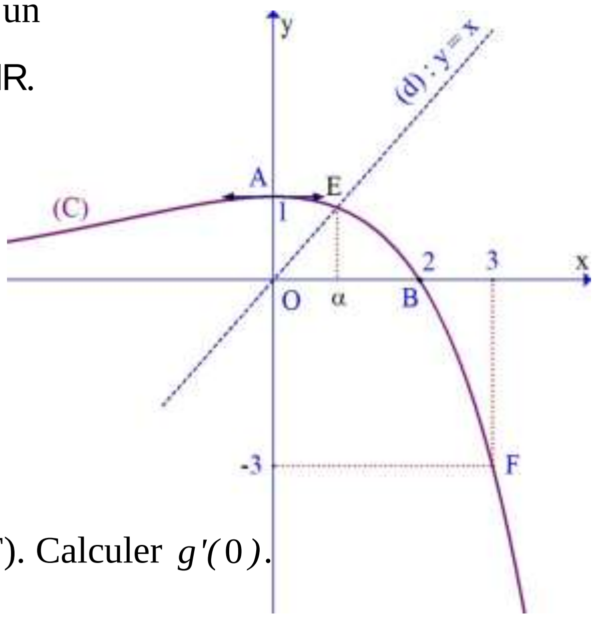
1. La courbe (C) ci-contre est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$, d'une fonction f continue sur IR.



Indications :

- La courbe (C) admet en son point A (0 ; 1) une tangente horizontale, passe par F (3 ; -3) et coupe l'axe des abscisses en B (2 ; 0).
- (C) coupe la droite d'équation $y = x$ au point E d'abscisse α.
- f(x) tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1) Reproduire la courbe (C).

2) Démontrer que f admet sur $[0;+\infty[$ une fonction réciproque g, et donner le domaine de définition de g.

3) Résoudre l'inéquation $g(x) < \alpha$.

4) Sachant que la tangente (T) à (C) en B est parallèle à (AF). Calculer $g'(0)$.

5) a- Dresser le tableau de variations de g.

b-Tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$, en justifiant la construction.

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

1) Montrer que f admet dans l'intervalle] 0 ; 1] une fonction réciproque g dont on déterminera le domaine de définition.

2) On désigne par (F) et (G) les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$, et par A le point de (G) d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.

a - Trouver l'équation de la tangente à (G) en A.

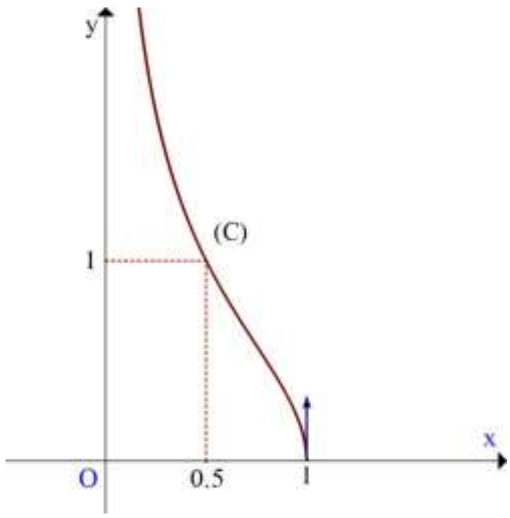
b - Montrer que $(F) \cap (G) = \varnothing$.

3. A- On considère la fonction u définie par $u(x) = x^3 + x - 1$.

1) Montrer que l'équation u(x) = 0 admet une racine unique α.

2) Vérifier que : $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

B - La courbe (C) ci-contre, est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$, de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.



1) a- Démontrer que f admet sur] 0; 1] une fonction réciproque g. Indiquer le domaine de g.

b- Résoudre l'inéquation $g(x) \geq \dfrac{1}{2}$.

c- Exprimer g(x) en fonction de x.

2) a- Tracer la courbe représentative (C ') de la fonction g, dans le repère $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$.

b- Montrer que (C) et (C ') ont un point commun d'abscisse α.

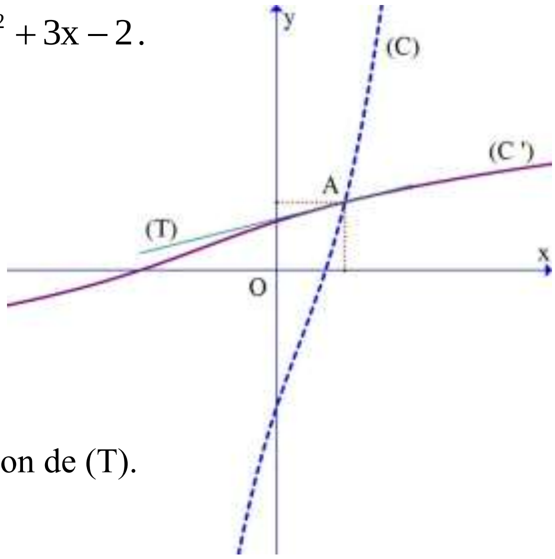
(Uniquement pour la série S.G)

1. Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, *en justifiant*, la réponse qui lui correspond.

	Questions	*Réponses* a	b	c
1	$\cos^2(\frac{1}{2}\arccos x) =$	$\frac{1+x}{2}$	$1+\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}x$
2	$\cos(2\arcsin x) =$	$1-2x$	$1-2x^2$	$2x^2-1$
3	En *radian* : $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3} =$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
4	$f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$, et $x > 0$, alors $f(x) =$	$2\arctan x$	$2\arccos x$	$2\arcsin x$
5	$\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right) =$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$
6	$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right) =$	$\frac{7\pi}{5}$	$-\frac{3\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{5}$
7	Une solution de l'équation $\cos(\arcsin\frac{1}{x}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est :	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	1	2
8	Une solution de l'équation $\arcsin 1 = \arcsin x + \arcsin\frac{3}{5}$ est :	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$
9	Une solution de l'équation $\arctan\frac{1}{2} + \arctan x = \frac{\pi}{4}$ est :	$\frac{3}{4}$	2	$\frac{1}{3}$
10	Une solution de l'équation $\arctan(2x-1) + \arctan x = \frac{3\pi}{4}$ est :	2	-1	3
11	Une solution de l'équation $\arcsin(3x-1) + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ est :	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque g.



2) Les deux courbes (C) et (C ') ci-contre sont, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, les courbes représentatives de f et g.

a- Calculer les coordonnées du point A commun à (C) et (C ').

b- (T) est la tangente à (C ') en A. Trouver l'équation de (T).

3. Simplifier les expressions suivantes :

a) cos (2arccos x). b) cos (2arctan x).

c) sin (2arccos x). d) $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$.

4. Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = (\arcsin 2x)^3$. b) $f(x) = \dfrac{1}{\arctan\sqrt{x}}$.

5. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{x}$. b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan 3x}{\arcsin x}$. c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)$.

