Limieten van rijen

Karel Appeltans

March 10, 2021

1 Herhaling: het begrip rij

1.1 Voorbeelden

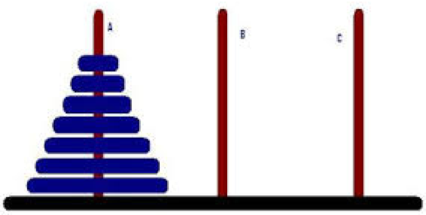
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
- 3, 9, 27, 81, ...
- 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,$\frac{1}{5}$,...
- 8, 17, -13, 22,...
- 0, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{15}{16}$,...
- 2, 4, 8, 16,...
- 2, 4, 8, 16,...
- 2, 3, 5, 7, 11,...

1.2 recursief en expliciet voorschrift

1.3 RR en MR

1.4 Oefeningen

1. Handboek oef 8 blz. 313
   - 4, 7, 10, 13, ...
   - -2, 6, -18, 54, ...
   - $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, ...
   - $\sqrt{3}$, $-\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$,$-2\sqrt{6}$,..
   - $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{17}$,...
   - $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$,...
   - 2, 1, $\frac{8}{9}$, 1, $\frac{32}{25}$,...
2. Torens van Hanoi

   Geef een expliciet en een recursief voorschrift voor het aantal stappen
3. rij 2, 4, 8, 16, 31, ...

2 Limiet van een rij met expliciet voorschrift

2.1 eindige limiet

2.1.1 m.b.v. definitie

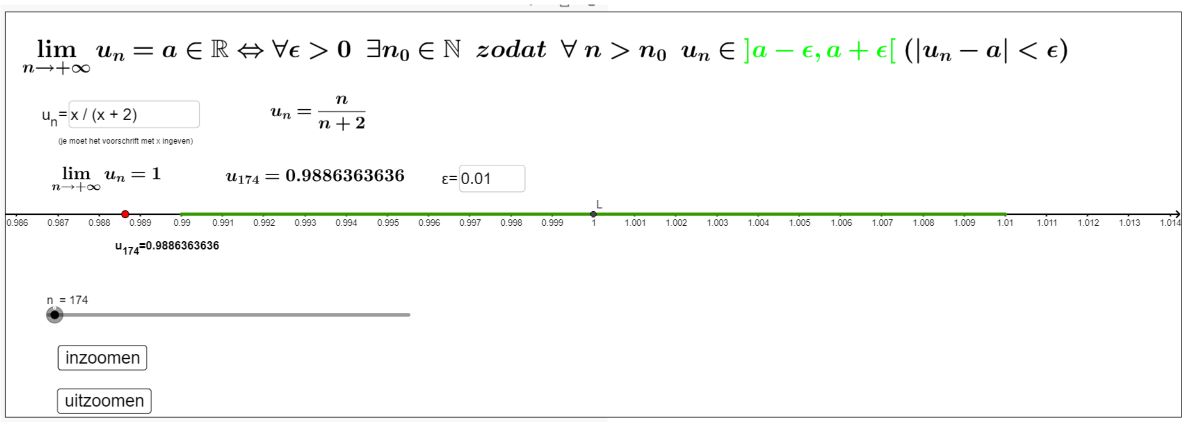


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/ESeUy7pn

Oefeningen

1. $t_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
2. $t_n = \frac{2n+100}{n}$
3. $t_n = \frac{-3n+4}{n+2}$
4. $t_n = 3 - (\frac{1}{2})^n$
5. $t_n = \frac{6n+500}{-2n+156}$
6. $t_n = \frac{2n+8000}{n}$ Is $\lim_{n\to\infty} t_n = 3$?

2.1.2 m.b.v. rekenregels

Stelling 1:

Als $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ en $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$ dan

1. $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = l + l'$
2. $\lim_{n\to\infty} u_n.v_n = l.l'$
3. $\lim_{n\to\infty} k.u_n = k.l'$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$ als $v_n \neq 0$ en $l' \neq 0$

Bewijs van 1.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_1 \quad u_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[\quad of \quad l - \frac{\epsilon}{2} < u_n < l + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = l' \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_2 \quad v_n \in]l'-\epsilon, l'+\epsilon[\quad of \quad l' - \frac{\epsilon}{2} < v_n < l' + \frac{\epsilon}{2}$$

Neem nu $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ dan geldt voor alle $n > n_0$:

$$l + l' - \epsilon < u_n + v_n < l + l' < l + l' + \epsilon$$

Wat de definitie is van $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = l + l'$

