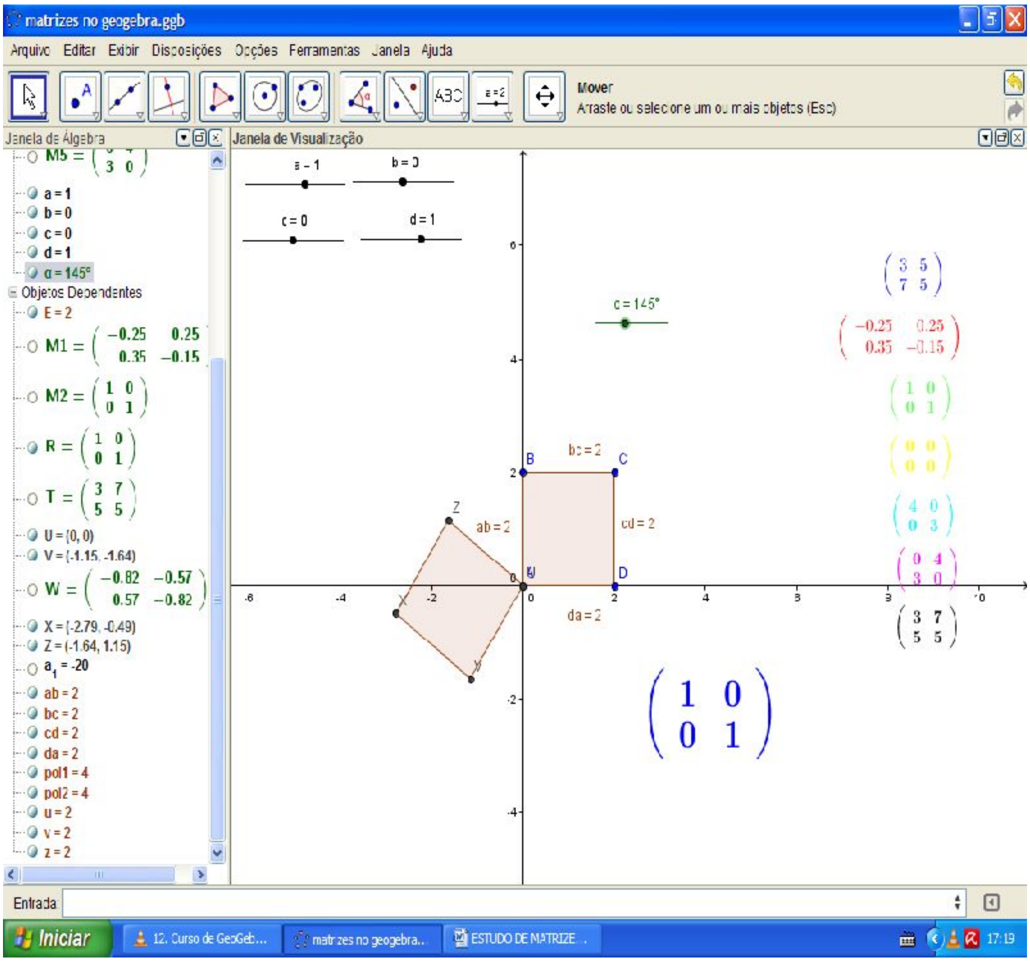
Pronto, basta agora mover o seletor α à vontade.