6. Soit f la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}$.

En calculant $f'(x)$, démontrer que si $x > 0$ on a : $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

7. On considère la fonction f définie dans $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = x+1-\sqrt{2x-1}$.

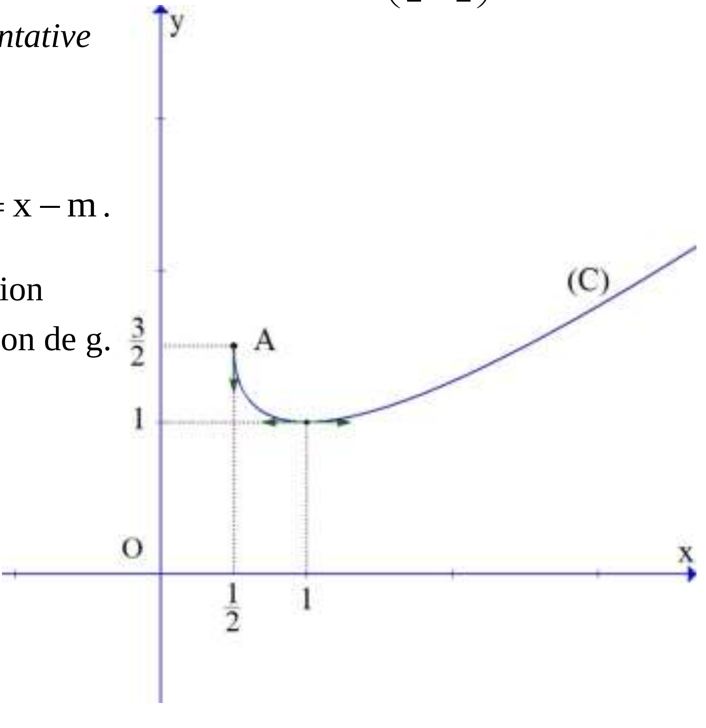
(C) est sa courbe représentative.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que (C) admet, en $+\infty$, une direction asymptotique à déterminer.

2) Dresser le tableau de variations de f.

(Etudier *la dérivée de f au point $\frac{1}{2}$ ainsi que la tangente à (C) au point* $A\left(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$).

La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f.



3) Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de racines de l'équation : $\sqrt{2x-1} = x - m$.

4) a- Montrer que f admet dans $[1;+\infty[$ une fonction réciproque g, indiquer le domaine de définition de g.

b- Calculer $f(5)$ et $g'(3)$.

c- Résoudre $g(x) < 5$.

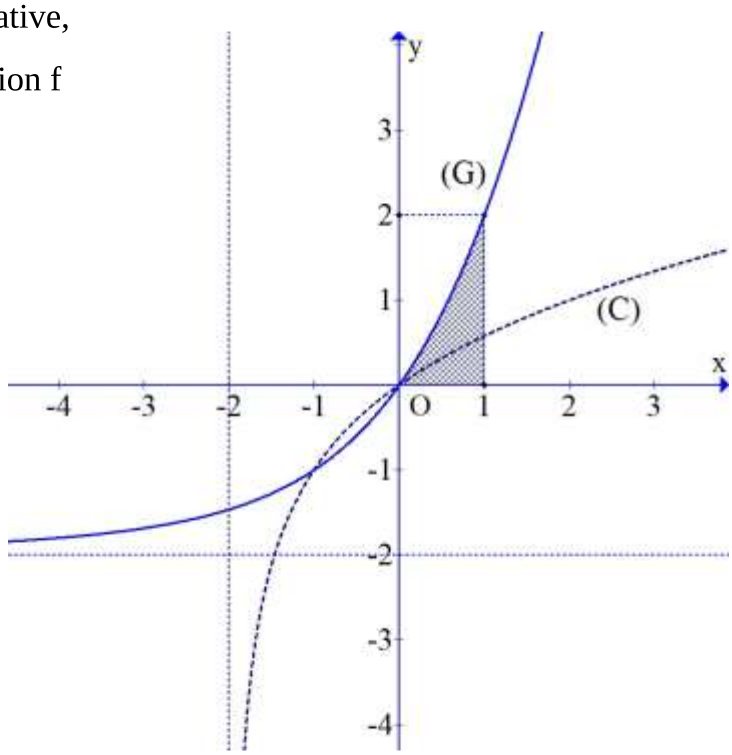
d- Calculer $g(x)$ en fonction de x.

e- Tracer (C') la courbe représentative de g.

5) Soit (d) la droite d'équation $y = -x + t$.
(où $t > 2$ *est un paramètre réel*)
La droite (d) coupe (C) en un point M et coupe (C ') en un point N.
Calculer la valeur de t pour laquelle $MN = 2\sqrt{2}$.

La courbe (C) ci-dessous, est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, de la fonction f définie dans $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$.

<u>Indication :</u>
(C) admet une asymptote d'équations $x = -2$.



1) a- Vérifier que $f'(x) = \dfrac{x+4}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$.

b- La fonction f admet une fonction réciproque g définie dans $]-\infty\,;+\infty[$.
Calculer $g'(0)$.

2) Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

Montrer que $I = \dfrac{8}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$

3) Dans la figure ci-contre (G) est la courbe représentative de la fonction g.
Les deux courbes (C) et (G') se coupent en deux points.
Calculer les coordonnées de ces points.

4) Calculer l'aire du domaine limité par (G), l'axe des abscisses, et la droite d'équation $x = 1$. (*<u>Domaine hachuré</u>*)

5) Calculer l'aire du domaine limité par (C) et (C ').

///////////////////////////

6. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \arcsin \dfrac{4x}{3+x^4}$ est définie pour tout réel x.

/////////////////////////////////// ????

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Écrire le numéro de chaque question et donner, en **justifiant**, la réponse qui lui correspond.

(***L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée***)

N°	Questions	*Réponses*		
		a	**b**	**c**
1	$\sin(2\arctan 2) =$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{4}{3}$
2	$\arctan 4 + \arctan \dfrac{5}{3} =$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{7\pi}{4}$
3	$\displaystyle\int_0^x \frac{4}{t^2+2t+2}dt =$	$4\arctan(x+1)-\pi$	$4\arctan(x+1)+\pi$	$4\arctan(x+1)-2\pi$
4	L'équation : $\arccos(3x-1)+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ est vérifiée pour $x =$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{2}{5}$
5	$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^2)}{\arcsin(2x)} =$	1	2	0

//

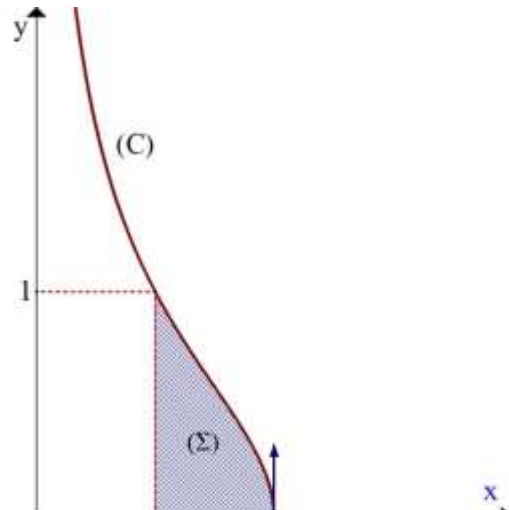
une autre version du No 3

3. A- On considère la fonction u définie par $u(x) = x^3 + x - 1$.

1) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une racine unique α.

