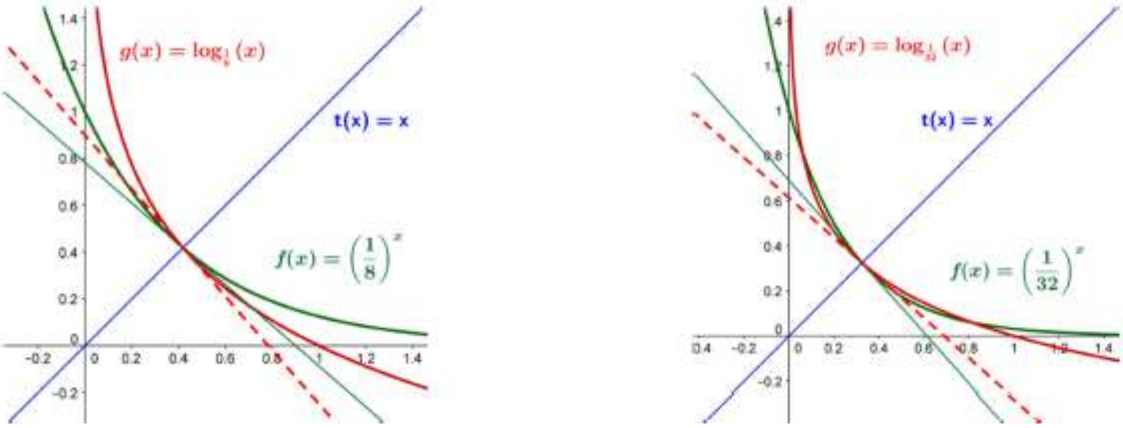
A vizsgált két függvény egymás inverze, így a két függvény grafikonjának valóban van metszéspontja az y = x egyenesen.
Abból viszont, hogy mindkét függvény monoton, nem következik, hogy grafikonjaik másutt nem metszhetik egymást. Ennek illusztrálására hozzunk egy "durvább" példát. Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az $y = a^x$ függvényt és inverzét, $y = \log_a x$-t az $y = x$ egyenesre eső (x_0, x_0) metszéspontjukba húzott érintőikkel együtt.



(Az exponenciális függvény és érintője a rajzon folytonos, a logaritmusfüggvény és érintője szaggatott vonal.)
Észrevehetjük, hogy $a = \frac{1}{8}$ esetben az exponenciális függvény érintőjének az irányszöge a abszolút értékben kisebb, mint 45°, így az inverzéé nagyobb. Ez azt jelenti, hogy pl. az $x < x_0$ értékekre a logaritmus függvény grafikonjának érintője fölötte halad az exponenciális függvény érintőjének, maga a logaritmusfüggvény grafikonja pedig még e fölött. Így ezen az intervallumon nem metszheti az exponenciális függvény grafikonját.
Ugyanakkor az $a = \frac{1}{32}$ esetben, - mivel a logaritmusfüggvény érintőjének az irányszöge lesz a kisebb abszolút értékben 45°-nál - ha $x < x_0$ akkor az az x_0 pont közelében a logaritmus függvény grafikonja alatta halad az exponenciális függvényének. Ugyanakkor metszenie kell valahol, mivel az exponenciális függvény metszi az y tengelyt, a logaritmus függvény pedig nem. Ennek a metszéspontnak az y = x egyenesre vonatkozó tükörképe ugyancsak metszéspont lesz. Eszerint, ha a 0< a <1 paraméter elég közel van 0-hoz, akkor biztosan három, ha elég közel van *1*-hez, biztosan egy gyöke van az $a^x = \log_a x$ egyenletnek.
Keressük meg azt az a paraméter értéket, amely e két állapot közötti határeset! Ez nyilvánvalóan akkor következik be, amikor a két függvény grafikonjának (x_0, x_0) pontbeli érintője egybeesik, azaz merőleges az $y = x$ egyenesre (meredeksége -1). Ezekből a feltételekből a-ra és x-re egy két ismeretlenes egyenletrendszert írhatunk fel:

$$\left.\begin{aligned} x &= a^x \\ a^x \ln(a) &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Ebből a kissé szokatlan egyenletrendszerből x és a - többszörös behelyettesítéssel - könnyen meghatározható:

$$x \ln a = -1 \quad a^x = \frac{1}{e} \quad x = \frac{1}{e} \quad a^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} \quad a = \left(\frac{1}{e}\right)^e = e^{-e} \approx 0.065988\ldots$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha

$$\left(\frac{1}{e}\right)^e = e^{-e} \le a < 1$$

akkor az $a^x = \log_a x$ egyenletnek egy valós gyöke van.

$$0 < a < \left(\frac{1}{e}\right)^e = e^{-e}$$

esetben pedig, - így $a = \frac{1}{16} = 0.0625$ esetben is - három.