Ejercicios tipo Selectividad sobre probabilidad condicionada

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
2ºBach	PROBABILIDAD 13	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Ejercicios de Selectividad sobre probabilidad condicionada.

Vídeo asociado:

https://youtu.be/lewfP2LSOrw

EJERCICIO 1

En población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es 1/12. Mientras que la probabilidad de ser mujer y daltónico es 1/25.

La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige al azar una persona.

a) Si la persona elegida es un hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

b) Si la persona elegida es una mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida al azar sea daltónica?

a) Suceso A: ser hombre. Suceso $\bar{A}$: ser mujer.

Suceso B: ser daltónico. Suceso $\bar{B}$: no ser daltónico.

Probabilidad de ser hombre: $P(A) = 1/2$.

Probabilidad de ser mujer: $P(\bar{A}) = 1/2$.

Ser hombre y daltónico: $P(A \cap B) = 1/12$.

Ser mujer y daltónico: $P(\bar{A} \cap B) = 1/25$.

Buscamos la probabilidad de que una persona sea daltónica (B), sabiendo seguro que es un hombre (A): $P(B/A)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/12}{1/2} = 1/6$$

b) Ahora buscamos la probabilidad de que una persona sea daltónica (B), sabiendo seguro que es una mujer ($\bar{A}$): $P(B/\bar{A})$.

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{1/25}{1/2} = 2/25$$

c) La probabilidad de ser daltónico P(B) es la probabilidad de ser hombre y daltónico más la probabilidad de ser mujer y daltónico. Es decir:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 1/12 + 1/25 = 37/300$$

Más adelante, cuando hablemos del teorema de probabilidad total, podremos resolver este apartado con ayuda de ese teorema. Pero fíjate que ya sabemos resolverlo simplemente con los conceptos de probabilidad condicionada y probabilidad de la intersección.