2) Vérifier que : $0,6 < \alpha < 0,7$.

B - La courbe (C) ci-contre, est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.



1) a- Démontrer que f admet sur] 0; 1] une fonction réciproque g. Indiquer le domaine de g.

b- Calculer g(x).

2) a- Tracer la courbe représentative (C ')

de la fonction g, dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

b- Montrer que (C) et (C ') ont un point commun d'abscisse α.

3) Calculer l'aire de la surface hachurée (Σ).

N.B : Pour calculer l'aire de la surface hachurée (Σ) : $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Ou par changement de variable dans $\displaystyle\int_{0.5}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$; $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

on se ramène à $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt$ calculé par parties.

////////////////////////////////////

On considère les deux fonctions f et h définie dans IR par :

$$f(x) = \frac{x^2+12}{x^2+4} \quad \text{et} \quad h(x) = x^3 - x^2 + 4x - 12.$$

1) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une racine unique $\alpha = 2$.

2) Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

Montrer que $I = \pi + 2$.

3) a- Montrer que f admet dans l'intervalle [0 ; + ∞[une fonction réciproque g.
indiquer le domaine de définition de g.

b- Exprimer g(x) en fonction de x.

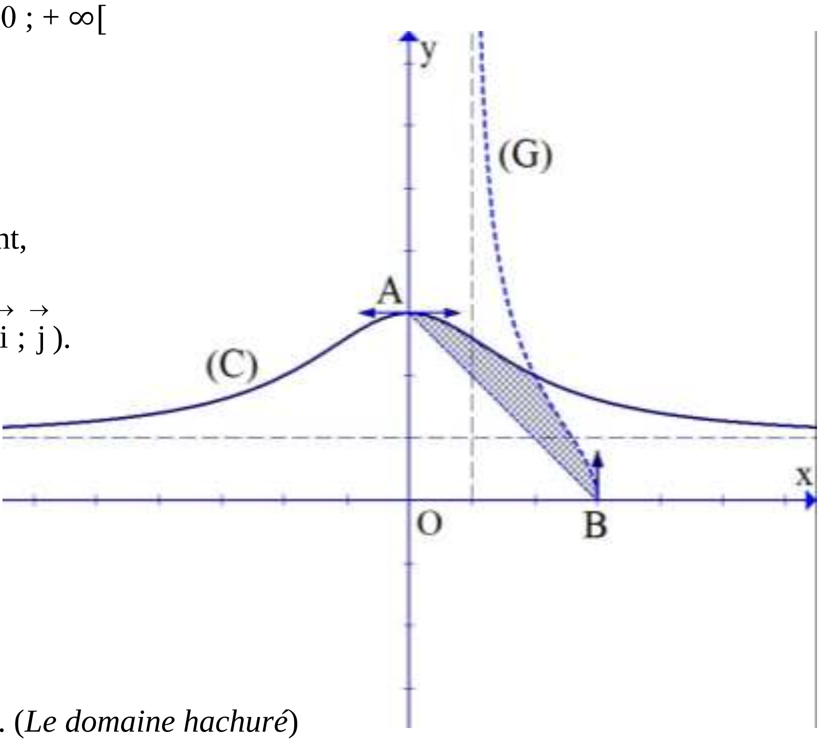
4) Les deux courbes (C) et (G) ci-contre sont, respectivement, les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

A *est le point de (C) d'abscisse 0*.

B *est le point de (G) d'abscisse 3*.

a- Les deux courbes (C) et (G) ont un point commun E.
Calculer les coordonnées de E.

b- En déduire l'intégrale $J = \displaystyle\int_2^3 g(x)dx$.



5) Calculer l'aire du domaine limité par les deux courbes (C) et (G) et le segment [AB]. (*Le domaine hachuré*)

6) Soit F la fonction définie dans IR par $F(x) = \displaystyle\int_2^{2x} f(t)dt$.

On désigne par (H) sa courbe représentative.

a-Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

(Difficile à remarquer graphiquement que $f(t) > 1$ et $\int_2^{2x} f(t)dt > \int_2^{2x} 1dt$ pour $x > 1$ et ….)

b-Trouver l'équation de la tangente à (H) au point de (H) d' abscisse 1 .
c-Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de F(x).

d- 1°) Montrer que F admet dans IR une fonction réciproque G.

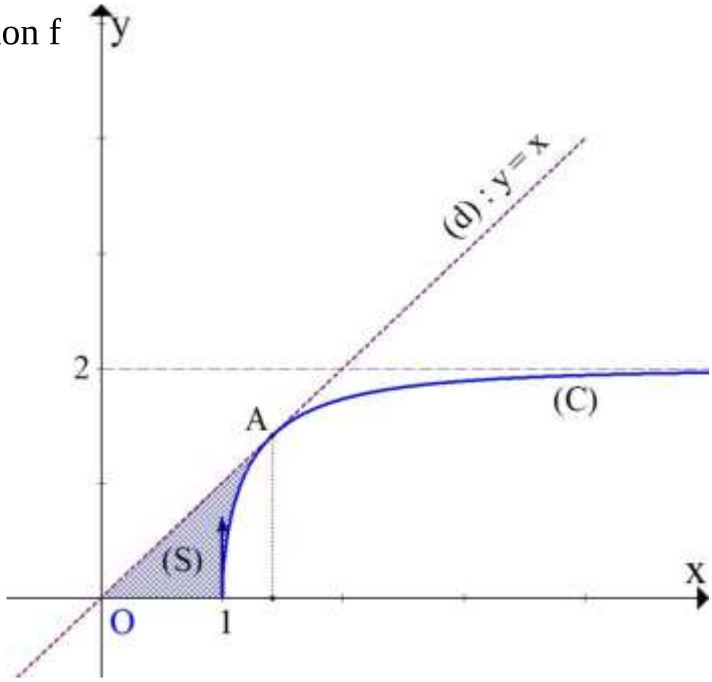
2°) Indiquer le domaine de définition de G.

3°) Calculer $G'(0)$.

4°) Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de G(x).

////////////////////////////////

La courbe (C) ci-dessous, est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, de la fonction f définie, dans [1 ; + ∞[, par $f(x) = 2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}$.



1) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est tangente à (C) en un point A que l'on déterminera.