ISBN N° 978-85-8196-091-3



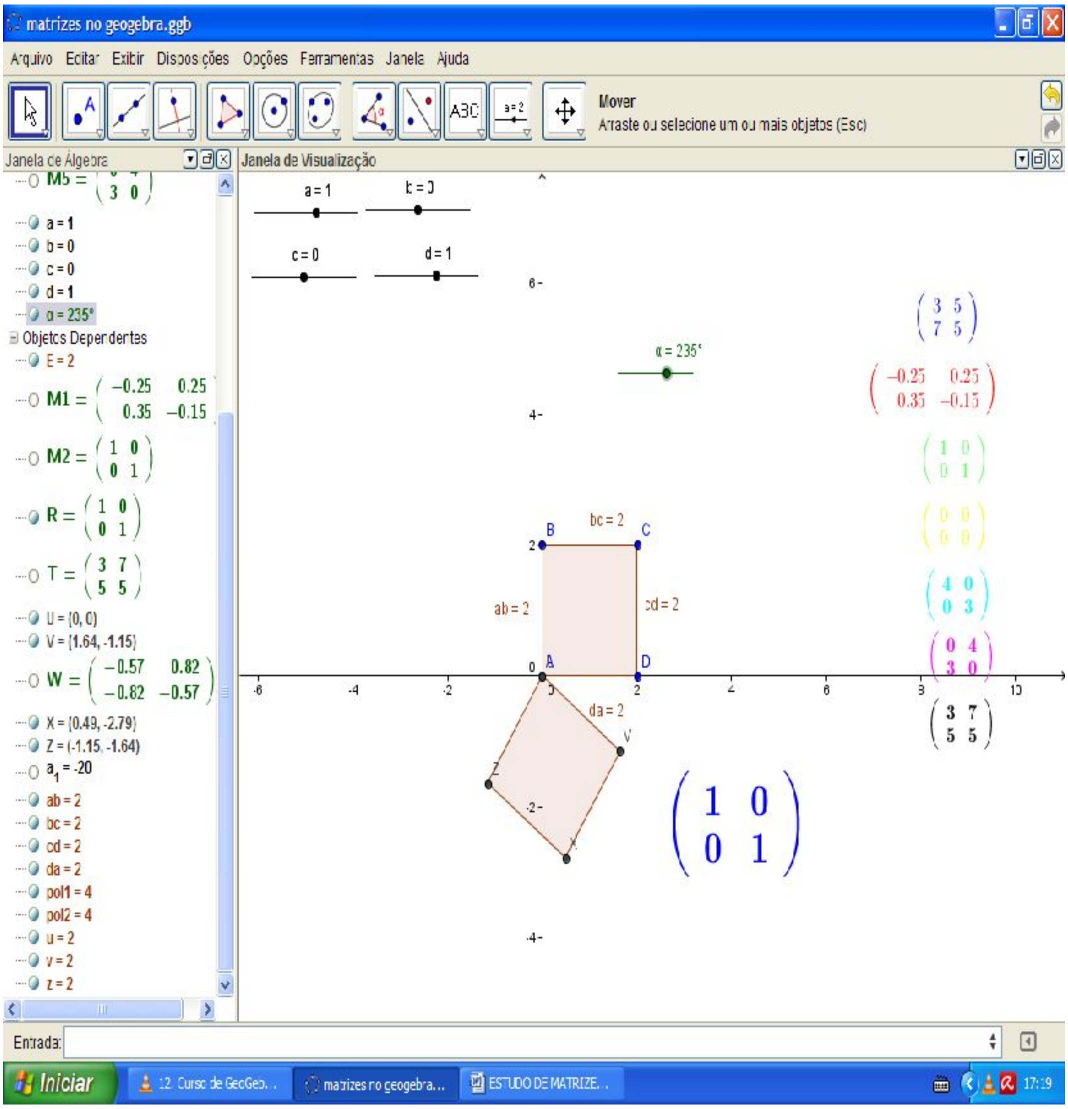
Rotacionando 65°.

ISBN N° 978-85-8196-091-3



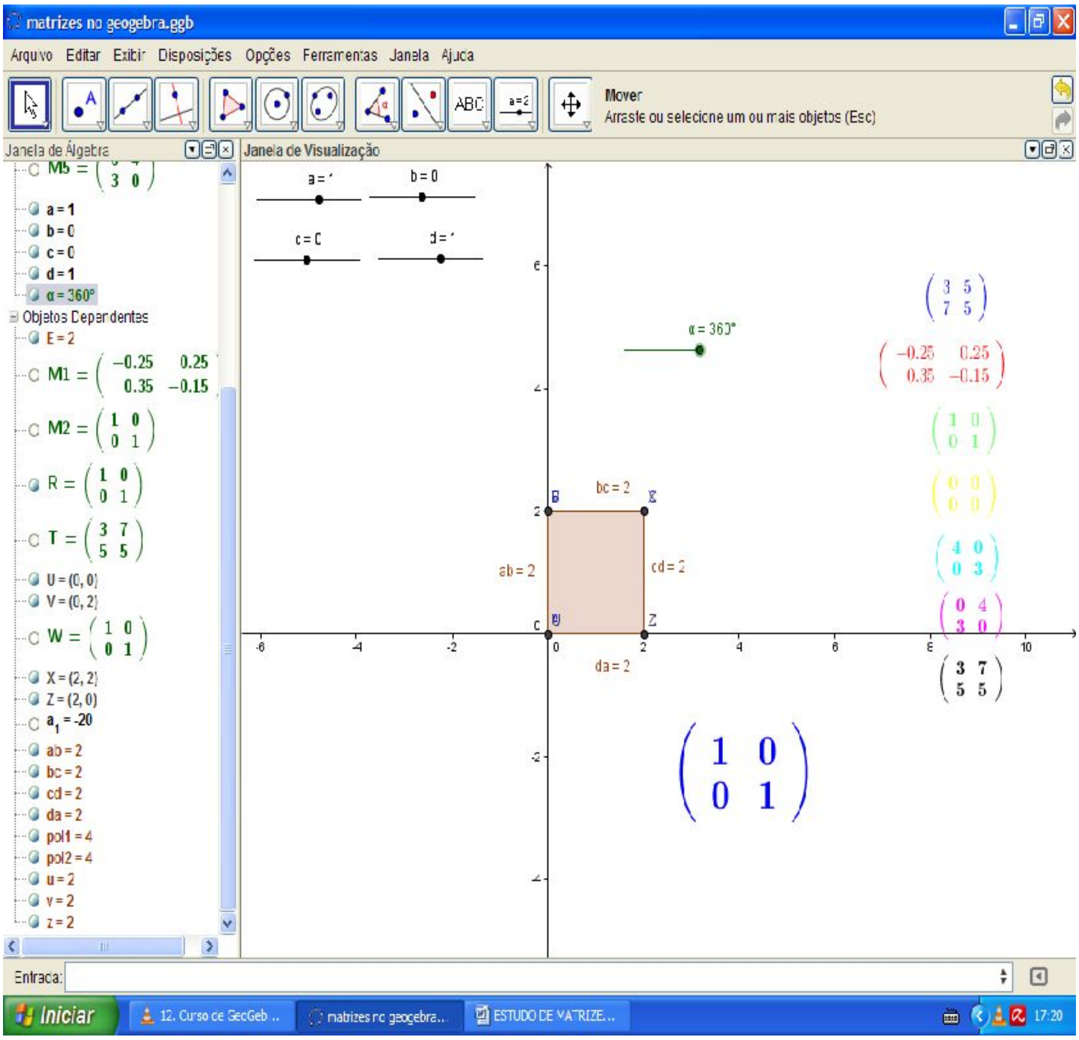
Rotacionando 145°.