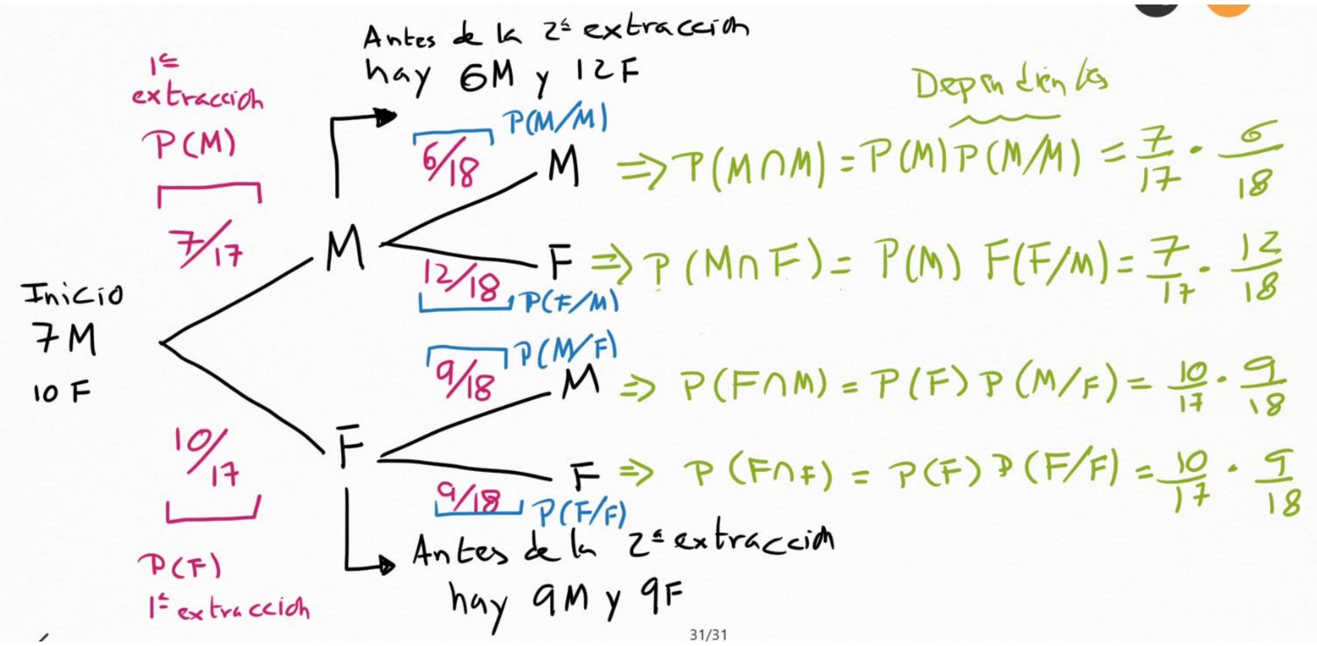
EJERCICIO 2

Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación, se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo extraído sea de fresa.

b) El segundo caramelo extraído sea del mismo sabor que el primero.

a) Para comprender mejor la extracción de los caramelos, vamos a realizar su diagrama de árbol asociado. Suceso sacar menta: M. Suceso sacar fresa: F.



La probabilidad de que la segunda extracción sea un caramelo de fresa P(F) será igual a la suma de las probabilidades de las dos ramas finales donde se termina extrayendo un caramelo de fresa (F). Es decir:

$$P(F) = P(M \cap F) + P(\mathrm{F} \cap F) = 7/17 \cdot 12/18 + 10/17 \cdot 9/18 = 29/51$$

b) La probabilidad de que el segundo caramelo extraído sea del mismo sabor que del primero, tenemos que sumar las probabilidades de las ramas donde coinciden los sabores de inicio y final. Es decir:

$$P(M \cap M) + P(\mathrm{F} \cap F) = 7/17 \cdot 6/18 + 10/17 \cdot 9/18 = 22/51$$

Como ves, haciendo el diagrama de árbol todo se simplifica mucho.

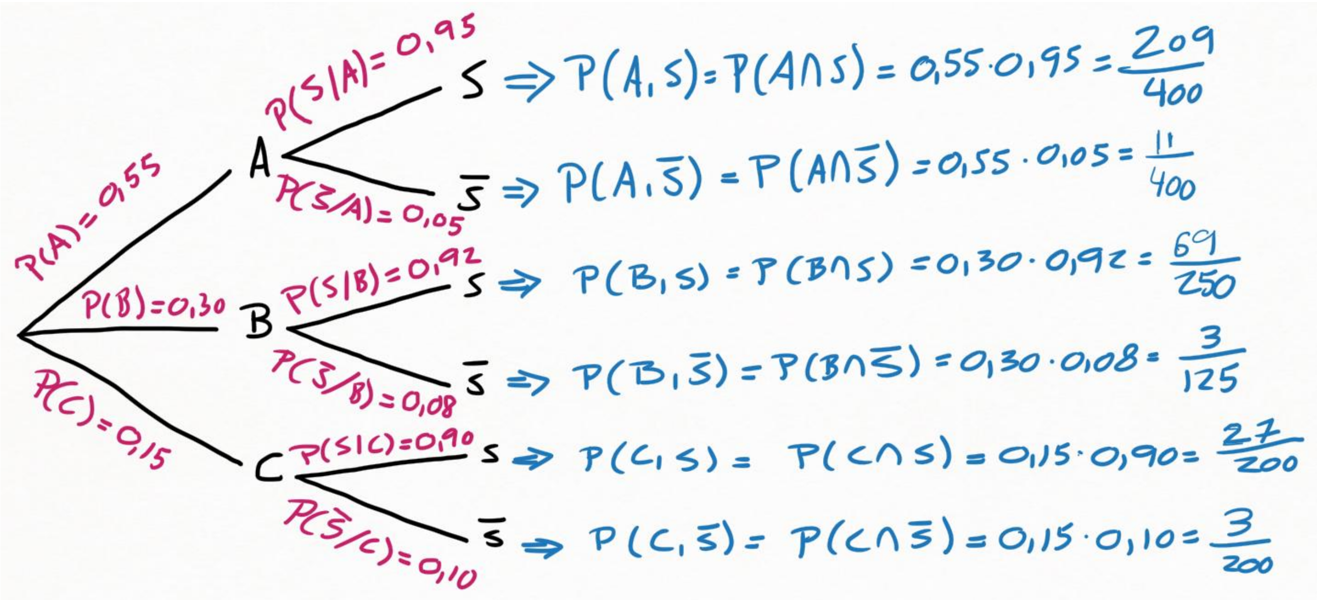
EJERCICIO 3

Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5% de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8% de los atendidos por el sastre B, ni el 10% de los atendidos por el sastre C. El 55% de los arreglos se encargan al sastre A, el 30% al B y el 15% restante al C. Calcular la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no queda satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