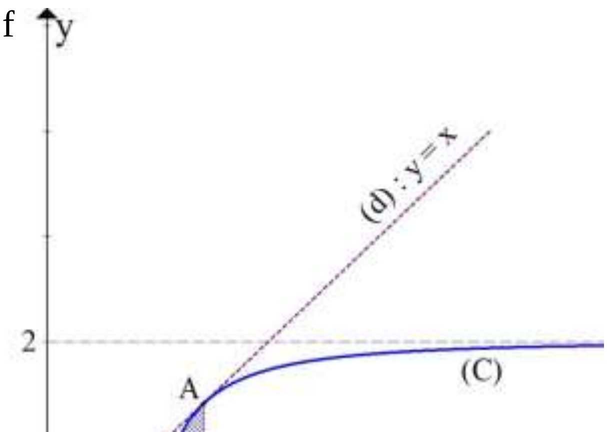
2) a- Démontrer que f admet dans [1 ; + ∞[une fonction réciproque g.
Indiquer le domaine de g.
b- Calculer g(x).
c- Tracer la courbe représentative (G) de la fonction g, dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

3) a- Calculer l'aire de la surface hachurée (S).
b- Calculer le volume de révolution engendré par la rotation de (S) autour de l'axe des abscisses.

////////////////////////////

Une autre version

La courbe (C) ci-dessous, est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, de la fonction f définie, dans [1 ; + ∞[, par $f(x) = 2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}$.



1) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est tangente à (C) en un point A que l'on déterminera.

2) a- Démontrer que f admet dans $[1 ; +\infty[$ une fonction réciproque g.
Indiquer le domaine de g.

b- Calculer g(x).

c- Tracer la courbe représentative (G) de la fonction g, dans le repère $(O; \vec{i} ; \vec{j})$.

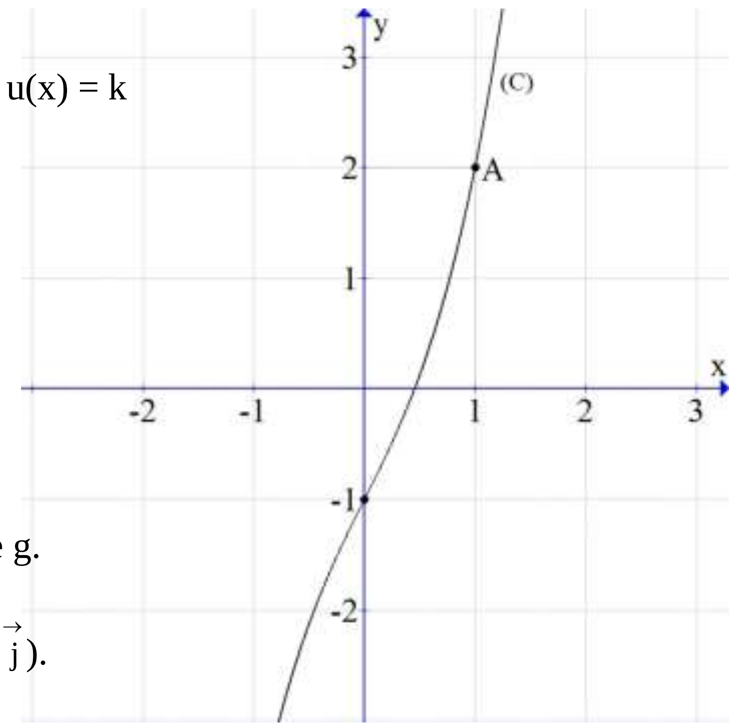
3) Calculer l'aire de la surface hachurée (S).

//////////////////////

A) On considère la fonction u définie par $u(x) = x^3 + x - 1$.

1) Montrer que, pour tout réel k, l'équation u(x) = k admet une racine unique.

2) Soit α la racine de l'équation u(x) = 0
Vérifier que : $0,68 < \alpha < 0,69$



B) La courbe (C) ci-contre, est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$, de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

1) Reproduire la courbe (C).

2) a- Démontrer que f admet une fonction réciproque g. Indiquer le domaine de g.

b- Tracer la courbe représentative (C ') de la fonction g, dans le repère $(O; \vec{i} ; \vec{j})$.

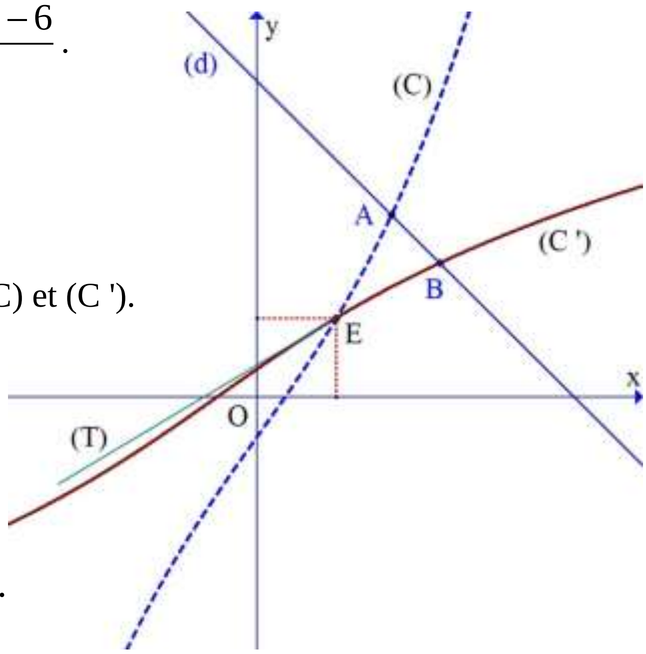
c – Calculer $g'(2)$

3) Montrer que (C) et (C ') ont un point commun d'abscisse α.

4) Soit (d) la droite d'équation y = -x + m. (m *est un paramètre réel*)
La droite (d) coupe (C) en un point A et coupe (C ') en un point B.
Calculer la valeur de m pour laquelle $AB = \sqrt{2}$.

/////////////////////

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3+17x-6}{12}$.



1) Montrer que f admet une fonction réciproque g.

2) Les deux courbes (C) et (C ') ci-contre sont, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, les courbes représentatives de f et g.

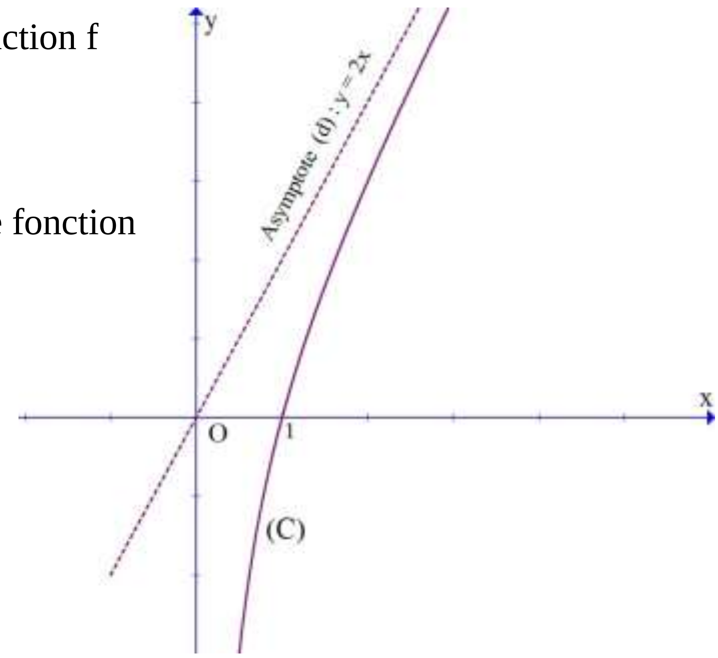
a- Calculer les coordonnées du point E commun à (C) et (C ').

b- (T) est la tangente à (C ') en E.
Trouver l'équation de (T).