ISBN N° 978-85-8196-091-3



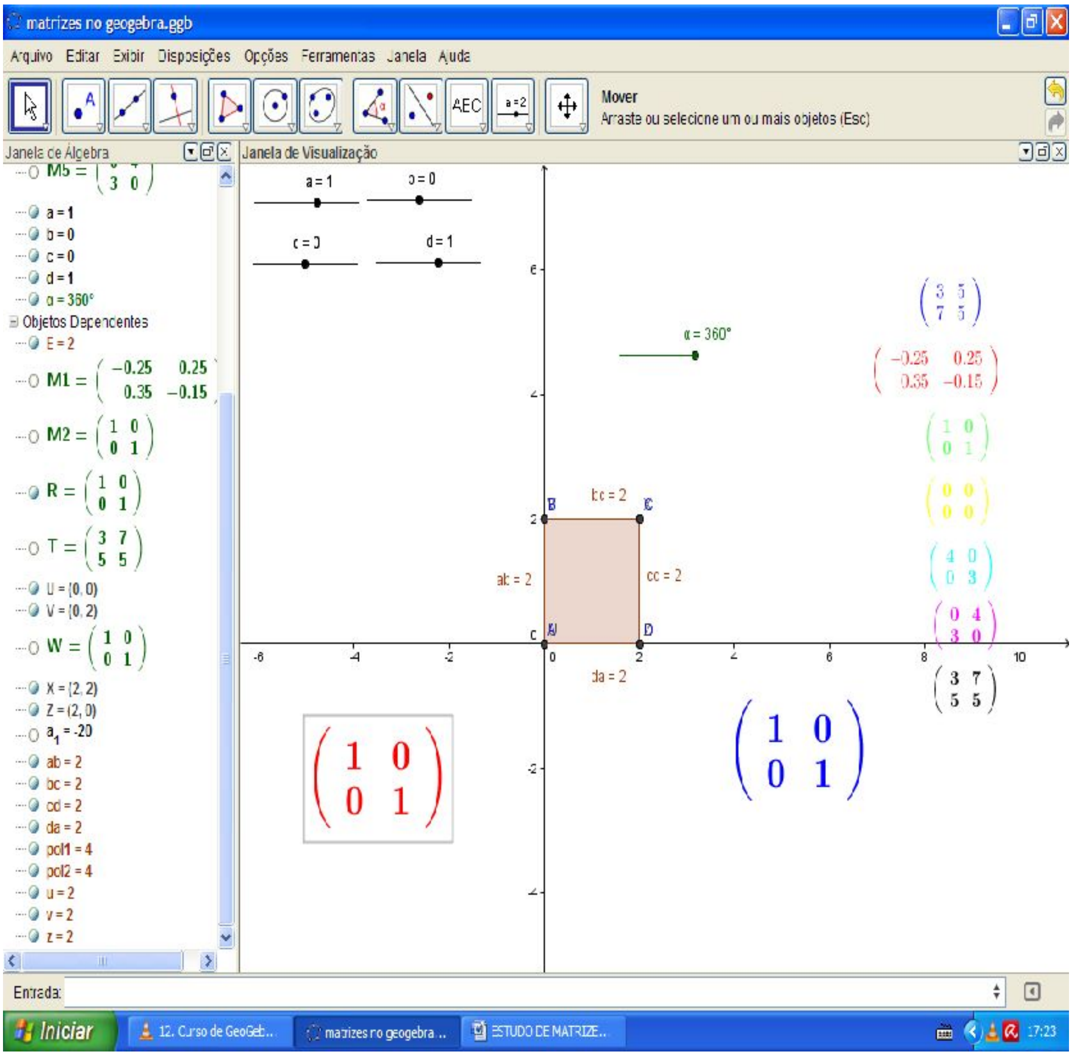
Rotacionando 235°.

