Szabályos, félig szabályos és egyéb nevezetes poliéderek

Konvex szabályos poliéderek

Definíció: *Szabályos poliéderek (platóni[1] testek)* azok, amelyekre teljesül, hogy

1. Konvex;
2. élei egyenlők;
3. élszögei egyenlők;
4. lapszögei egyenlők.

Belátható, hogy a fenti négy tulajdonsággal rendelkező poliéder rendelkezik az alábbi négy tulajdonsággal is:

1. lapjai szabályosak,
2. lapjai egybevágók,
3. testszögletei szabályosak;
4. testszögletei egybevágók.

Ezeket a tulajdonságokat is elfogadhattuk volna a szabályos poliéder definíciójaként.

Definíció: Egy egyszerű poliéder *szerkezetét tekintve szabályos*, ha a poliéder felület egyszeresen összefüggő, minden csúcsába ugyanannyi él fut be, és minden lapjának ugyanannyi éle van. Pl. szerkezetét tekintve szabályos poliéder bármely téglatest vagy általában egy négyszög alapú csonkolt gúla. Igazolható, hogy ötféle topológiailag szabályos poliéder létezik, és ezek mindegyike realizálható konvex szabályos poliéder formájában.

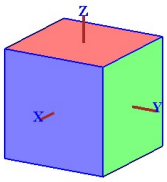
Legyen a csúcsok mindegyikének a fokszáma p a lapok – ugyancsak közös – fokszáma q . Ekkor $p \cdot C = 2E$ és $q \cdot L = 2E$ ahol *L, C, E* az eddigieknek megfelelően a poliéder lapjainak , csúcsainak és éleinek a számát jelenti. Nyilvánvalóan $p \geq 3$ és $q \geq 3$ Mivel a konvex – ennél fogva egyszerű – poliéderek körében keressük a szabályos szerkezetűeket, teljesülnie kell Euler tételének. Ebből: $\frac{2E}{q} + \frac{2E}{p} - E = 2$ azaz $2E\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) = 2$, amiből $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$ .Ebben az egyenlőtlenségben – amelyben p és q szerepe szimmetrikus – p -nek , vagy q -nak egyenlőnek kell lennie *3* -al, mivel ha mindkettő legalább 4, akkor már nem teljesülhet az egyenlőtlenség. (Összhangban azzal, amit korábban beláttunk, miszerint minden egyszerű poliédernek vagy van három fokszámú csúcsa, vagy van háromszöglapja. Legyen pl. *p=3* Ekkor $\frac{1}{q} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ amiből $q<6$ azaz q lehetséges értéke 3,4 vagy 5. Így p és q szimmetrikus szerepét is figyelembe véve öt szabályos szerkezetű (konvex) poliéder lehetséges. Az, hogy valóban léteznek ilyen szabályos poliéderek, legkönnyebben úgy láthatjuk be, hogy megadjuk a derékszögű koordinátáikat. Természetesen igazolnunk kellene, hogy az így megadott koordináták valóban olyan poliédereket határoznak meg, amelyek kielégítik a szabályos poliéderekkel szemben támasztott követelményeket.

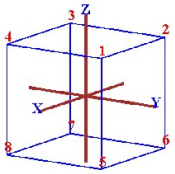
[1] Platón. (ie.427-347?)

Legismertebb szabályos poliéder a kocka. Legcélszerűbb úgy megadni a térbeli derékszögű koordinátáit, hogy a középpontja a koordinátarendszer origója legyen, a csúcsainak koordinátái pedig *1*, vagy *-1*. Ekkor a kocka éle *2* egységnyi lesz.

Egy kocka adatai

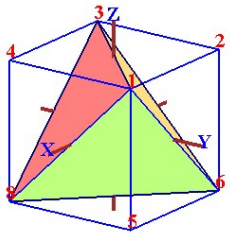
```
>C:=[[  1,  1,  1]   #1.   >L:=[[ 1, 2, 3, 4]
  , [ -1,  1,  1]   #2.       ,[ 1, 5, 6, 2]
  , [ -1, -1,  1]   #3.       ,[ 2, 6, 7, 3]
  , [  1, -1,  1]   #4.       ,[ 8, 7, 6, 5]
  , [  1,  1, -1]   #5.       ,[ 3, 7, 8, 4]
  , [ -1,  1, -1]   #6.       ,[ 4, 8, 5, 1]
  , [ -1, -1, -1]   #7.              ]:
  , [  1, -1, -1]]: #8.
```

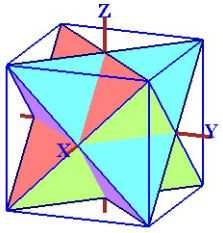


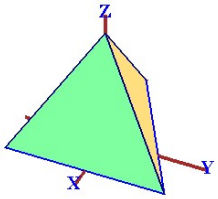


A 2 élhosszúságú kocka legcélszerűbb elhelyezése a koordinátarendszerben

A többi szabályos poliédert legkönnyebb a kockából előállítanunk. Ha a kocka csúcsai közül kiválasztunk négyet úgy, hogy közülük semelyik kettőnek ne legyen közös éle, akkor ezzel egy szabályos tetraéder csúcsait kaptuk meg. Az így kapott tetraéder oldala akkora, mint a kocka lapátlója. A kocka csúcsai két szabályos tetraédert határoznak meg.



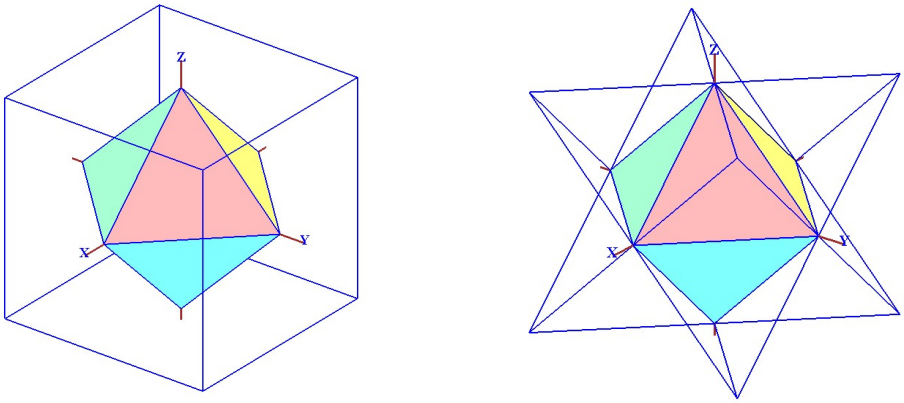




Szabályos tetraéderek

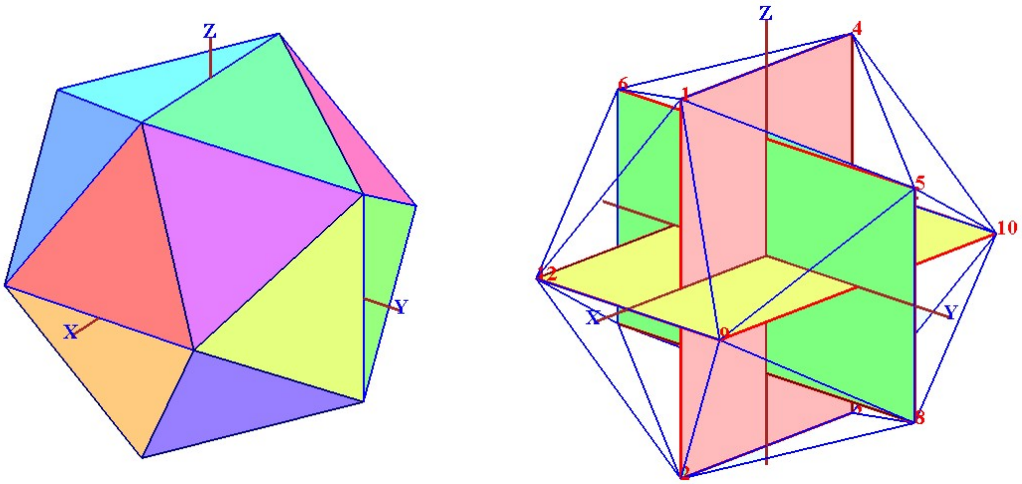
Természetesen megadhatunk egy szabályos tetraédert úgy is, hogy felveszünk az egyik koordinátasíkban egy szabályos háromszöget, a negyedik csúcs koordinátáit pedig a szabályos tetraéder magasságát kiszámítva határozzuk meg. Itt jegyezzük meg, hogy a szabályos poliédereket felsorolva egyedül a tetraédernél szerepel a „szabályos" jelző, ugyanis tetraédernek nevezzük az összes négy háromszög által határolt poliédert, azaz háromszögalapú gúlát.