Stelling 2:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0,\ p \in Q_0^+$

Toepassen:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-3}{2n+1}$

Oefeningen

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{5n^4-n^2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}+11}$

Stelling 3:Een eindige limiet van een rij is uniek

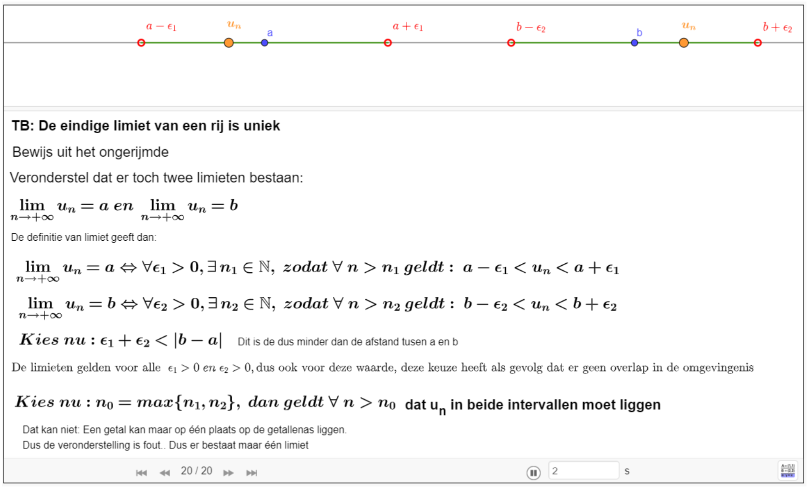


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/ESeUy7pn

2.2 oneindige limiet

2.2.1 m.b.v. definitie

voorbeelden

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} -3n+5$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n$

Definitie

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_0 \quad u_n > r$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_0 \quad u_n < -r$$

2.2.2 m.b.v. rekenregels

som: $u_n + v_n$

		$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	
		$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	/
	$-\infty$	/	$-\infty$
	l	$+\infty$	$-\infty$

product: $u_n.v_n$

		$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	
		$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	0	/	/
	$l,, l > 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$l, l < 0$	-∞	$+\infty$

omgekeerde: $\frac{1}{u_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$l, l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

quotient $\frac{u_n}{v_n}$

		$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$				
		$+\infty$	$-\infty$	0_+	0_-	$l', l' \neq 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$+\infty$	/	/	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
	$-\infty$	/	/	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
	0	0	0	/	/	0
	$l, l > 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{l}{l'}$
	$l, l < 0$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{l}{l'}$

oefeningen

1. Bewijs: $+\infty + \infty = +\infty$
2. Verklaar $(+\infty) + (-\infty)$ is een onbepaalde vorm
3. Verklaar $\frac{+\infty}{-\infty}$ is een onbepaalde vorm
4. Toon aan m.b.v. de rekenregels
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 - n = +\infty$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+5n-7}{2n^3+1} = \frac{3}{2}$

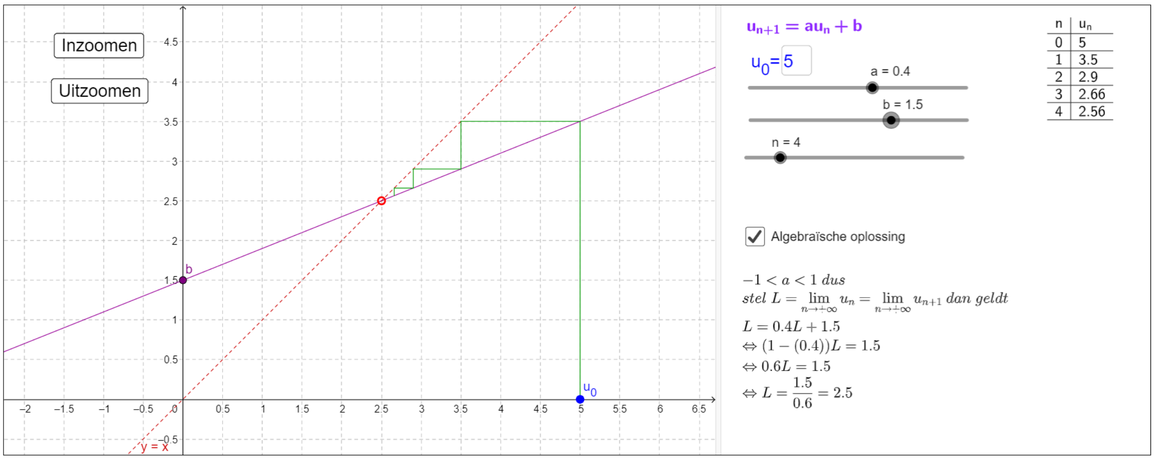
5. Bereken m.b.v. de rekenregels:

   (a) $\lim_{n\to\infty} n^5 - n^4 + n^7$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$

3 limiet van een rij met lineair recursief voorschrift

3.1 grafisch en algebraïsche oplossing



n	u_n
0	5
1	3.5
2	2.9
3	2.66
4	2.56

Figure 3: https://www.geogebra.org/m/rxceuztj

3.2 oefeningen

1. LV Appeltans Boomteelt heeft een perceel bomen. Elk jaar wordt 20% gerooid en worden er 1000 nieuwe boompjes gepland. Het eerste jaar worden er 4000 boompjes gepland. Op lange termijn bekeken,hoeveel bomen bevinden zich er op het perceel?

2. Mijn schoonvader gaat op consultatie bij dr. Bart Appeltans voor een ontstoken galblaas. Er moet onmiddellijk met medicatie begonnen worden: eerst een dosis van 50 mg en vervolgens elke drie uur een dosis van 25 mg. Het lichaam zal dit medicament ook afbreken: elke drie uur wordt 40% afgebroken. Het medicament is pas effectief als op lange termijn meer dan 60 mg. in het lichaam aanwezig blijft.

   (a) Zal de voorgeschreven dosis volstaan?

   (b) Welke begindosis moet er minimaal voorgeschreven worden om de 60 mg- grens te halen?

   (c) Welke hoeveelheid moet er minimaal om de drie uur gegeven worden om de 60 mg- grens te halen?

   (d) Wat is het maximale afbraak-% om de 60 mg- grens te behouden?

3. Sinds enkele jaren mag er van president Poetin geen Limburgs fruit meer ingevoerd worden in Rusland. Belorta fruitveilingenen en zijn direceur, P.Appeltans, hebben echter een smokkelroute opgezet. In een pakhuis wordt al het fruit verzameld. Helaas wordt per dag 60% onderschept door de Russische douane. Hoeveel ton fruit bevat op termijn het pakhuis, als elke dag 1500 kg vertrekt en de eerste lading niet onderschept wordt. Geef een grafische en algebraïsche oplossing.

4. Gegeven is volgende rij met recursief voorschrift $u_{n+2} = \frac{u_n+u_{n+1}}{2}$ met $u_1 = 0$ en $u_2 = 1$

   (a) Geef de eerste 4 termen van deze rij.

   (b) Geef een recursief voorschrift van de vorm $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ voor deze rij.

(c) Bepaal grafisch en algebraísch de limiet van deze rij.

5. Een watervolume van $2200m^3$ wordt verdeeld over twee bassins A en B. Via een pompsysteem wordt elke dag 10% van A naar B gepompt en 15% van B naar A. Bij de start van het systeem bevindt zich 800 l in bassin A en 1400 l in bassin B

   (a) Toon aan dat de hoeveelheid water in bassin A in functie van het aantal dagen gegeven wordt door $a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + 330$

   (b) Bepaal grafisch en algebraísch de uiteindelijke hoeveelheid water in bassin A en B

6. Bepaal de limiet van de recursieve rij $u_{n+1} = p \cdot u_n + q$ als $u_0 = 12, u_1 = 15$ en $u_2 = 16$

4 Algemene technieken

4.1 insluitstelling

Beschouw drie rijen s_n, y_n en z_n. Veronderstel dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ voor alle } n \geq k.$$

Veronderstel bovendien dat x_n en z_n een limiet hebben en dat beide limieten gelijk zijn. Dan heeft ook de "middelste" rij y_n een limiet en bovendien is

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} y_n = \lim_{x\to\infty} z_n$$

oefeningen

1. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sin(n)}{n}$

2. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

4.2 stijgende en dalende rijen

Beschouw een stijgende rij x_n. Dan heeft deze rij altijd een limiet. Bovendien is deze limiet eindig als en slechts als de rij naar boven begrensd is (d.w.z. als er een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $x_n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$