3) Soit (d) la droite variable d'équation $y = -x + m$.
(m *est un paramètre réel*)
La droite (d) coupe (C) en un point A et coupe (C ') en un point B.
Calculer la valeur de m pour laquelle $AB = \sqrt{2}$.

//

La courbe (C) ci-contre, est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, de la fonction f définie dans $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-2}{x}$.



1) Reproduire la courbe (C).

2) a- Démontrer que f admet sur $]0; +\infty[$ une fonction réciproque g. Indiquer le domaine de g.

b- Calculer $g'(0)$.

c- Calculer g(x) en fonction de x.

3) a- Tracer la courbe représentative (C ') de la fonction g, dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

b- Montrer que (C) et (C ') ont un point commun dont calculera les coordonnées.

4) Soit (d) la droite d'équation $y = -x + m$.
(m *est un paramètre réel*)
La droite (d) coupe (C) en un point A et coupe (C ') en un point B.
Calculer la valeur de m pour laquelle $AB = \sqrt{2}$.

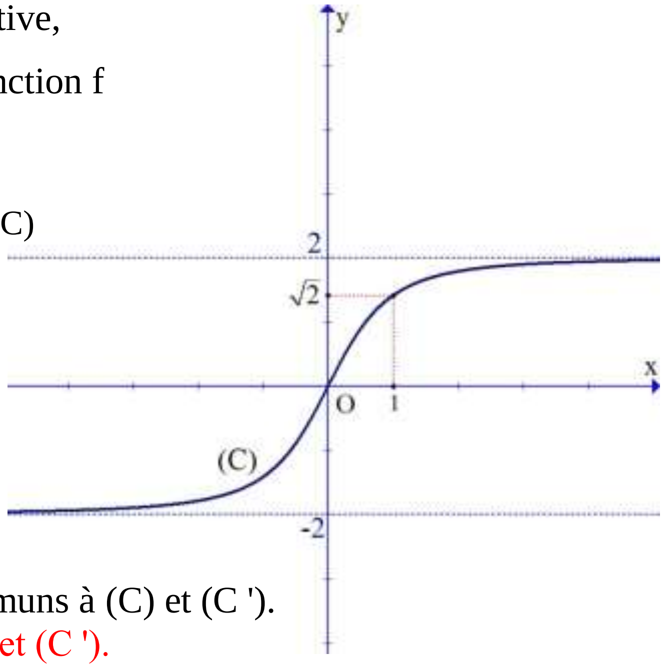
5) Soit (D) la droite d'équation $y = 4x$. Trouver le point M de (C) dont la distance à (D) est minimale.

//////////////////////////////

La courbe (C) ci-contre, est la courbe représentative,

dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, de la fonction f

définie par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.



1) a- Déterminer les équations des asymptotes de (C)

b- Reproduire la courbe (C).

2) a- Démontrer que f admet une fonction réciproque g. Indiquer le domaine de g.

b- Calculer $g'(\sqrt{2})$.

c- Calculer g(x) en fonction de x.

3) a- Tracer la courbe représentative (C ') de la fonction g, dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

b- Calculer les coordonnées des points communs à (C) et (C ').

c- Calculer l'aire du domaine limité par (C) et (C ').

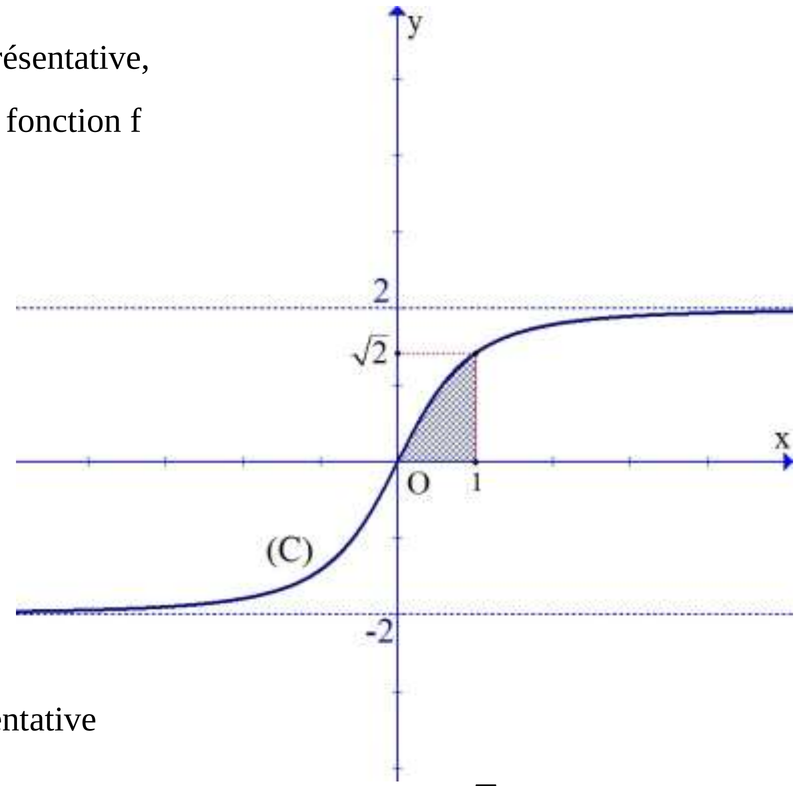
/////////////////

I– (6 points)

La courbe (C) ci-dessous, est la courbe représentative,

dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, de la fonction f

définie par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.



__Indications :__

(C) admet deux asymptotes d'équations $y = 2$ et $y = -2$.

1) a- Vérifier que $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

b- Démontrer que f admet une fonction réciproque g. Indiquer le domaine de définition de g.

c- On désigne par (C ') la courbe représentative de la fonction g.

Trouver l'équation de la tangente à (C ') au point de (C ') d'abscisse $\sqrt{2}$.

2) Exprimer g(x) en fonction de x.

3) a- Reproduire la courbe (C).

b- Tracer la courbe (C ') de la fonction g, dans le repère $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$.