A kocka lapjainak a középpontjai egy oktaéder csúcsait alkotják. Ugyanezt az oktaédert megkaphatjuk a kockából előállított két szabályos tetraéder metszeteként is. Egyúttal megállapíthatjuk, hogy egy szabályos tetraéder éleinek a felezőpontjai egy oktaéder csúcsai. Kissé bonyolultabb az oktaéder koordinátáit úgy megadnunk, hogy valamely lapjával illeszkedjen valamelyik – jelen esetben az *(XY)* – koordináta-sikra.



Az oktaéder

Első pillantásra bonyolultabb alakzatnak tűnik az ikozaéder, amelyet 20 szabályos háromszögből építhetünk fel. (Itt csak a szemben fekvő lapokat színeztük azonos színűre, így természetesen tíz különböző színt kellett használnunk.)



Az ikozaéder

Kezünkbe véve egy ikozaédert, megfigyelhetjük, hogy az egy csúcsára illeszkedő élek másik végpontjai egy szabályos ötszöget határoznak meg. Másrészt az ikozaéder szemközti élei párhuzamosak és egyenlők, így az előző megállapításból adódóan az arany-téglalapot alkotnak. Ezért az ikozaéder csúcsait három, egymásra páronként merőleges arany-téglalap alkotja. Ez ad lehetőséget arra, hogy könnyen megadhassuk az ikozaéder csúcsainak a koordinátáit. A poliéder egyértelmű megadásához természetesen meg kell még adnunk az egy –egy lapra illeszkedő csúcsok sorszámait tartalmazó L listát. Az alábbi adatokkal megadott ikozaéder minden éle két egységnyi. Ezt elegendő pl. belátnunk az [1-5] élre, ugyanis ebből a megfelelő koordináta-síkokra való tükrözéssel megkaphatjuk az ikozaéder összes olyan élét, amely nem éle egyik téglalapnak sem.

Az ikozaéder adatai

```
> tau:=(1+sqrt(5))/2;
```

```
> L:=[
```

```
> C:=[[   1,   0, tau]  #  1.      [ 1,12, 9],[11,10, 3]
     ,[   1,   0,-tau]  #  2.     ,[ 4,10,11],[ 9,12, 2]
     ,[  -1,   0,-tau]  #  3.     ,[ 9, 8, 5],[11, 7, 6]
     ,[  -1,   0, tau]  #  4.     ,[ 5, 8,10],[ 6, 7,12]
     ,[   0, tau,   1]  #  5.     ,[ 1, 5, 4],[ 2, 7, 3]
     ,[   0,-tau,   1]  #  6.     ,[ 1, 4, 6],[ 2, 3, 8]
     ,[   0,-tau,  -1]  #  7.     ,[ 1, 6,12],[10, 8, 3]
     ,[   0, tau,  -1]  #  8.     ,[ 2, 8, 9],[11, 6, 4]
     ,[ tau,   1,   0]  #  9.     ,[ 1, 9, 5],[11, 3, 7]
     ,[-tau,   1,   0]  # 10.     ,[12, 7, 2],[ 4,
     ,[-tau,  -1,   0]  # 11.     5,10]]:
     ,[ tau,  -1,   0]]:# 12.
```

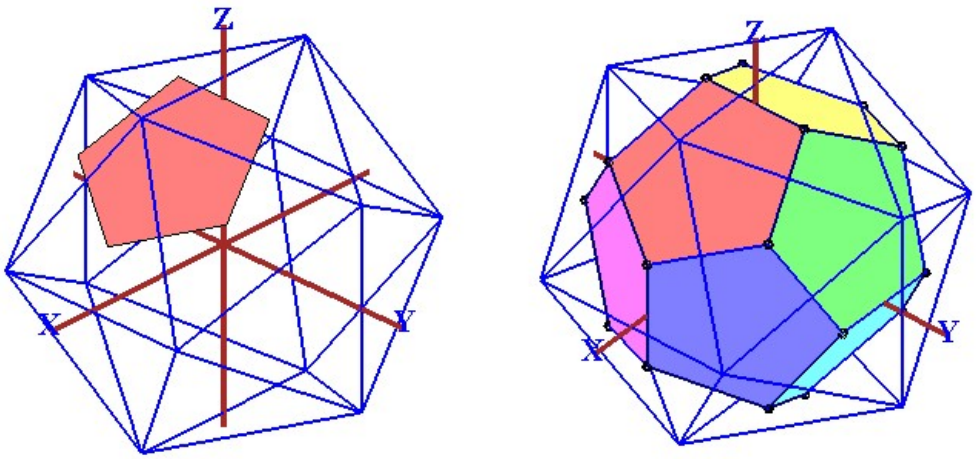
Egy ilyen él hossza valóban 2 egységnyi:

$$\mathrm{d}(1,5)=\sqrt{(1-0)^2+(0-\tau)^2+(\tau-1)^2}=\sqrt{1+(1+\tau)+(2-\tau)}=2$$

Az ikozaéder bármely csúcsára illeszkedő öt szabályos háromszög egy szabályos ötszögalapú gúla palástja. Ez persze még nem következik abból, hogy a kiválasztott csúcsra egybevágó szabályos háromszögek illeszkednek. Be kell még látnunk, hogy az egy csúcsra illeszkedő élek másik végpontjai síkbeli szabályos ötszöget alkotnak. Ehelyett elegendő belátnunk, hogy ez az öt pont olyan egyenlő oldalú ötszöget alkot, amelynek bármely átlója 2τ. (Ugyanis oldalai 2 egységnyiek.) Ezt viszont elegendő egyetlen olyan átlóra igazolnunk, amely nem illeszkedik egyik koordináta síkra sem, ugyanis bármely ilyen átló átvihető bármely másik ilyenbe a megfelelő koordinátasík(ok)ra való tükrözéssel, a koordinátasíkokban fekvő átlókat pedig eleve 2τ -nak választottuk. Például:

$$\mathrm{d}(12,5)=\sqrt{(\tau-0)^2+(-1-\tau)^2+(0-1)^2}$$
$$=\sqrt{\tau^2+\tau^4+1}=\sqrt{(1+\tau)+(2+3\tau)+1}=\sqrt{4(1+\tau)}=2\tau$$

Mivel az ikozaéder minden csúcsára illeszkedő szabályos háromszögek egy-egy szabályos ötszögalapú gúla oldallapjai, ezért ezeknek a szabályos háromszögeknek a középpontjai egy (síkbeli) szabályos ötszöget alkotnak.