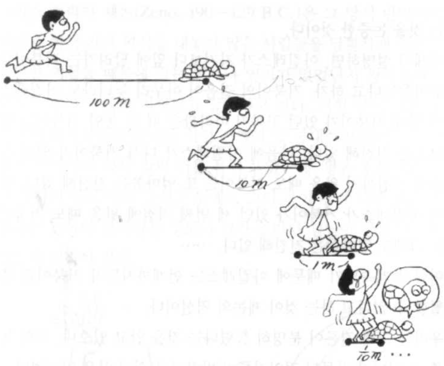
Oefening

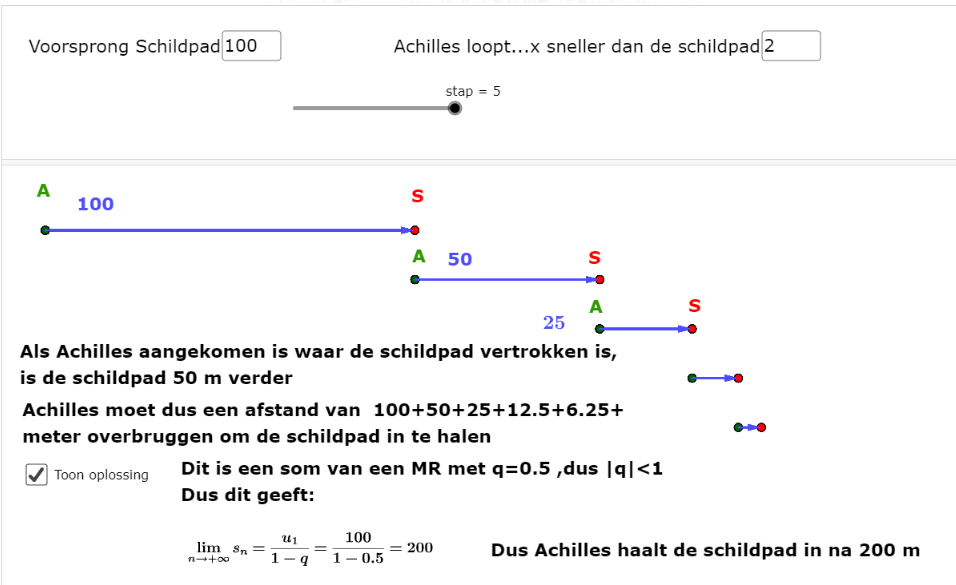
Formuleer nu de tweelingversie van deze stelling voor dalende rijen.

5 Limiet van meetkundige reeks

5.1 Het begrip reeks

5.2 paradox van Zeno





[https://www.geogebra.org/m/parg6hhn]https://www.geogebra.org/m/parg6hhn

5.3 algemene formule

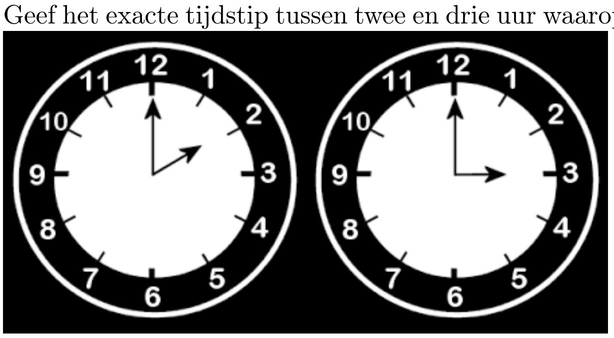
Gegeven meetkundige rij u_n met quotiënt q, met $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{u_1}{1-q}$$

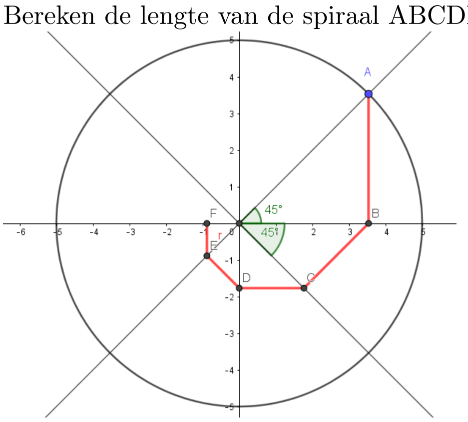
5.4 oefeningen

1. paradox van Zeno: Na hoeveel meter zal Achilles de schildpad inhalen bij een voorsprong van 400 meter en als Achilles 8 keer sneller loopt?