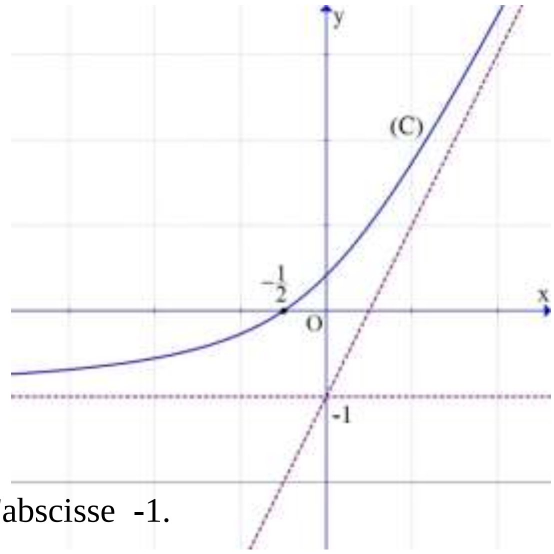
c- Les deux courbes (C) et (C ') se coupent en trois points.
Calculer les coordonnées de ces points.

4) Calculer l'aire du domaine limité
par (C), l'axe des abscisses,
et la droite d'équation $x = 1$. (*Domaine hachuré*)

5) Calculer l'aire du domaine limité par (C) et (C ').

///////////////

La courbe (C) ci-contre, est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 2}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$.



1) Montrer que (C) admet deux asymptotes d'équations $y = -1$ et $y = 2x - 1$.
2) Reproduire la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.
3) a- Montrer que f admet une fonction réciproque g et indiquer son domaine de définition.

b- Tracer dans le repère $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$ la courbe représentative (G) de g.

c- Trouver l'équation de la tangente à (G) au point de (G) d'abscisse -1.

d- Exprimer g(x) en fonction de x.

4) Soit (d) la droite d'équation $y = -x + m$. (m *est un paramètre réel*)
La droite (d) coupe (C) en un point A et coupe (C ') en un point B.

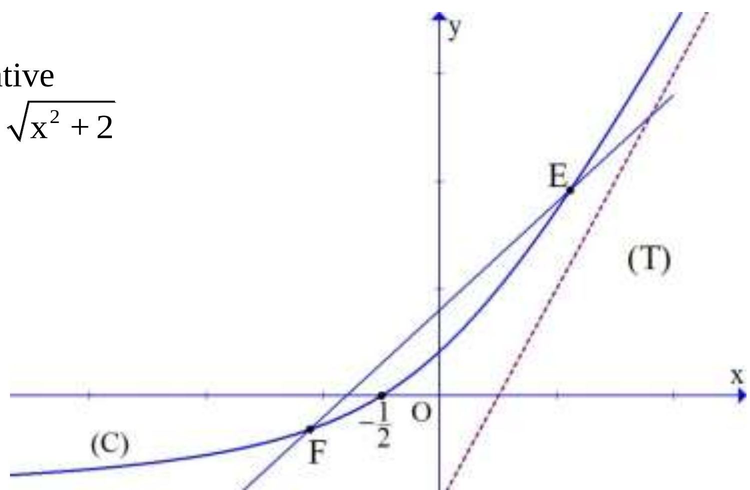
Calculer la valeur de m pour laquelle $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

///////////////////////////////

I – (6.5 pts)

La courbe (C) ci-contre, est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 2}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$.

1) Montrer que (C) admet deux asymptotes d'équations $y = -1$ et $y = 2x - 1$.



2) a) f admet une fonction réciproque g.
Trouver l'équation de la tangente à (G) au point de (G) d'abscisse 0.

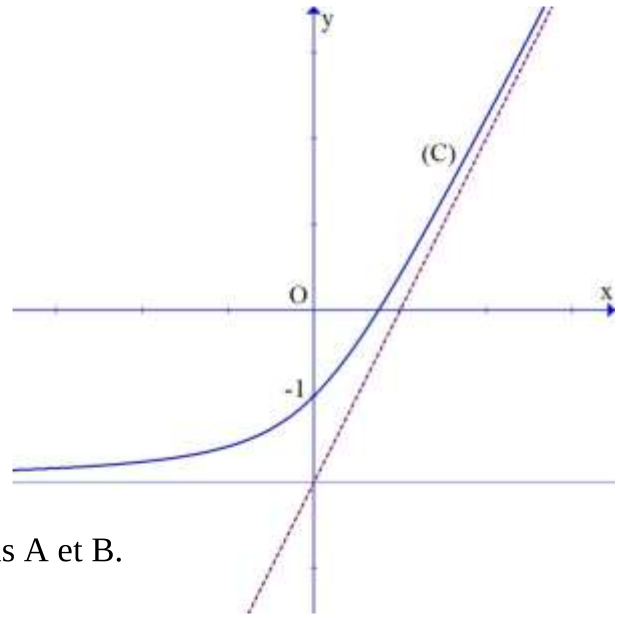
b) Tracer dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$ la courbe représentative (G) de g en respectant toutes les particularités de (G).

c) Exprimer g(x) en fonction de x.

3) Soit (Δ) une droite variable *parallèle* à la droite d'équation $y = x$.
On suppose que (Δ) coupe (C) en deux points E et F.
Montrer que, lorsque (Δ) varie, le milieu M de [EF] varie sur une droite fixe à déterminer.

////////////////////////

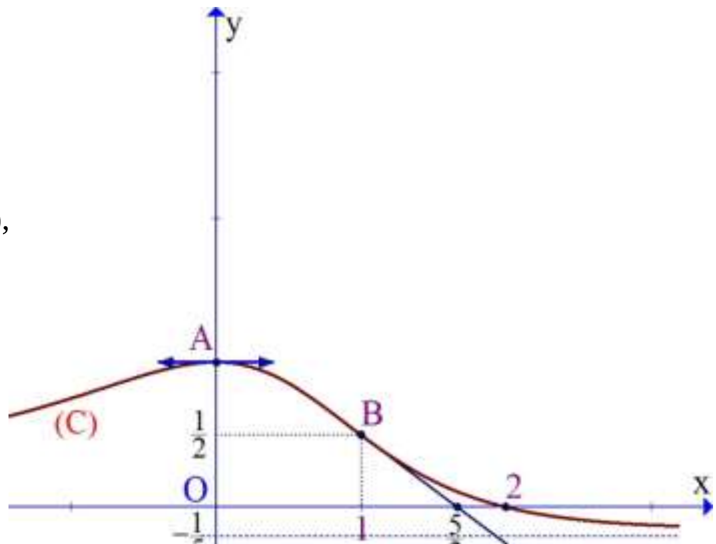
La courbe (C) ci-contre, est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - 2 + \sqrt{x^2 + 1}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.



1) Montrer que (C) admet deux asymptotes d'équations $y = -2$ et $y = 2x - 2$.
2) Reproduire la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.
a- Montrer que f admet une fonction réciproque g et indiquer son domaine de définition.
b- Tracer dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$ la courbe représentative (G) de g.
c- Trouver l'équation de la tangente à (G) au point de (G) d'abscisse -1.
d- Exprimer g(x) en fonction de x.
3) Les deux courbes (C) et (G) ont deux points communs A et B.
Calculer les abscisses de A et B.
/////////////////////////////////

La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, d'une fonction f définie et continue sur IR.

