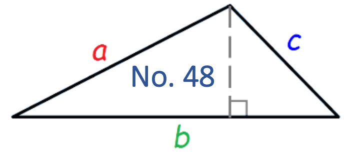
TRIÁNGULOS - ACTIVIDAD



① Fórmula de Herón

El área de un triángulo es $12\sqrt{55}$ cm² y dos de sus lados miden 13 cm y 17 cm, respectivamente. Hallar la magnitud del lado desconocido. *La solución completa de este problema consta de dos respuestas diferentes y correctas ambas.*

Sea $a = 13$ cm y $b = 17$ cm.

El perímetro del triángulo es $\quad p = a + b + c \quad\quad p = 13 + 17 + c$

Semiperímetro $\quad s = \dfrac{13 + 17 + c}{2} \quad\quad s = \dfrac{30 + c}{2} = 15 + \dfrac{c}{2}$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ ← Fórmula de Herón

$$12\sqrt{55} = \sqrt{\left(15 + \frac{c}{2}\right)\left(15 + \frac{c}{2} - 13\right)\left(15 + \frac{c}{2} - 17\right)\left(15 + \frac{c}{2} - c\right)}$$ ← Sustituyendo datos

$$144(55) = \left(15 + \frac{c}{2}\right)\left(2 + \frac{c}{2}\right)\left(-2 + \frac{c}{2}\right)\left(15 - \frac{c}{2}\right)$$ ← Elevando al cuadrado

$$144(55) = \left(15 + \frac{c}{2}\right)\left(15 - \frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2} + 2\right)\left(\frac{c}{2} - 2\right)$$ ← Acomodando factores

$$7920 = \left(225 - \frac{c^2}{4}\right)\left(\frac{c^2}{4} - 4\right)$$ ← Producto de binomios conjugados

$$7920 = \left(\frac{900 - c^2}{4}\right)\left(\frac{c^2 - 16}{4}\right)$$ ← Cantidades enteras a fraccionarias

$$7920 = \left(\frac{900c^2 - (900)(16) - c^4 - 16c^2}{16}\right)$$ ← Efectuando producto

$$(7920)16 = -c^4 + 916c^2 - 14400$$ ← Multiplicando por 16

$$126720 = -c^4 + 916c^2 - 14400$$ ← Realizando operaciones

$$0 = -c^4 + 916c^2 - 141120$$ ← Acomodando términos

Ecuación bicuadrada

$$c^4 - 916c^2 + 141120 = 0$$ ← Multiplicado por (-1)

Sea $y = c^2 \quad \rightarrow \quad y^2 - 916y + 141120 = 0$ ← Sustituyendo variable

Ecuación cuadrática

$$y = \frac{-(-916) \pm \sqrt{(-916)^2 - 4(1)(141120)}}{2(1)}$$ ← Sustituyendo coeficientes en fórmula cuadrática

$$y = \frac{916 \pm \sqrt{839056 - 564480}}{2}$$ ← Resolviendo ecuación 2° grado

$$y = \frac{916 \pm \sqrt{274576}}{2} = \frac{916 \pm 524}{2}$$ ← Realizando operaciones

$$y_1 = 720 \quad y_1 = 196$$ ← Solución ecuación cuadrática

Como $y = c^2$, entonces $c = \sqrt{y}$ ← Despejando c

$$c_1 = \sqrt{720} = \sqrt{144 \times 5} = \pm 12\sqrt{5}; \quad c_2 = \pm 14$$ ← Sustituyendo valores de y en c

La magnitud de lado desconocido es $12\sqrt{5}$ o 14. ← SOLUCIÓN

Alumn@: ____ Grado y grupo: 2º “ ” Fecha: __/__/__

Comprobación

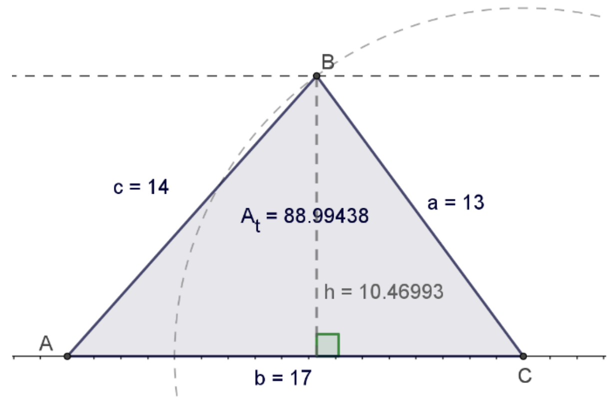
Se tiene que $a = 13$ cm y $b = 17$ cm. Se obtuvo $c = 14$ cm.

Sustituyendo datos en la fórmula de Herón

$$s = \frac{13 + 17 + 14}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

$$A = \sqrt{22(22-13)(22-17)(22-14)} = \sqrt{22(9)(5)(8)}$$

$$A = \sqrt{7920} = \sqrt{144(55)} = 12\sqrt{55} \approx 88.99438$$



También se obtuvo $c = 12\sqrt{5}$ cm.

Sustituyendo datos en la fórmula de Herón

$$s = \frac{13 + 17 + 12\sqrt{5}}{2} = \frac{30 + 12\sqrt{5}}{2} = 15 + 6\sqrt{5}$$

$$A = \sqrt{\left(15+6\sqrt{5}\right)\left(15+6\sqrt{5}-13\right)\left(15+6\sqrt{5}-17\right)\left(15+6\sqrt{5}-12\sqrt{5}\right)}$$

$$A = \sqrt{\left(15+6\sqrt{5}\right)\left(2+6\sqrt{5}\right)\left(-2+6\sqrt{5}\right)\left(15-6\sqrt{5}\right)}$$

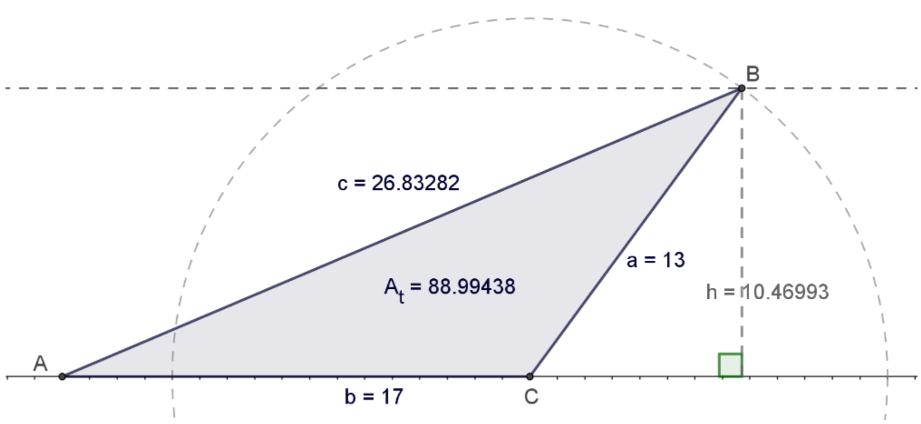
$$A = \sqrt{\left(15+6\sqrt{5}\right)\left(15-6\sqrt{5}\right)\left(6\sqrt{5}+2\right)\left(6\sqrt{5}-2\right)}$$

$$A = \sqrt{\left(225-36(5)\right)\left(36(5)-4\right)}$$

$$A = \sqrt{(225-180)(180-4)}$$

$$A = \sqrt{(45)(176)}$$

$$A = \sqrt{7920} = \sqrt{144(55)} = 12\sqrt{55} \approx 88.99438 \text{ cm}^2$$



Alumn@: ____ Grado y grupo: 2º “ ” Fecha: __ /__ /__