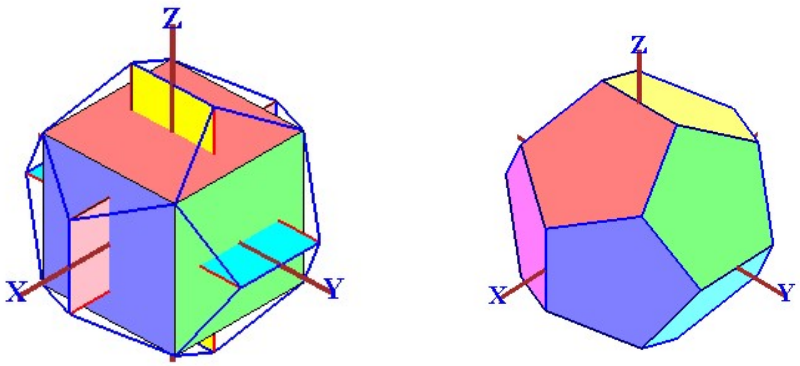
A dodekaéder származtatható egy ikozaéderből

Így az ikozaéder minden csúcsához tartozik egy-egy ilyen szabályos ötszög, melyek együtt egy ugyancsak szabályos poliédert, egy dodekaédert határoznak meg. Az ikozaéder csúcsaiból könnyen meghatározhatók a szabályos háromszögek középpontjainak a koordinátái, amelyek tehát egy dodekaéder csúcsai lesznek. Pl.

$$K(1,9,5)=\left[\frac{1+\tau+0}{3},\frac{0+1+\tau}{3},\frac{\tau+0+1}{3}\right]=\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\cdot[1,1,1]$$

$$K(1,5,4)=\left[\frac{1+0-1}{3},\frac{0+\tau+0}{3},\frac{\tau+1+\tau}{3}\right]=\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\cdot\left[0,\frac{1}{\tau},\tau\right]$$

A fentiekből kitűnik, hogy az így kapott dodekaédert célszerű alávetnünk egy origó középpontú $\frac{1+\tau}{3}$-szoros nyújtásnak, ezzel egy olyan dodekaéderhez jutunk, amelynek a csúcsai közül nyolc egybeesik a már ismert 2 élhoszú kockának a csúcsaival, a fennmaradó 12 pedig három olyan egymásra páronként merőleges téglalapot alkot, amelyek hosszabbik oldala 2τ, a rövidebbik – amely a dodekaéder élhossza is – $2\frac{1}{\tau}=2(\tau-1)$. Ennek a dodekaédernek a lapátlói 2 egységnyiek.



A dodekaéder legcélszerűbb elhelyezése a koordinátarendszerben

Úgy tűnik, minden egyszerű poliéder kiszínezéséhez elegendő négy szín[2], így ehhez is, azonban azt a dodekaédert, amellyel további műveleteket fogunk végezni, célszerűnek tűnt úgy színezni, hogy csak a szemközti lapjai kapják ugyanazt a színt.

Tekintsük át a (konvex) szabályos poliéderek néhány további összefüggését.

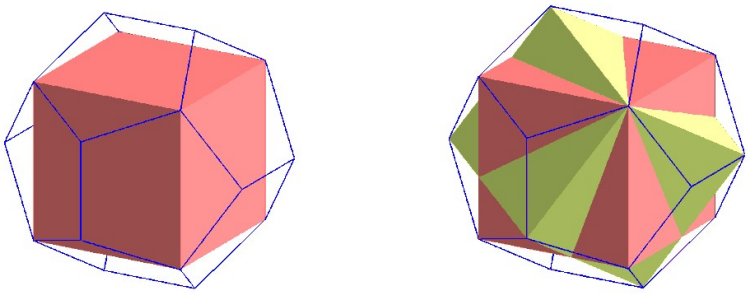
Ha bármely szabályos poliédernek egy testszögletét egybevágósági transzformációval átvisszük bármely másikba, akkor ez a térbeli mozgás poliédert önmagába viszi át. Ezt a tulajdonságot a poliéder *csúcs-tranzitív* tulajdonságának nevezzük.

Definíció: Egy (csupa egybevágó testszögletekkel rendelkező) poliéder *csúcs-tranzitív*, ha a poliéder bármely testszögletét bármely másikba átvivő térbeli mozgás (irányítástartó egybevágósági transzformáció) a poliédert önmagába viszi át. (Az irányítástartó egybevágósági transzformációk azok, amelyek páros számú síkra vonatkozó tükrözéssel állíthatók elő.) Egy (egybevágó lapokból álló) poliéder *lap-tranzitív*, ha a poliéder bármely lapját bármely másikba átvivő térbeli mozgás a poliédert önmagába viszi át.

A szabályos poliéderek lap-tranzitívek is.

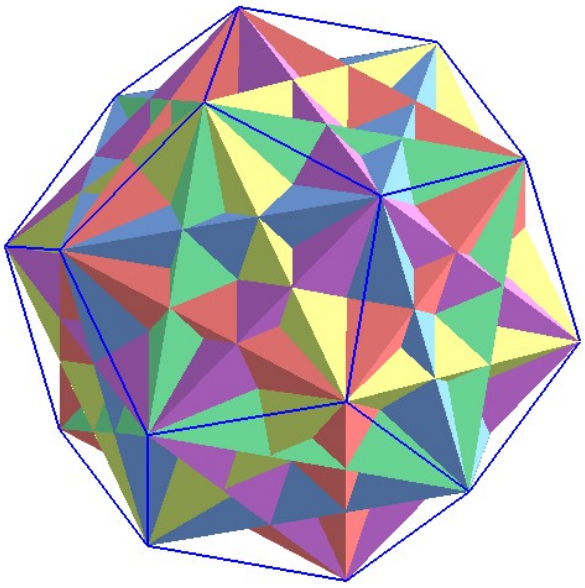
Mint láttuk, a kocka csúcsai egyúttal megadják két szabályos tetraédernek is a csúcsait. Az oktaéder csúcsai közül – és természetesen a tetraéder csúcsai közül sem – tudjuk kiválasztani egyéb szabályos poliéder csúcsait.

[2] Egy poliéder helyes kiszínezésén azt a színezést értjük, amelyben a szomszédos (közös éllel rendelkező) lapok különböző színt kapnak. Az „Úgy tűnik” kitétel mögött a geometria (vagy inkább a kombinatorika) egyik legnagyobb (nyitott?) problémája áll, az un. négyszín-tétel, amely szerint bármely síkba rajzolható térkép – ezzel egyenértékű módon bármely egyszerű poliéder – kiszínezéséhez elegendő négy szín. Erre a rendkívül érdekes kérdésre később visszatérünk.



A dodekaéderbe írt kockák

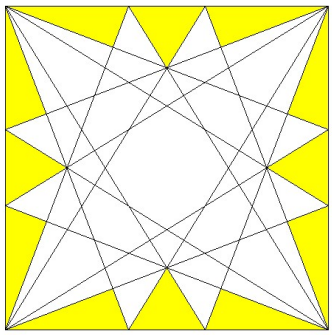
Azt is láttuk, hogy a dodekaéder csúcsai közül kiválaszthatunk nyolcat, melyek éppen egy kocka csúcsai lesznek. Egy adott dodekaéder-csúcshoz két ilyen kocka is tartozhat. Mivel a szabályos ötszög átlói az aranymetszés arányában osztják egymást, a dodekaéder két szemközti csúcsára illeszkedő két kockának az egymást metsző oldalai úgyszintén. Összesen öt kocka írható egy dodekaéderbe. Ha elő akarjuk állítani ennek az öt kockának a papírmodelljét, tudnunk kell, hogy egy kocka egy-egy négyzetlapjának melyek a „kilátszó" részei, amelyek nem esnek más kockák belsejébe. (Egy egy kocka élén lévő osztópontok $\tau:1:\tau$ arányban osztják az élt épp úgy, mint ahogy a szabályos ötszög átlói osztják egymást.