Indications :
La courbe (C) admet en son point A (0 ; 1) une tangente horizontale, coupe l'axe des abscisses en (2 ; 0), passe par $B\left(1; \frac{1}{2}\right)$ et admet la droite d'équation $y = -\frac{1}{5}$ comme asymptote.



(T) est la tangente à (C) en B.

1) Reproduire la courbe (C).

2) Démontrer que f admet sur $[0;+\infty[$ une fonction réciproque g, et donner le domaine de définition de g.

3) Calculer $g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

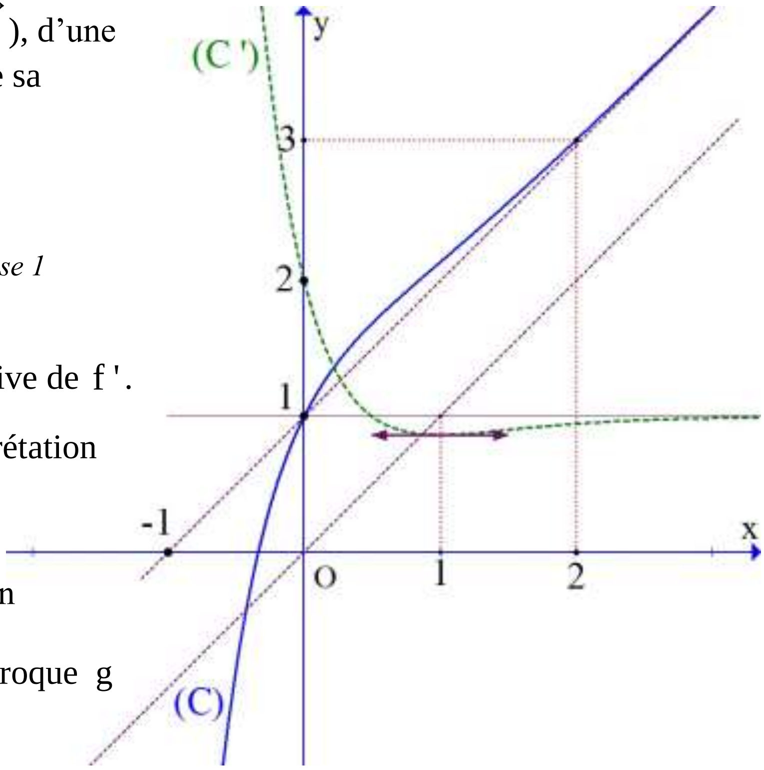
3) Résoudre l'inéquation $g(x) < 1$.

4) a- Etudier les variations de g.

b- Tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

///////////////////////////

Les deux courbes (C) et (C') ci-contre sont les courbes représentatives, en repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, d'une fonction f continue et dérivable dans $\mathbb{R}$ et de sa dérivée f' continue et dérivable dans $\mathbb{R}$.



Indications :

(C) passe par les points : (0 ;1) et (2 ;3).

(C') passe le point (0 ;2) et admet au point d'abscisse 1 une tangente horizontale.

1) Justifier que (C ') est la courbe représentative de f'.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$ et donner une interprétation graphique à la valeur ainsi trouvée.

3) Montrer que (C) admet un point d'inflexion que l'on placera sur la courbe (C).

4) a- Montrer que f admet une fonction réciproque g et indiquer son domaine de définition.

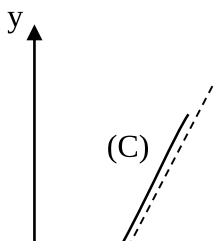
b- Calculer $g'(1)$.

c- Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative (G) de g.

5) Etudier les variations de la fonction $h = f \circ f'$

//////////////////////////

La courbe (C) ci-contre, est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + \sqrt{x^2+1}$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'axes x'Ox , y'Oy .



1) Montrer que (C) admet deux asymptotes d'équations $y = -2$ et $y = 2x - 2$.

2) Reproduire la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.

a- Montrer que f admet une fonction réciproque g et indiquer son domaine de définition.

b- Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative (G) de g.

c- Trouver l'équation de la tangente à (G) au point de (G) d'abscisse -1.

d- Exprimer g(x) en fonction de x.

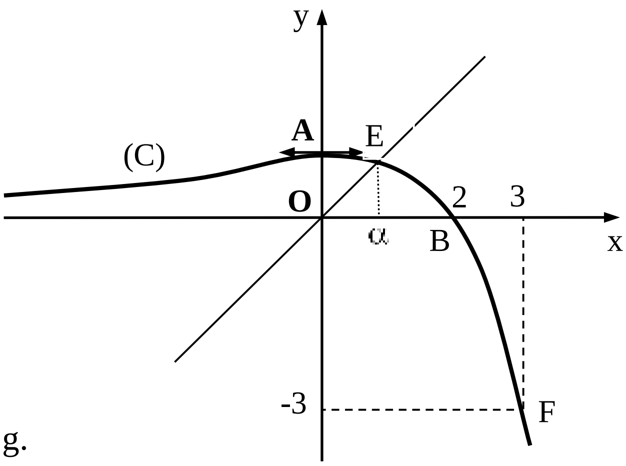
3) Les deux courbes (C) et (G) ont deux points communs A et B. Calculer les abscisses de A et B.

/////////////////////////////////

La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, d'une fonction f définie et continue sur IR.

Indications :

- L'axe des abscisses est une asymptote à (C) en $-\infty$.
- La courbe (C) admet en son point A (0 ; 1) une tangente horizontale, passe par F (3 ; 3) et coupe l'axe des abscisses en B (2 ; 0).
- (C) coupe la droite d'équation $y = x$ au point E d'abscisse α.
- f(x) tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.



1) Reproduire la courbe (C).

2) Démontrer que f admet sur $[0;+\infty[$ une fonction réciproque g, et donner le domaine de définition de g.

3) Résoudre l'inéquation $g(x) < \alpha$.

4) a- Dresser le tableau de variations de g.

b-Tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, en justifiant la construction.

////////////////////////////////////

Ex. 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ dans un intervalle J à déterminer.

2) Déduire que f admet dans $]-\infty, 0]$ une fonction réciproque f^{-1} et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

Ex. 2

On considère la fonction continue f , dont on connaît le tableau de variation ci-dessous.

x	-1		1		2
f '	||	-	-1	-	0
f	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	-1

1) Indiquer le domaine de définition I de f et montrer que f admet une fonction réciproque g .
2) Indiquer le domaine de définition J de g, et étudier ses variations.
3) Calculer g ' (3)

Ex. 5

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$, et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Montrer que f admet dans IR trois racines.
2) a - Montrer que (C) admet un point d'inflexion A et que ce point A est un centre de symétrie de (C).
   b - Pour $x \in [-1, 1]$, tracer la portion (G) de (C) correspondante , en indiquant la direction des demi-tangentes à (G) aux points d'abscisses -1 et 1.
3) a - Montrer que dans [-1, 1] la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition.
   b - Tracer la courbe (G ') représentative de f^{-1} dans le repère $(O; \vec{i} ; \vec{j})$.
   c - Montrer que (G) et (G ') ont un point commun M d'abscisse α tel que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$.
   d - Soit B le point de (G) d 'abscisse $-\frac{1}{2}$ et B' le point de (G ') d'abscisse $\frac{19}{8}$.
   Les tangentes (T) et (T ') à (G) et (G ') respectivement en B et B' se coupent en un point I .
   Calculer les coordonnées des points B, B' et I .
   e - Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

///////////////////////////////

1. Démontrer les égalités suivantes :

a) $2\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{4}{3}$. b) $2\arctan\frac{2}{3} = \arccos\frac{5}{13}$. c) $2\arctan\frac{1}{2} + \arccos\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que : $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$,

en déduire que $\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$.