2. Geef het exacte tijdstip tussen twee en drie uur waarop de grote wijzer de kleine wijzer inhaalt



3. Bereken de lengte van de spiraal ABCDEF... als dit patroon zich blijft herhalen:

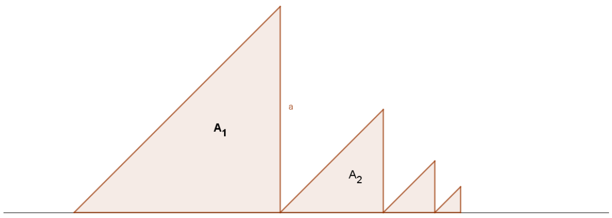


4. Een zijde van een gelijkzijdige driehoek is 12 cm. Als je de middens van de zijden met elkaar verbindt, verkrijg je een ingeschreven gelijkzijdige driehoek. In deze driehoek verbind je weer de middens van de zijden met elkaar. Dit geeft een volgende ingeschreven gelijkzijdige driehoek. En zo doe je maar verder zonder ophouden.

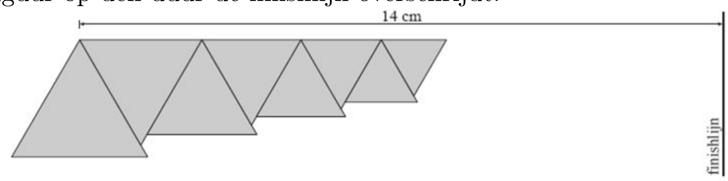
   (a) Bepaal de som van de omtrekken van alle driehoeken (A. 72 cm.)

   (b) Bepaal de som van de oppervlakte van alle driehoeken (A. $48\sqrt{3}cm^2$)

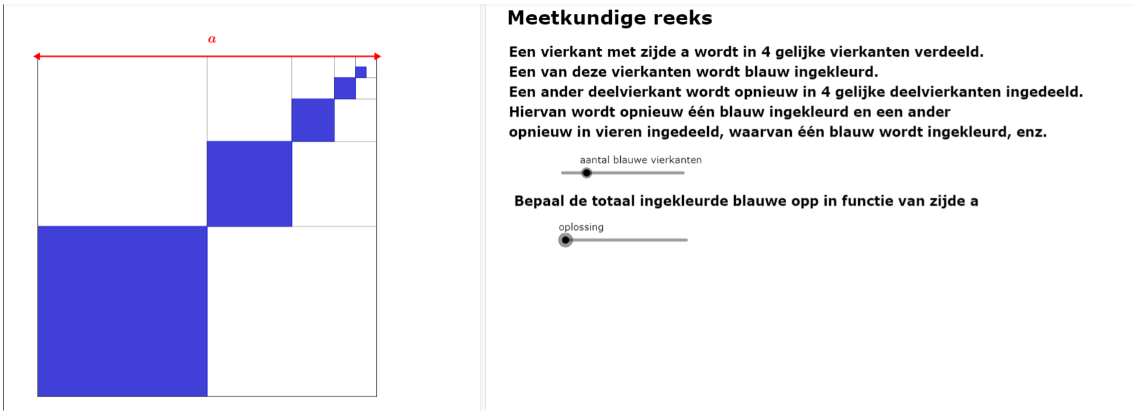
5. Je begint met een driehoek A_1. Deze is rechthoekig en gelijkbenig; de gelijke benen hebben lengte a. Tegen A_1 komt driehoek A_2: deze heeft dezelfde vorm als A_1, maar zijn afmetingen zijn maar de helft. Op dezelfde manier heeft A_3 zijden die maar half zo lang zijn als die van A_2, enz.... Dit wordt doorgetrokken tot in het oneindige. Er ontstaat een soort zaagtandfiguur. Bereken de totale oppervlakte van deze figuur. $\left(A.\frac{2a^2}{3}\right)$



6. We maken een figuur die uit oneindig veel gelijkzijdige driehoeken bestaat. We beginnen met een gelijkzijdige driehoek met zijde 3. Rechtsboven plakken we er een gelijkzijdige driehoek aan met zijde 2,7 cm, dan eentje met zijde2,43 Enz. Na elke keer plakken komt de figuur dichter bij de finishlijn. We plakken oneindig vaak. Onderzoek m.b.v. een berekening of deze figuur op den duur de finishlijn overschrijdt.



7. Een rij vierkanten



8. Schrijf 0,26262626... als een breuk

9. Schrijf 1,1333333... als een breuk

6 taken

1. Limiet van een rij