a) Nuevamente, el diagrama de árbol nos facilita mucho la vida. Tenemos tres sastres (A, B, C) y clientes satisfechos (S) o no satisfechos ($\bar{S}$).



No quedar satisfecho es la suma de las probabilidades de las tres ramas que terminan con el suceso $\bar{S}$.

$$P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(\mathrm{B} \cap \bar{S}) + P(C \cap \bar{S}) = 11/400 + 3/125 + 3/200 = 133/2000$$

b) Buscamos cliente atendido por el sastre (A), sabiendo seguro que no ha quedado satisfecho ($\bar{S}$). Es decir, buscamos la probabilidad condicionada $P(A/\bar{S})$. Y utilizaremos el dato calculado en el apartado a) sobre la probabilidad total de no quedar satisfecho ($P(\bar{S})$).

$$P(A/\bar{S}) = \frac{P(\bar{S} \cap A)}{P(\bar{S})} = \frac{11/400}{133/2000} = 55/133$$

EJERCICIO 4

El 69% de los habitantes de una ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) Calcula la probabilidad de que vea series o películas.

b) Sabiendo que ve series, calcula la probabilidad de que vea películas.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

a) Creamos la tabla de contingencia. Suceso ver serie: S. Suceso ver película: P. Suponemos los porcentajes como probabilidades, por la ley de los grandes números. **En negrita resalto los datos que directamente se obtienen de la lectura del enunciado**. El resto de las celdas se razonan a partir de los datos iniciales.

	S	$\bar{S}$	Totales
P	0,69 – 0,47 = 0,22	0,35 – 0,22 = 0,13	**0,35**
$\bar{P}$	0,65 – 0,18 = 0,47	**0,18**	1-0,35 = 0,65
Totales	**0,69**	1-0,69 = 0,31	**1**

Ver series o películas implica aplicar la unión de los dos sucesos:

$$P(S \cup P) = P(S) + P(P) - P(S \cap P)$$

Si recuerdas, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades de cada suceso menos la probabilidad de la intersección. Mirando la tabla de contingencia:

$$P(S) = 0{,}69$$
$$P(P) = 0{,}35$$
$$P(S \cap P) = 0{,}22$$
$$P(S \cup P) = 0{,}69 + 0{,}35 - 0{,}22 = 0{,}82$$

b) Buscamos la probabilidad de encontrar una persona que de vea películas, sabiendo seguro que cumple que ve series. Buscamos la probabilidad condicionada $P(P/S)$.

$$P(P/S) = \frac{P(S \cap P)}{P(S)} = \frac{0{,}22}{0{,}69} = 0{,}32$$ (redondeando el segundo decimal)

c) Probabilidad de ver series y no ver películas conlleva utilizar la intersección. Y las celdas de la tabla de contingencia nos da directamente las probabilidades de todas las intersecciones.

$$P(S \cap \bar{P}) = 0{,}47$$

En resumen. **Practica mucho cómo dibujar diagramas de árbol, cómo hacer tablas de contingencia y como pasar de una representación a otra, porque ayudan a resolver los ejercicios de probabilidad condicionada de manera muy sencilla**.

EJEMPLO 5

Sean A y B dos sucesos independientes tales que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es 1/3 y la de que no ocurra ninguno de ellos es 1/6. Calcula P(A) y P(B).