Calculer :

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)$;

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\arctan\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right)$

5. Démontrer que :

a) $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$,

b) $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

2. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos(2\arccos x)$. c) $\sin(2\arccos x)$. e) $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$.

b) $\cos(2\arctan x)$. d) $\sin(2\arctan x)$. f) $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$.

Ex.12

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)}{\arcsin(3x)}$ 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x.\arctan\frac{1}{x}\right)$

5. Etudier les variations et tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$. b) $f(x) = \arcsin\frac{x}{2}$. d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi - 2\arctan\frac{1}{x}}{x}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi - 2\arctan\frac{1}{x^2}}{x^2}$.

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\frac{4x}{3+x^4}$ est définie et continue sur IR

1 - Simplifier $f(x) = \cos(2\arctan x)$.

2 - Montrer que $2\arctan\frac{1}{3} = \arccos\frac{4}{5}$

3 - Sachant que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Simplifier $\arcsin(\sin 2x)$.

<u>Exercice 1</u>

On considère la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{Arccos}\,\frac{-x+1}{x+1}$.

1) Étudier l'ensemble de définition de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

<u>*Exercice* 2</u>

1) Montrer que : $\mathrm{Arc}\sin\frac{4}{5} = 2\mathrm{Arc}\tan\frac{1}{2}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi - 2\mathrm{Arc}\cos x}{\sqrt{1+x}-1}$

3) Simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos 2(\mathrm{Arcsin}\, x)$.

b) $\sin(2\mathrm{Arctan}\, x)$.

4) On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin(2\mathrm{Arccos}\, x)$. Calculer $f\left(\frac{4}{5}\right)$.

<u>*Exercice* 3</u>

On considère la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x^2$

Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé d'axes x'Ox , y'Oy .

1) Établir la relation suivante : $2\arctan\frac{1}{2} = \arccos\frac{3}{5}$.

2) Simplifier l'expression suivante : $f(x) = \tan(\arcsin x)$.

3) Résoudre l'équation suivante : $\arcsin 1 = \arcsin x + \arcsin\frac{3}{5}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\pi + 2\arctan x)$.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{3\arccos x - \pi}{2x-1}$

/////////////////////////////////

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = \tan(\arcsin x)$.

1. Calculer $f\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
2. Étudier le domaine de définition de f .
3. Simplifier f(x) .

2) Calculer $\arccos\left(\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)$.

3) Quelle est la valeur exacte de $\arctan 2 + \arctan 3$?

N	Questions	Réponses a	b	c
2	Une solution de l'équation $\cos(\arcsin\frac{1}{x}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est :	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	1	2
3	$\cos^2(\frac{1}{2}\arccos x) =$	$\frac{1+x}{2}$	$1+\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}x$
	$\cos(2\arcsin x)=$	1-2x	$1-2x^2$	$2x^2-1$
2	Une solution de l'équation $\sin(\arctan x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est :	$\sqrt{3}$	1	$-\sqrt{3}$
	En *radian* on a: $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} =$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
	$\arctan 4 + \arctan\frac{5}{3} =$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
1	$x\in]-\infty;-1[$ $f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ alors f(x) =	$\pi + 2\arctan(x)$	$-2\arctan(x)$	$\pi - 2\arctan(x)$

	$h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $-1 < x < 1$. Une primitive H de h est définie par : H(x) =	$\arcsin(1-x)$	$\arcsin(1-x^2)$	$\arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
	$x > 0$, $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, alors f(x) =	2arctan x	2arccos x	2arcsin x
	Si $g(x) = \arcsin\left(2x^2-1\right)$, alors le domaine de définition de g est :	$\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$	$[-1 ; 1]$	$[0 ; 1]$
	Si $\alpha = \arcsin\left(\sin\dfrac{7\pi}{5}\right)$ alors α =	$\dfrac{7\pi}{5}$	$-\dfrac{3\pi}{5}$	$-\dfrac{2\pi}{5}$

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond

N	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	Une solution de l'équation $\sin(\arctan x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est :	$\sqrt{3}$	1	$-\sqrt{3}$
2	$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ $x \in]-\infty;-1[$, alors f(x) =	$\pi + 2\arctan(x)$	$-2\arctan(x)$	$\pi - 2\arctan(x)$
3	$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $-1 < x < 1$. Une primitive H de h est définie par : H(x) =	arcsin (1 – x)	$\arcsin(1-x^2)$	$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
4	Si $\alpha = \arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$ alors α =	$\frac{7\pi}{5}$	$-\frac{3\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{5}$
5	$f(x) = \arccos\left(x^2 - 1\right)$. f est défini dans l'intervalle	[-1 ; 1]	$\left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right]$	[0 ; 1]
	Derivee nieme			
	$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\pi + 2\arctan(2x)\right) =$	0	$-\infty$	1
	Soit la fonction F définie par : F(x) $= \int_0^{2x} \sqrt{4+t^2}\,dt$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} =$	$4\sqrt{3}$	8	$4\sqrt{2}$

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	cos(2arccosx) =	2cos 2x	$2x^2$-1	2x-1	$\sqrt{x^2-1}$
2	Une solution de l'équation $\sin\left(\arccos\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est : x =	1	-1	-2	$\sqrt{2}$
3	$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\pi+2\arctan(2x)\right) =$	0	$-\infty$	1	-1
	f est la fonction définie par : $f(x) = \arccos\frac{2x}{1+x^2}$. Le domaine de définition de f est :	[-1 ; 1]	$[0\,;+\infty[$	IR	$]-\infty\,;1]$
4	Si $I = \int_0^{\sin\frac{3\pi}{5}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ alors I =	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{3\pi}{5}$
5	$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $-1 < x < 1$. Une primitive H de h est définie par : H(x) =	arctan(x – 1)	arcsin(1– x)	arccos(2x)	$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
6	Soit la fonction F définie par : $F(x) = \int_2^{x^2} \sqrt{4+t^2}\,dt$, On a : $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \frac{F(x)}{x-\sqrt{2}} =$	$4\sqrt{3}$	8	$4\sqrt{2}$	6
7	$\int_{-1}^{1}\left(x^2\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx =$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
8	$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx =$	$\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{9}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$