A dodekaéderbe írt öt kocka

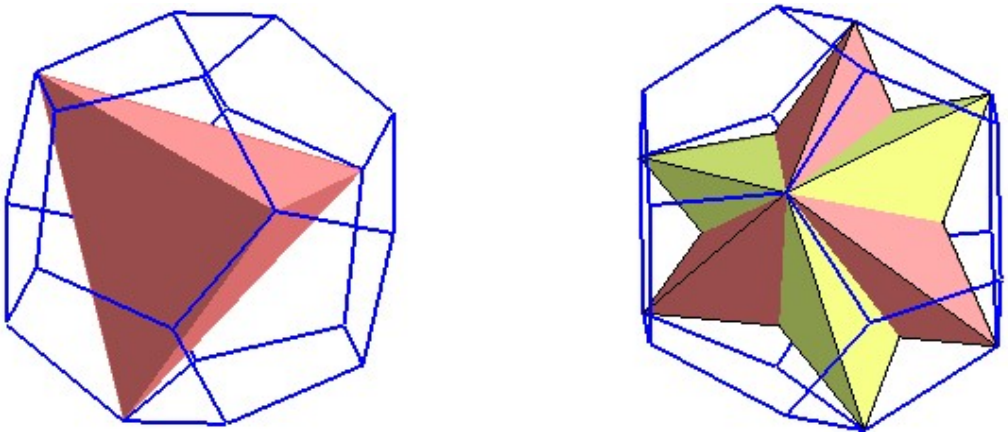
Azok az elszánt olvasóink, akik el szeretnék készíteni ennek az öt kockából álló konstrukciónak a modelljét, elvileg könnyű, gyakorlatilag igen aprólékos, finom munkát vállalnak magukra.

Ugyanis egy-egy kockalapból viszonylag kevés a látható rész, amelyet az alábbi sablon alapján célszerű külön-külön kivágni, majd összeragasztani.



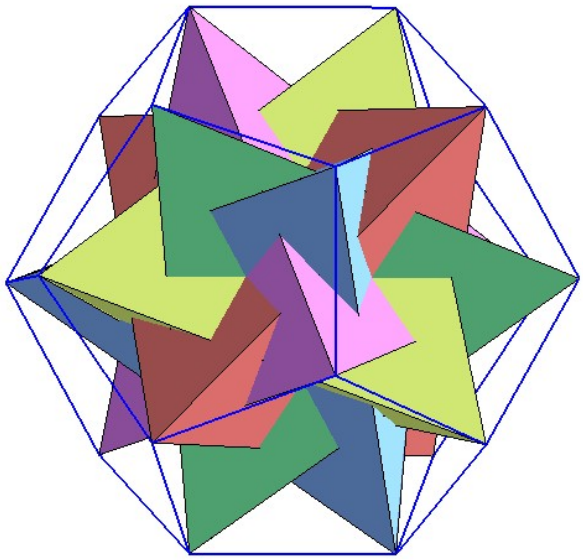
A dodekéderbe írt kockák lapjainak a „kilátszó” részei

Minthogy a kocka csúcsai közül ki tudtunk négyet választani úgy, hogy azok szabályos tetraédert alkossanak, nyilvánvaló, hogy az dodekaéder csúcsai közül is kiválasztható négy ilyen pont, vagyis a dodekaéderbe szabályos tetraéder is írható. A dodekaéder valamely kiszemelt csúcsához pontosan két beírt szabályos tetraéder is tartozik, melyeknek a közös csúcsával szemközti lapjai egy síkba esnek.



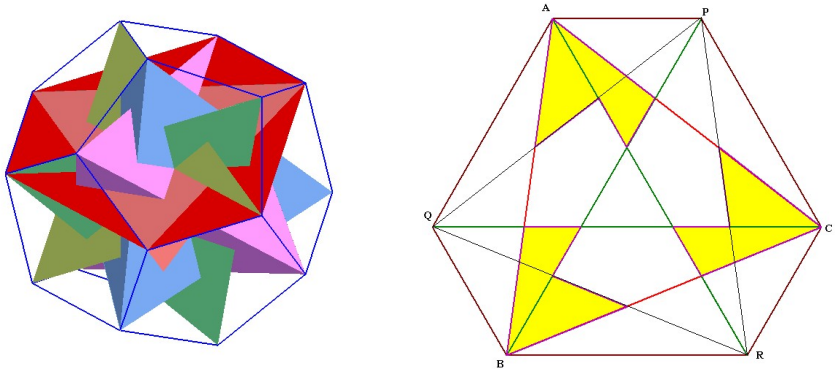
A dodekaéderbe írt tetraéderek

Ezek szerint a dodekaédernek összesen tíz beírt tetraédere van. Ezek közül öt-öt tetraéder kiválasztható úgy, hogy minden dodekaéder-csúcsra egy tetraéder illeszkedjék. Ugyanannak a dodekaédernek az egyik ill. másik tetraéder-ötöse egy „jobbos” és egy „balos” konstrukció, amelyek egymásnak egy síkra vonatkozó tükörképei.



A dodekaéderbe írt öt tetraéder

A konstrukció modelljének az elkészítéséhez meg kell szerkesztenünk a tetraéder lapoknak a „látható” részét. Ehhez vegyük észre, hogy a tetraéder minden lapjának a síkjára a dodekaédernek hat csúcsa illeszkedik.



dodekéderbe írt kockák lapjainak a „kilátszó” részei

Vegyük észre azt is, hogy ha fenti ábra *AP, BQ* és *CR* oldalai a dodekaéder oldalaival, *AQ, BR* és *CP* oldalai az ötszög átlóival, a tetraéder éleit alkotó AB, BC és CA oldalai a dodekaéder rövidebbik testátlójával (amely egyben a szemközti lapok távolsága), az *AR, BP, CQ* átlói a dodekaéder hosszabbik testátlójával (amely egyben a szemközti élek távolsága) egyenlő. Legyen pl.:

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BQ} = \mathrm{CR} = 1$$

$$\mathrm{AQ} = \mathrm{BR} = \mathrm{CP} = \tau \approx 1.618$$

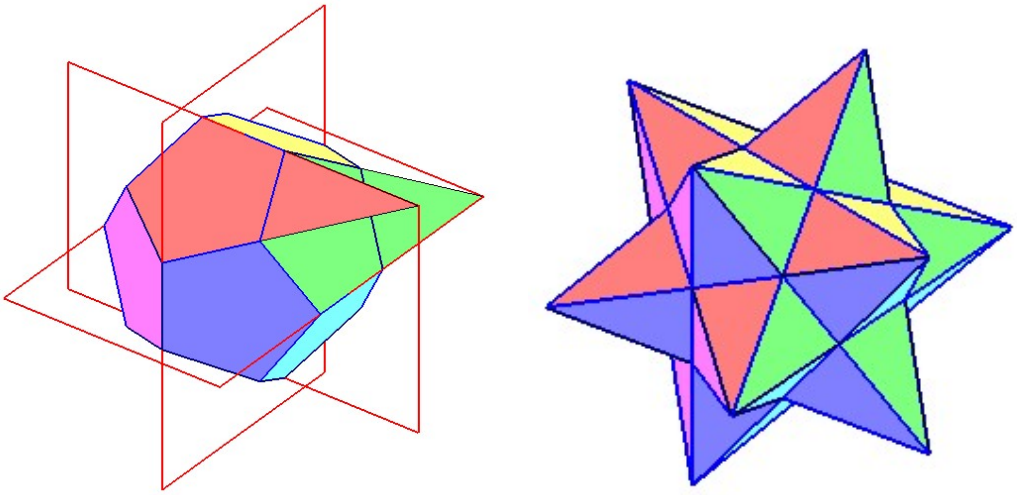
$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} = \tau\sqrt{2} \approx 2.288$$

$$\mathrm{AR} = \mathrm{BP} = \mathrm{CQ} = \tau^2 = 1 + \tau \approx 2.618$$

Szabályos csillag-poliéderek

A szabályos poliédereknek egy általánosabb értelmezéséhez jutunk, ha a szabályos poliéderek tulajdonságait megfogalmazva kissé engedékenyebbek leszünk: megengedjük, hogy vagy a lapok, vagy a testszögletek önátmetszők – de mindenképpen szabályosak - legyenek. Így a szabályos poliéderek köre kibővül. Ezek a vagy önátmetsző lapokkal , vagy önátmetsző testszögletekkel rendelkező - nem konvex - szabályos poliéderek az un. *szabályos csillag-poliéderek,* másnéven *(Kepler[3]-Poinsot[4] poliéderek).*