Los datos del enunciado afirman los siguiente:

- Sucesos independientes (no se condicionan): $P(A) = P(A/B)$ y $P(B) = P(B/A)$
- Ocurre A y B: $P(A \cap B) = 1/3$
- No ocurre A y no ocurre B: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1/6$

En probabilidad condicionada, sabemos que:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$\frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B)$$

Igualmente:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}/\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$
$$\frac{1}{6} = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

La probabilidad de un suceso y su complementario suman 1. Es decir:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \;\rightarrow\; P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(B) + P(\bar{B}) = 1 \;\rightarrow\; P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$

Sustituimos estas dos relaciones en las primeras dos ecuaciones:

$$\frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B)$$
$$\frac{1}{6} = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))$$

En la primera ecuación podemos despejar el valor de una de las probabilidades:

$$\frac{1}{3 \cdot P(B)} = P(A)$$

Y llevamos esta relación a la segunda ecuación:

$$\frac{1}{6} = (1 - \frac{1}{3 \cdot P(B)}) \cdot (1 - P(B))$$

Llegamos a una ecuación con una sola incógnita. Operamos:

$$\frac{1}{6} = (\frac{3 \cdot P(B) - 1}{3 \cdot P(B)}) \cdot (1 - P(B))$$
$$\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot P(B) = (3 \cdot P(B) - 1) \cdot (1 - P(B))$$
$$\frac{P(B)}{2} = 3 \cdot P(B) - 3 \cdot [P(B)]^2 - 1 + P(B)$$
$$3 \cdot [P(B)]^2 - \frac{7}{2} P(B) + 1 = 0$$
$$6 \cdot [P(B)]^2 - 7P(B) + 2 = 0$$

Quedando una ecuación de segundo grado, por soluciones:

$$P(B) = 2/3$$
$$P(B) = 1/2$$

Usamos las dos soluciones para la solución del suceso A.

Si $P(B) = 2/3 \rightarrow P(A) = \frac{1}{3 \cdot P(B)} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

Si $P(B) = 1/2 \rightarrow P(A) = \frac{1}{3 \cdot P(B)} \rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$

Las soluciones son cruzadas. Es decir, si la probabilidad de un suceso vale 2/3 la del otro suceso vale 1/2. Y viceversa.

Es fácil comprobar que estas soluciones satisfacen las condiciones del enunciado.

EJEMPLO 6

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que P(A)=1/9, P(B)=1/2 y P($A \cap B$)=3/18, se pide:

a) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) Calcular $P(\bar{A}/B)$, donde $\bar{A}$ es el suceso complementario de A.

a) Si dos sucesos son independientes, se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

En cambio, si son dependientes, aparece una probabilidad condicionada. Y la ecuación anterior quedaría:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Que también se puede expresar como:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Los datos del enunciado dan la probabilidad de A, la probabilidad de B y la probabilidad de la intersección. Es directo comprobar que:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

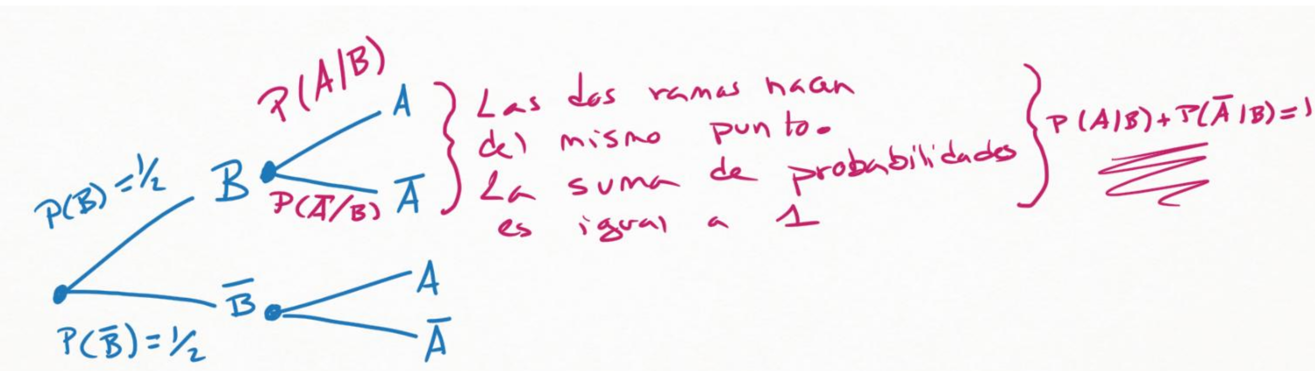
Este resultado no coincide con el valor $P(A \cap B) = \frac{3}{18}$ del enunciado. Por lo tanto, los sucesos no son independientes.

b) En probabilidad condicionada sabemos que:

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

Conocemos el valor del denominador de esta expresión: P(B)=1/2. Pero no conocemos el numerador.