ISBN N° 978-85-8196-091-3

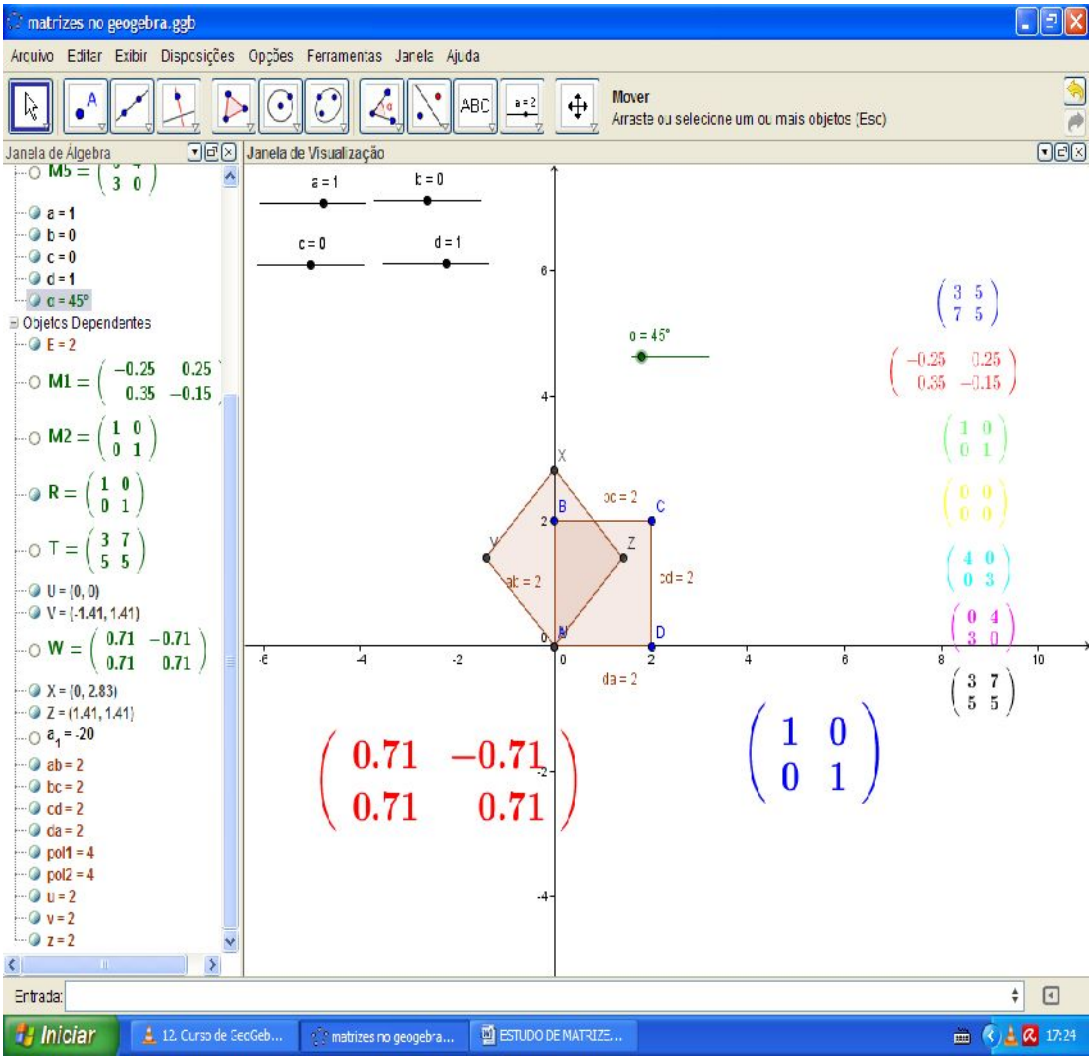


Rotacionando 360°.
Insira ainda a representação matricial da matriz em forma de texto e perceba sua variação.

ISBN N° 978-85-8196-091-3



ISBN N° 978-85-8196-091-3



ISBN N° 978-85-8196-091-3

Exercícios

Faça a mesma transformação linear com as seguintes matrizes:

a) M
b) M1
c) M2
d) M3
e) M4
f) M5
g) T

2. Rotacionar as matrizes abaixo em incremento de 15° e 25°.
a) M
b) M2
c) M5
d) T

ISBN N° 978-85-8196-091-3