Egészítsük ki a (konvex) dodekaéder lapjait egy - egy hegyesszögű arany-háromszöggel úgy, hogy a lapokból szabályos csillagötszöget kapjunk! A kapott csillagötszögek csúcsai egy nagyobb ikozaéder csúcsai lesznek, melynek koordinátái τ-val, ill. ennek és $\tau^2 = 1 + \tau$-val fejezhetők ki.



A kis csillagdodekaéder

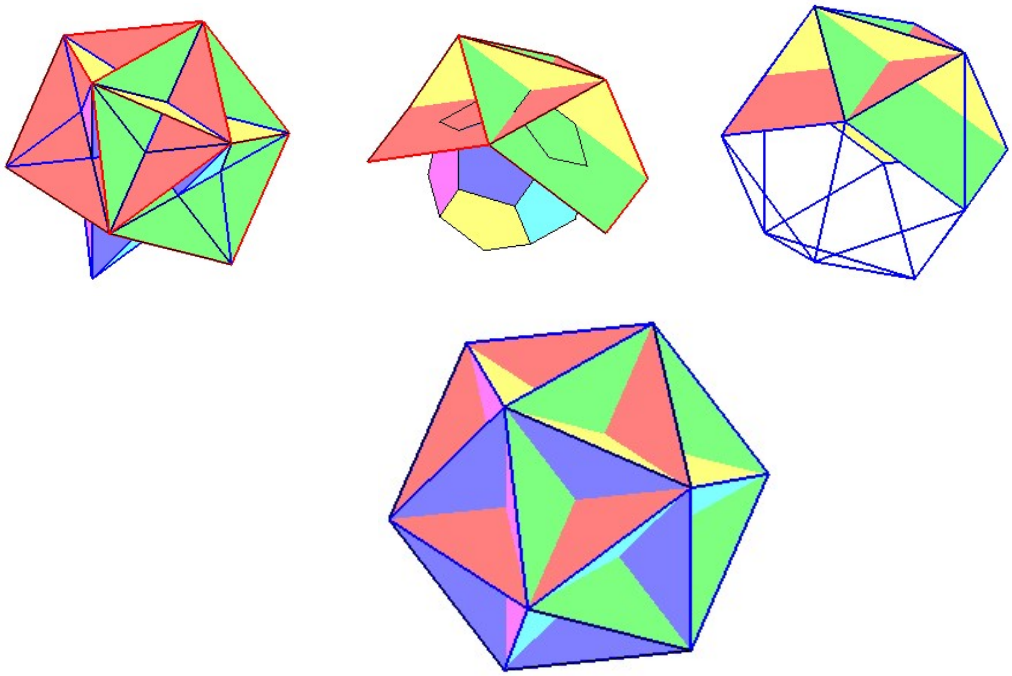
Ezzel lényegében a dodekaéder minden lapjára egy - egy olyan gúlát illesztettünk, amelynek az oldallapjai egy síkba esnek az alaplappal szomszédos dodekaéder - lapokra. Az így kapott – tágabb értelemben vett – szabályos poliéder, a kis csillagdodekaéder lapjai szabályos csillagötszögek (erre utal a csillag szó a nevében), testszögletei pedig ötélű konvex szabályos testszögletek. Így – amennyiben egy-egy csillag-ötszöget a csúcsaiból, valamint a származtatásához használt konvex ötszög csúcsaiból álló egyszerű (de konkáv) tízszöggel szeretnénk megadni – akkor ehhez fel kell vennünk egy dodekaéder, valamint egy megfelelően elhelyezett és felnagyított ikozaéder csúcsait. Még ez is kiszínezhető négy színnel úgy, hogy a szomszédos lapok különböző színűek legyenek.

A kis csillagdodekaéder lapjait ismét konvex ötszögekké kiegészítve kapjuk a nagy dodekaédert, melynek lapjai konvex szabályos ötszögek, testszögletei önátmetsző ötoldalú szabályos testszögletek. Az önátmetsző szabályos testszögletek hasonlóan értelmezhetők, mint az önátmetsző szabályos sokszögek: a ciklusban nem szomszédos szögtartományok metszhetik egymást. Ha egy ilyen testszögletet elmetszünk egy olyan síkkal, amellyel a testszöglet minden éle ugyanakkora szöget zár be, akkor a síkmetszet egy szabályos csillagötszög lesz.

---

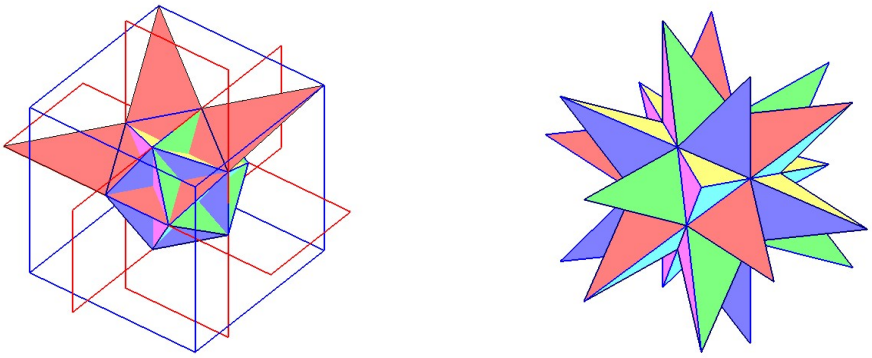
[3] Johannes Kepler (1571-1630)
[4] Louis Poinsot(1777-1859)

Az önátmetsző felületek „látszólagos” metszésvonalai nem élei a poliédernek, ezért ezeket nem emeltük ki a rajzon. Be lehet látni, hogy ennek a poliéder-felületnek a helyes kiszínezéséhez 10 szín szükséges és elegendő, mi most azonban 12 színt használtunk, a szemközti lapokat színeztük ugyanúgy. Ez a poliéder matematikailag közvetlenül származtatható a konvex dodekaéderből is, kihasználva, hogy a megfelelő lapok síkjai ugyanazok, vagy származtatható az ikozaéderből, kihasználva, hogy annak bizonyos csúcsai éppen egy konvex szabályos ötszöget alkotnak. Ez utóbbi származtatás teszi lehetővé, hogy az őt leíró adatokban (pl. a **C** és **L** listában, vagy pl. VRML fájlban) mindössze 12 pontnak és 12 lapnak az adatait kell megadnunk.



