*Probeklausur zur Vorbereitung auf das Zentralabitur in Niedersachsen im Fach Mathematik auf erhöhtem Anforderungsniveau **(Analysis)***

Aufgabe 1A

Gegeben ist die Kurvenschar f_k mit $f_k(x) = k\left(x^2 - 3x + 2\right)e^{kx-k}$; $k \in IR$, $k \neq 0$, $x \in IR$.

Die Ableitungen lauten: $f_k'(x) = k\left(kx^2 - 3kx + 2x + 2k - 3\right)e^{kx-k}$ und

$f_k''(x) = k(k^2x^2 - 3k^2x + 4kx + 2k^2 - 6k + 2)e^{kx-k}$.

a) Weisen Sie die Richtigkeit der Ableitungen nach und untersuchen Sie die Schar in Abhängigkeit von k auf Symmetrie, Null-, Extrem- und Wendestellen.
Sollten Sie zu keinem Ergebnis kommen, so können Sie für die Extrem- und Wendestellen Folgendes annehmen:

$$x_{E1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k} + \frac{\sqrt{4+k^2}}{2k},\ x_{E2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k} - \frac{\sqrt{4+k^2}}{2k},\ x_{W1} = \frac{3}{2} - \frac{2}{k} + \frac{\sqrt{8+k^2}}{2k},\ x_{W2} = \frac{3}{2} - \frac{2}{k} - \frac{\sqrt{8+k^2}}{2k}.$$

Zeigen Sie, dass die Abstände $|x_{E1} - x_{E2}|$ und $|x_{W1} - x_{W2}|$ nie kleiner 1 werden.
Begründen Sie, dass f_k nie eine doppelte Nullstelle aufweist.
Skizzieren Sie den Graphen von f_1 in das Koordinatensystem der Anlage 1. (12 BE)

b) Für $k > 0$ schließt der Graph von f_k eine Fläche mit der x- und y-Achse ein.
Zeigen Sie, dass die Funktion F_k mit $F_k(x) = \frac{1}{k^2}\left(k^2x^2 - 3k^2x - 2kx + 2k^2 + 3k + 2\right)e^{kx-k}$ eine Stammfunktion von f_k ist.
Berechnen Sie einen allgemeinen Ausdruck für den Flächeninhalt der beschriebenen Fläche und geben Sie den Wert von k an, für den der Flächeninhalt maximal wird.
Dokumentieren Sie hierzu Ihren Lösungsweg nachvollziehbar.

Zur Kontrolle: $A(k) = \frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} - \frac{1}{e^k}\left(2 + \frac{3}{k} + \frac{2}{k^2}\right)$.

Für kleine Werte von k wird der Flächeninhalt durch eine Polynomfunktion p mit
$p(k) = \frac{3}{50}k^3 - \frac{2}{5}k^2 + \frac{4}{5}k$ beschrieben.
Begründen Sie, bis zu welchem Wert von k diese Näherung in etwa sinnvoll ist.
Belegen Sie Ihre Argumentation durch mathematische Berechnungen. (13 BE)

c) Die Funktionenschar g_k mit $g_k(x) = \left(x^2 - 1\right)e^{-kx^2}$ beschreibt im Bereich $-1 \le x \le 1$ für $k \ge -1$ unterschiedliche Querschnitte von Wasserbecken.
Zeigen Sie algebraisch, dass das Verhältnis von Beckenbreite zu Beckentiefe unabhängig von k ist.
Ein Unternehmen, welches Wasserbecken für Kühlprozesse benötigt, fordert, dass sich die Punkte mit größtmöglicher Steigung betraglich in ihrer x- und y-Koordinate nicht unterscheiden.
Prüfen Sie, ob diese Forderung für einen Wert von k realisiert werden kann.
Als Flachpunkte werden Punkte bezeichnet, bei denen die Krümmung gleich Null ist und kein Krümmungswechsel auftritt.
Skizzieren Sie einen Ausschnitt eines beliebigen Funktionsgraphen, der einen Flachpunkt zeigt.
Untersuchen Sie, ob es Werte von k gibt, für die g_k Flachpunkte besitzt. (12 BE)

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang ist die Funktionenschar f_k mit

$f_k(x) = \frac{1}{k} + kx - e^{kx} + x$; $k \in IR$, $k \neq 0$, $x \in IR$ gegeben.

Die Tangente im Punkt $P_a(a|f_k(a))$ wird mit t_a bezeichnet.
Berechnen Sie die Gleichung der Tangente t_a. Begründen Sie, dass die Tangente t_0 für alle k ausschließlich im zweiten und vierten Quadranten immer gleischenklige Dreiecke mit der x- und y-Achse einschließt. (9 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1A

Material

Anlage 1: Koordinatensystem zur Teilaufgabe a)