¿Cómo razonar? Nuevamente, con la idea de que un suceso y su complementario deben sumar una probabilidad igual a 1. Esto se ve fácilmente con un diagrama de árbol, donde primero distinguimos entre el suceso B y su complementario.



Es decir:

$$P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$$

La primera probabilidad condicionada sí podemos calcularla con los datos del apartado anterior.

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} + P(\bar{A}/B) = 1$$

$$\frac{3/18}{1/2} + P(\bar{A}/B) = 1$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - 1/3$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{2}{3}$$

EJEMPLO 7

Se tienen dos urnas A y B con bolas de colores con la siguiente composición: la urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas; mientras que la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras.

Además, se tiene un dado con 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que ha indicado el dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea verde?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

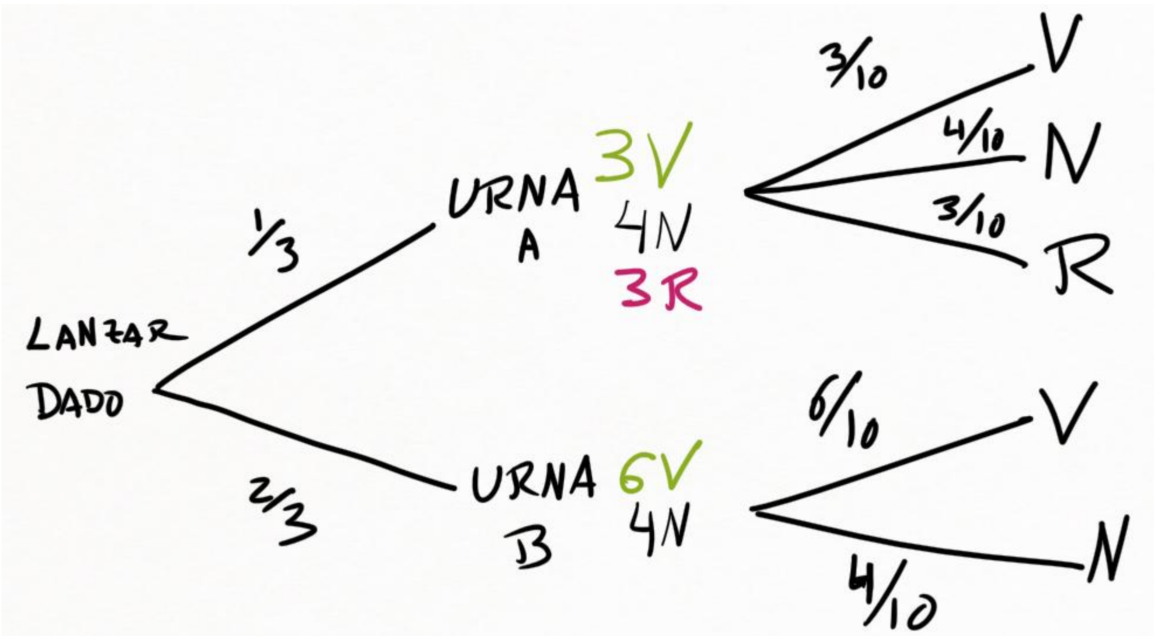
c) Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que ésta proceda de la urna B?

a) La extracción de las bolas está condicionada al resultado del dado. Por lo tanto, al aparecer claramente probabilidades condicionadas, es muy cómodo dibujar un diagrama de árbol.

El primer suceso sería lanzar el dado (para escoger urna A o urna B). Mientras que el segundo suceso sería extraer una bola, según la urna seleccionada por el dado.

El dado tiene 2 caras con la letra A. La probabilidad de elegir la urna A es 2/6, es decir, 1/3.

El dado tiene 4 caras con la letra B. La probabilidad de elegir la urna B es 4/6, es decir, 2/3.