A nagy dodekaéder és származtatási lehetőségei

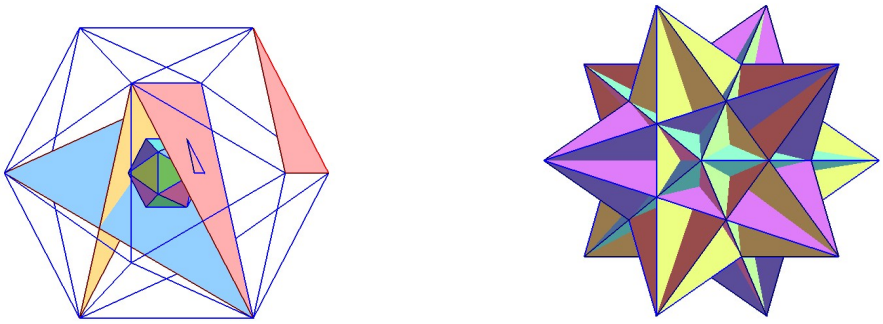
A nagy dodekaéder lapjait ismét kiegészíthetjük szabályos csillag-ötszögekké. Az újonnan kapott csillag-ötszög csúcsai egy (konvex) dodekaéder csúcsai lesznek. Eszerint ha ugyancsak egy cikk-cakkos tízszög csúcsainak a koordinátáival adjuk meg ezeket a csillag-ötszögeket, akkor ezeknek a belső pontjait egy ikozaéder, a külsőket egy ugyancsak megfelelően elhelyezett és felnagyított dodekaéder csúcsaiból kapjuk.



A nagy csillag dodekaéder

Így jutunk a nagy csillag dodekaéderhez, melynek a lapjai szabályos csillagötszögek, tesztszögletei háromélű szabályos testszögletek.

A (konvex) ikozaéder csúcsai közül – a lapjait alkotó csúcsokon túlmenően – ki tudunk választani olyanokat, amelyek szabályos háromszögeket alkotnak. Ezeket alkalmas sorrendben összeillesztve egyetlen – önátmetsző – poliéder felületet kapunk, a nagy ikozaédert. Ezt a poliédert szabályos háromszögek alkotják, testszögletei önátmetsző szabályos ötélű testszögletek. Ezt a poliédert származtathatjuk a konvex ikozaéder megfelelő lapjainak a megnövelésével, de megkaphatjuk úgy is, hogy a konvex ikozaéder megfelelő lapjaihoz megkeressük a vele párhuzamos, nagyobb háromszöglapokat. Egy nagy ikozaéder csúcsainak a koordinátáit $1+\tau$ -szoros nyújtással kapjuk annak a (konvex) ikozaédernek a csúcsaiból, amelyhez tartozó lap-síkok egybeesnek a nagy ikozaéder lapsíkjaival.



A nagy ikozaéder

Foglaljuk össze egy táblázatba a szabályos poliéderek adatait:

A poliéder neve[5]	Lap fokszáma	Csúcs fokszáma	Lapok száma	Csúcsok száma	Élek száma
Szabályos tetraéder	3	3	4	4	6
Kocka	4	3	6	8	12
Oktaéder	3	4	8	6	12
Dodekaéder	5	3	12	20	30
Ikozaéder	3	5	20	12	30
Kis csillag dodekaéder	5*	5	12	12	30
Nagy dodekaéder	5	5*	12	12	30
Nagy csillag dodekaéder	5*	3	12	20	30
Nagy ikozaéder	3	5*	20	12	30

A platon[6]i testeknek is nevezett (konvex) szabályos poliéderek, valamint a szabályos csillagpoliéderek, (Kepler-Poinsot poliéderek) között fennáll egy igen érdekes kapcsolat, az un, dualitás amely első közelítésben egy olyan hozzárendelés, amely egy poliéder lapjainak a duális poliéder csúcsait, éleinek a duális poliéder éleit, lapjainak a duális csúcsait felelteti meg. A poliéderek közötti dualitás szimmetrikus reláció. A tetraéder duálisa önmaga, a többiek közötti duális kapcsolatot a fenti táblázatban azonos háttérszínnel jelöltük.

E:\! Munka\! Permanens fejlesztések\Geometria 2010\Megjegyezzük még, hogy minden szabályos poliédernek - a szabályos csillag-poliédereket is beleértve – három nevezetes gömbje van, a csúcsokra illeszkedő *köréírt gömb*, a lapokat érintő *beírt gömb*, valamint az éleket érintő un. *középgömb*.

Félig szabályos poliéderek

Definíció: *Félig szabályos poliéder* az, amelyre teljesül, hogy:

- konvex,
- lapjai szabályosak,
- testszögletei egybevágók;
- csúcs-tranzitív;

vagy az teljesül, hogy

- konvex,
- lapjai egybevágók,
- testszögletei szabályosak;

[5] A szabályos poliéderek elnevezésében egyedül a tetraéder nevéhez kell minden esetben hozzáfűzni a szabályos jelzőt, noha a matematikai irodalom olykor pl. dodekaédernek nevez minden tizenkétlapú poliédert. A fenti az általánosabban elfogadott névhasználat.

[6] Platon, a filozófus maga nem foglalkozott matematikával, de nagyban hozzájárult a görög matematika tekintélyének a kialakulásához. A tetraédert, a kockát, a dodekaédert feltehetőleg már Püthagorasz is ismerte, az oktaédert és az ikozaédert Platón tanítványa Theaiethosz fedezte fel.

- lap-tranzitív;

E z utóbbiakat *duálisan félig szabályos poliéderek*nek nevezzük.

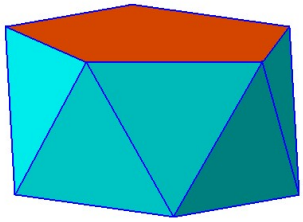
Az egyik vagy másik feltételnek különböző poliéderek felelnek meg. Eszerint két különböző típusú félig-szabályos poliéder létezik.

Azt mondjuk, hogy minden egyik értelemben vett félig-szabályos poliédernek létezik az un. *duális poliédere*, amely a másik értelemben vett félig szabályos poliéder.

A poliéderek közötti duális kapcsolatot később részletesen meg fogjuk vizsgálni.

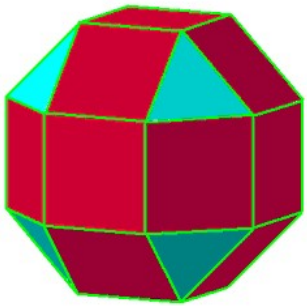
Vegyük észre, hogy a félig szabályos poliédereknek ez a definíciója úgy állt elő, hogy a szabályos poliéderrel szemben támasztott követelmények egy részét elhagytuk. Eszerint minden szabályos poliéder egyszersmind - mindkét értelemben - félig szabályos is, bár a szabályos poliédereket nem szoktuk a félig szabályosak közé sorolni.

Félig szabályos poliéder bármely szabályos *n* oldalú hasáb - más elnevezéssel *prizma* - melynek az oldallapjai négyzetek, valamint a szabályos háromszögekből és két darab *n* oldalú szabályos sokszögből előálló alakzat, az un. *szabályos antiprizma.*

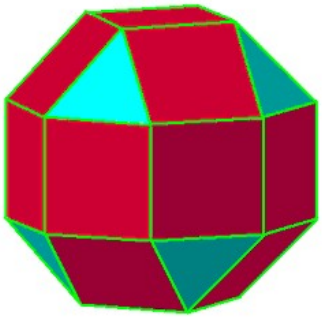


***P13** egy szabályos ötoldalú antiprizma.*

Ilyen félig szabályos poliéder pl. az, amelynek minden csúcsára három négyzet és egy szabályos háromszög illeszkedik: **P14**. Ugyanakkor nem tartozik a félig szabályos poliéderek közé ennek a „csavart" változata, melyet úgy kaphatunk, hogy az egyik szabályos nyolcszögre épülő "kupoláját" elfordítjuk 45 fokkal: **P15** Tulajdonképpen ez – az un. Miller poliéder - az egyetlen olyan konvex, szabályos sokszögekből álló, egybevágó testszögletű poliéder, amely nem csúcs-tranzitív. Miatta kellett ezt a feltételt felvennünk a félig szabályos poliéderekkel szemben támasztott követelmények közé. Ugyanígy a másik értelemben vett félig szabályos poliéderek közül is csak egy poliédert zár ki a lap-tranzitív megszorítás.



1. ábra **P14**

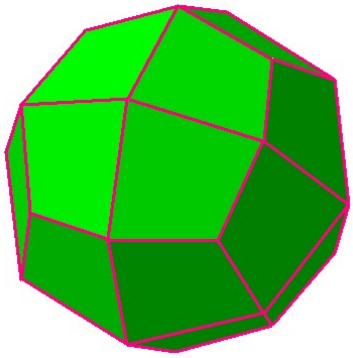


2. ábra ***P15***

Egy félig szabályos, és egy vele egybevágó testszögletű nem félig szabályos poliéder (a Miller-poliéder)

Definíció: *Arkhimédészi*[7] *poliéderek*nek nevezzük azokat a félig szabályos poliédereket, melyek lapjai legalább kétféle szabályos sokszögek (ezzel kizártuk közülük a szabályosakat, valamint a másik értelemben vett félig szabályosakat), nem hasábok, és nem antiprizmák. Igazolható, hogy *13* különböző arkhimédészi poliéder (arkhimédészi test) létezik. Ezekkel később bővebben foglalkozunk.

Az arkhimédészi poliéderek duálisaira - melyeknek a testszögletei szabályosak és a lapjai egybevágók - használatos a *Catalan*[8] *poliéder* elnevezés.



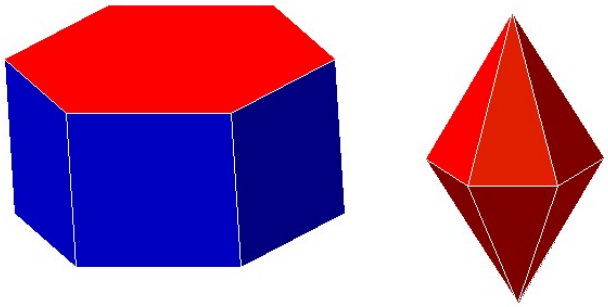
3. ábra
***P16** a fenti **P14** arkhimédészi poliédernek a duálisaként előálló Catalan poliéder, amely csupa egybevágó deltoidokból áll, a testszögletei pedig 3 ill. 4 élű szabályos testszögletek.*

Néha – szűkebb értelemben – csak az arkhimédészi és a Catalan poliédereket nevezik félig szabályos poliédereknek.

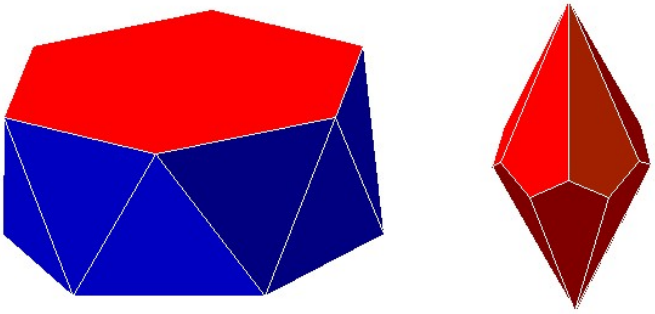
Miután az alapfogalmak tárgyalásakor rázúdítottuk olvasóinkra a félig szabályos poliéderekkel kapcsolatos definíciókat, nincs más dolgunk, mint hogy rendre bemutassuk ezeket a poliédereket. Tesszük ezt úgy, hogy – egyelőre tovább halogatva a poliéderek közötti duális kapcsolat részletezését – egymás mellé rajzoljuk azokat a poliédereket, amelyeknek a lapjai szabályosak és testszögletei egybevágók, és a nekik megfelelő duálisan félig szabályos poliédereket, melyek testszögletei szabályosak és lapjaik egybevágók.

Az arkhimédészi és a Catalan poliéderek körén kívül eső félig-szabályos poliéderek az *n* oldalú hasábok (prizmák) és antiprizmák valamint duálisak az *n* oldalú kettős gúlák ill. deltoéderek – amelyeknek lapjai egybevágó deltoidok. Természetesen a hasábok oldallapjainak négyzeteknek kell lenniük, ugyanígy a félig-szabályos antiprizmákat két szabályos *n*-szög és *2n* darab szabályos háromszög alkotja. (Általánosabban: antiprizma az a poliéder is amely két *n*-szögből, és *2n* egyenlőszárú háromszögből áll.) Ugyanígy most a kettősgúlák és deltoéderek élhosszait is úgy kell megválasztanunk, hogy a keletkezett négyélű testszögletek, ill. a deltoéderek háromélű testszögletei is szabályosak legyenek.

[7] Arkhimédész (i.e.287?-212)
[8] Eugéne Charles Catalan (1814 – 1894)



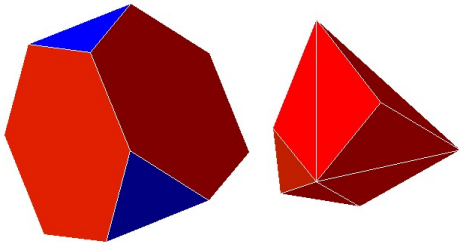
n=6 oldalú prizma és duálisa a 6 oldalú kettősgúla



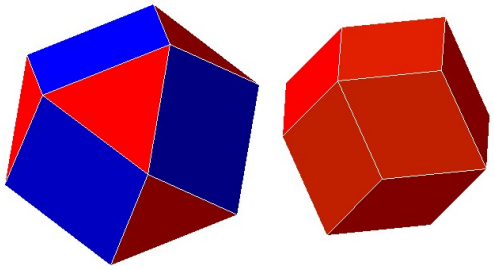
n=6 oldalú antiprizma és duálisa a 6 oldalú deltoéder

Arkhimédészi és Catalan poliéderek.

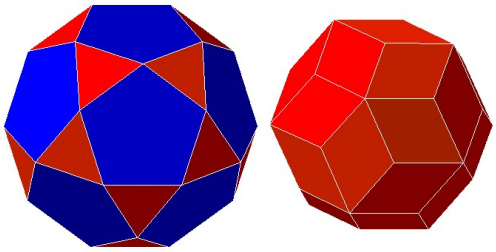
Mint már említettük 13 arkhimédészi és nekik megfelelően ugyanennyi Catalan poliéder létezik. Mi azonban 15-öt mutatunk be, ugyanis van közöttük két olyan, amelynek nincs szimmetriasíkja, így létezik „jobbos” és „balos” változatuk, amelyek egymás –síkra vonatkozó – tükörképei. A poliéderek nevei helyett a számokból álló un. Steiner- szimbólumukat írjuk az egyes rajzok alá, amely az arkhimédészi poliédereknél azt jelenti, hogy az egy csúcsra illeszkedő lapok rendre hány oldalú sokszögek, a Catalan poliédereknél pedig azt, hogy az egy lapra illeszkedő csúcsoknak rendre mennyi a fokszáma. Nem tartjuk központi kérdésnek azt, hogy a poliédereket névvel lássuk el. Aki mégis kíváncsi e poliéderek neveire, a POLY nevű program futtatásával megismerheti a neveiket is, miközben „mozgatva” alaposabban szemügyre veheti őket.