El diagrama de árbol genera cinco caminos.

La bola extraída en verde en el camino primero y en el quinto. Por lo que sumamos la probabilidad de esos dos caminos.

$$P(A\ y\ Verde) + P(B\ y\ Verde) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} + \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

b) El único camino que lleva a extraer la bola es el tercero.

$$P(A\ y\ Rojo) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

c) De todos los caminos que llevan a la bola verde, nos quedamos solo con la que viene de la urna B. Es lo que llamaremos más adelante el Teorema de Bayes. Pero podemos razonarlo sin necesidad de apelar a este Teorema.

$$\frac{numerador}{denominador} = \frac{casos\ favorables: scar\ \ Verde\ si\ viene\ de\ la\ urna\ B}{casos\ totales: probabilidad\ total\ de\ sacar\ Verde}$$

$$P(Urna\ B/Verde) = \frac{P(B\ y\ Verde)}{P(A\ y\ Verde) + P(B\ y\ Verde)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} + \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

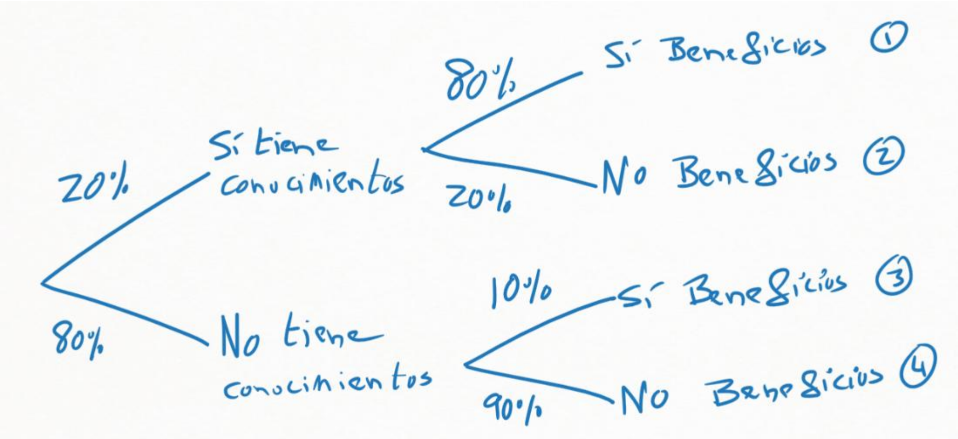
EJEMPLO 8

Se estima que solo un 20% de los que compran acciones en bolsa tienen conocimientos bursátiles. De ellos, el 80% obtiene beneficios. De los que compran acciones sin conocimientos bursátiles, solo un 10% obtiene beneficios.

a) Calcula el porcentaje de los que obtienen beneficios comprando acciones en bolsa.

b) Eligiendo una persona al azar, calcula la probabilidad de que no tenga conocimientos bursátiles y que no tenga beneficios al invertir en bolsa.

a) Obtener beneficios dependen de si el comprador tiene o no conocimientos en bolsa. Estos es una probabilidad condicionada. Optamos por dibujar un diagrama de árbol, con todas las opciones.



De los cuatro caminos del diagrama de árbol, se obtienen beneficios en el camino 1 y en el camino 3. Debemos sumar las probabilidades de cada camino. Es decir, nos preguntan por la probabilidad total de obtener beneficios.

La probabilidad de un camino se obtiene multiplicando las probabilidades de las ramas que lo forman.

$$P(Sí\ Beneficios) = P(Sí\ conocimientos\ y\ Sí\ Beneficios) + P(No\ conocimientos\ y\ Sí\ Beneficios)$$

$$P(Sí\ Beneficios) = 0{,}20 \times 0{,}80 + 0{,}80 \times 0{,}10 = 0{,}24$$

La probabilidad es del 24%.

b) Este apartado representa el camino 4 del diagrama de árbol. La persona no tiene conocimientos en bolsa y la persona no obtiene beneficios. Multiplicamos la probabilidades de cada rama.

$$P(No\ conocimientos\ y\ No\ beneficios) = 0{,}80 \times 0{,}90 = 0{,}72$$