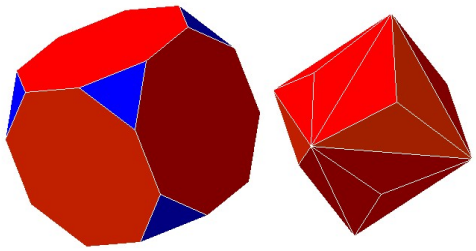
{6, 6, 3}



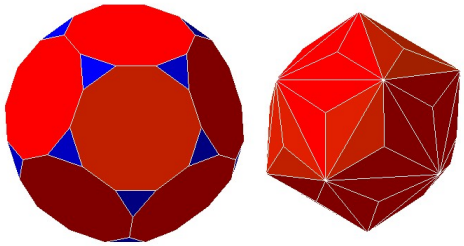
{3, 4, 3, 4]



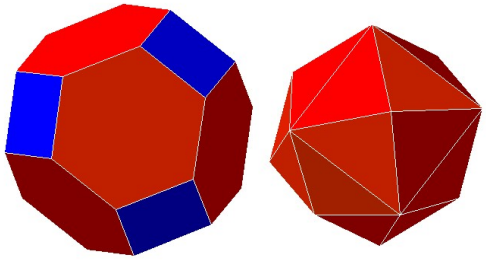
{3, 5, 3, 5}



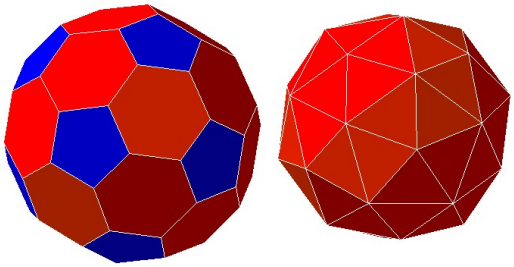
{8, 3, 8, 3}



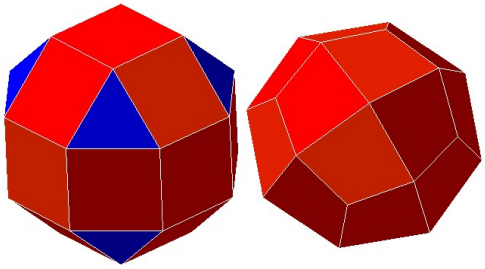
{10, 3, 10, 3}



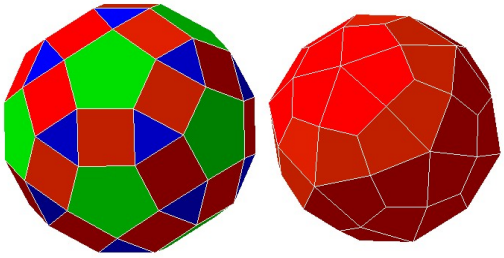
{4, 6, 6}



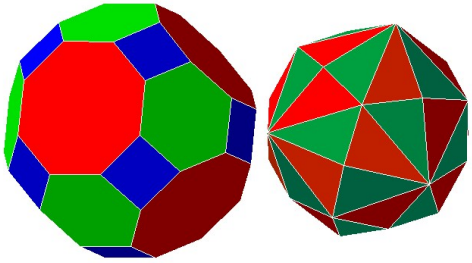
{5, 6, 6}



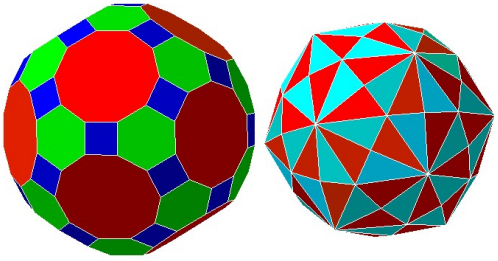
{3, 4, 4, 4}



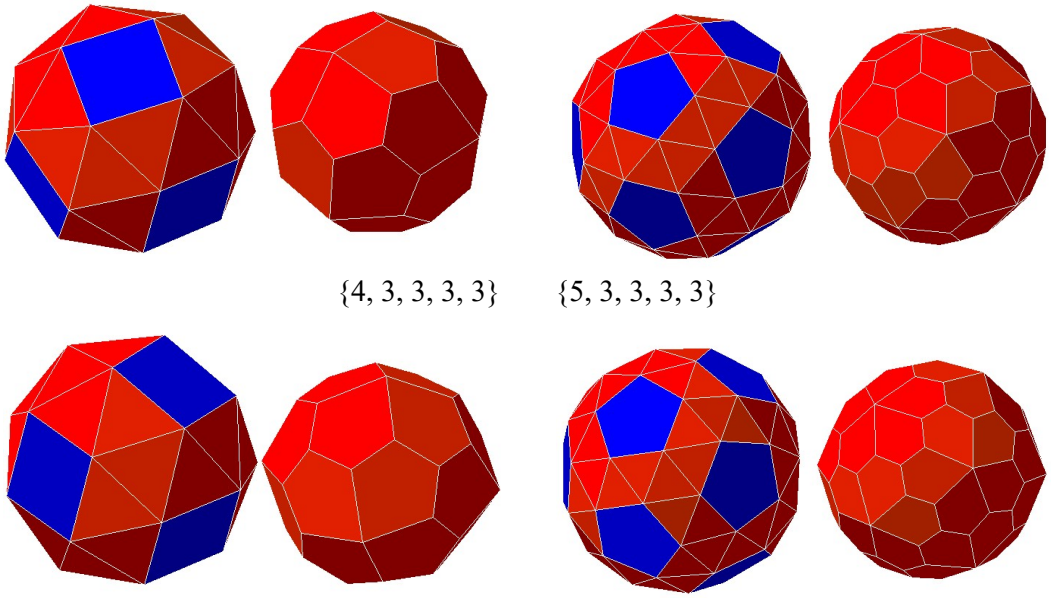
{3, 4, 5, 4}



{8, 6, 4}



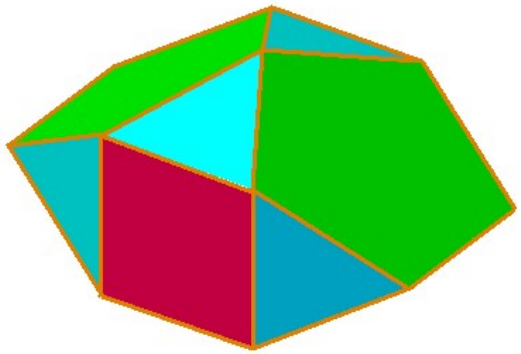
{10, 6, 4}



4. ábra
Az arkhimédészi poliéderek és duálisaik: a Catalan poliéderek

Az arkhimédészi poliédereknek két nevezetes gömbjük van: a köréírt gömb, valamint az éleket érintő középgömb. A Catalan poliédereknek ugyancsak kettő: a középgömb, valamint a beírt gömb.

A konvex poliédereknek egy érdekes csoportját alkotják az un. *Johnson*[9] *poliéderek*, melyeknek a lapjai 3- ,4- ,5- ,6-, 8- vagy 10- oldalú szabályos sokszögek, és nem tartoznak az előbbi csoportok egyikébe sem. Összesen 92 db ilyen poliéder létezik. (Ide tartozik pl. a Miller-poliéder is.)



P17 *egy Johnson poliéder, amely 8 szabályos háromszögből, 2 négyzetből és 4 szabályos ötszögből áll.*

A fent említett konvex poliéderek alaposabb megismeréséhez nagy segítséget nyújthat a POLY nevű (cél)szoftver, melynek kizárólagos feladata ezeknek a poliédereknek a bemutatása.

[9] Norman Johnson ma is élő matematikus. Az említett listát az1970-es években állította össze.