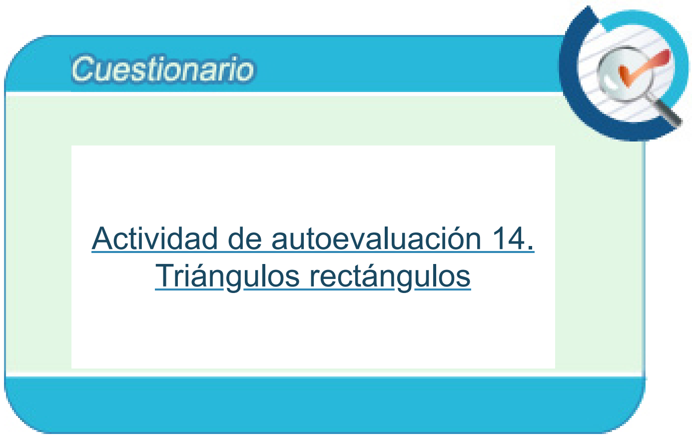
$$\tan 29.5^\circ = \frac{h}{36m}$$

$$h = 36m(0.5657)$$

$$h = 20.36m$$

3. La torre tiene una altura de 20.36*m*.

No es tan complicado ¿verdad? Te invitamos a resolver la siguiente autoevaluación en la que pondrás en práctica lo que has aprendido sobre resolución de triángulos rectángulos.



Ya que hemos visto lo relativo a los triángulos rectángulos, nos toca ver la solución de triángulos oblicuángulos.

3.3 Solución de triángulos oblicuángulos

Como habíamos visto, resolver un triángulo significa que si conocemos algunos de sus elementos podemos, a partir de éstos, determinar los restantes, así como calcular su área.

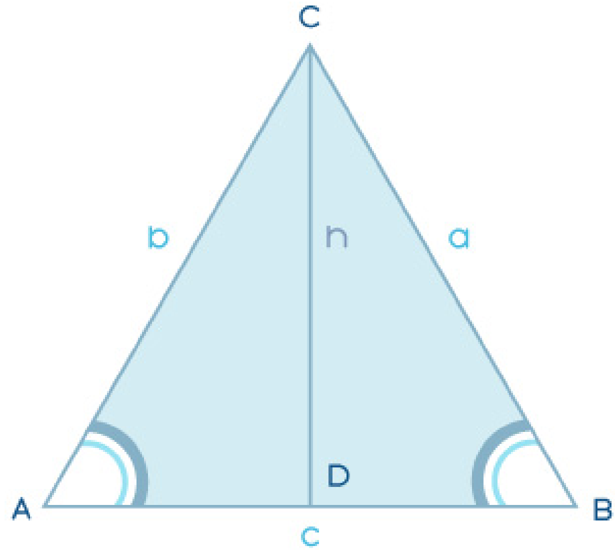
En la solución de triángulos oblicuángulos se pueden presentar cuatro casos:

I. Dado un lado y los ángulos adyacentes
II. Dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos
III. Dados sus tres lados
IV. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Para resolver triángulos oblicuángulos no siempre son suficientes las razones trigonométricas (porque éstas solamente las podemos definir en un triángulo rectángulo) y el Teorema de Pitágoras; existen otras relaciones que se pueden deducir de ellos: la **Ley de los senos** y la **Ley de los cosenos**.

3.3.1 Ley de los senos

A continuación te mostraremos cómo se deduce la **Ley de los senos**. Partiremos de un triángulo oblicuángulo cualquiera del cual se ha trazado su altura a partir del vértice *C* (*DC* = *h*), como se muestra en la figura:



Calculando el *sen*A y el *sen*B

$$sen\ A = \frac{h}{b} \text{ ---(1)} \qquad sen\ B = \frac{h}{a} \text{ ---(2)}$$

Si despejamos *h* de la ecuación 1 y 2 e igualando se tiene:

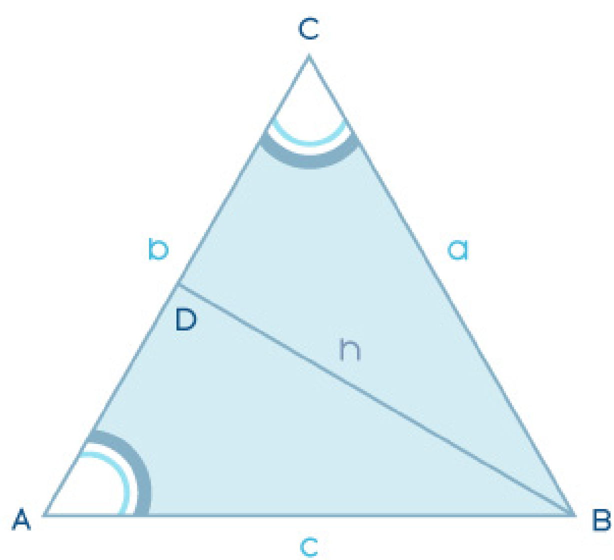
$$h = b\ senA \qquad\qquad h = a\ senB$$

$$b\ senA = a\ senB$$

De ahí:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} \text{ ---(3)}$$

Análogamente si trazamos la altura a partir del vértice *B*, como se muestra en la figura, se tiene:



$$sen\ A = \frac{h}{b} \text{ ---(4)} \qquad sen\ C = \frac{h}{a} \text{ ---(5)}$$

Al despejar *h* de la ecuación 4 y 5, e igualando se tiene:

$$h = c\ senA \qquad\qquad h = a\ senC$$
$$c\ senA = a\ senC$$

De ahí:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{c}{sen\ C} \text{ ---(6)}$$

Por lo tanto, igualando 3 y 6 obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

Este resultado se conoce como la **Ley de los senos**, que nos dice:

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

3.3.2 Ley de los cosenos

La ley de los cosenos también se deduce de las relaciones que se pueden encontrar en un triángulo oblicuángulo cualquiera. Te invitamos a que **leas-haciendo**, la deducción de la ley de los cosenos que se incluye en el siguiente archivo.

Ley de los cosenos.pdf

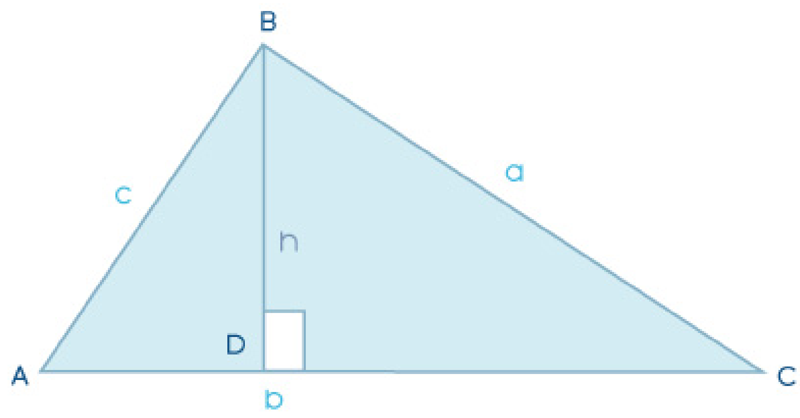
De manera general podemos afirmar que:

En todo triángulo el cuadrado de cualquier lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de esos lados por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

3.3.3 Área de un triángulo

Otro resultado interesante de la aplicación de ley de los senos y cosenos se refiere a la manera en la que podemos calcular el área de un triángulo si conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (en lugar de conocer su base y altura). Esto es importante cuando se nos pide resolver un triángulo, porque además de conocer todas las medidas de sus lados y ángulos se necesita determinar su área.



Al observar el *ΔABC*, se traza una perpendicular del vértice *B* a la base del triángulo; con ello se forman dos triángulos rectángulos. Si consideramos el *ΔABD* tenemos que:

$$sen\ A = \frac{h}{c} \quad \therefore \quad h = c\ sen\ A$$

El área de un triángulo puede determinarse de la siguiente manera:

$$A = \frac{1}{2} b\, h$$

Si sustituimos en la fórmula se tiene:

$$A = \frac{1}{2} b\, c\ sen\ A$$

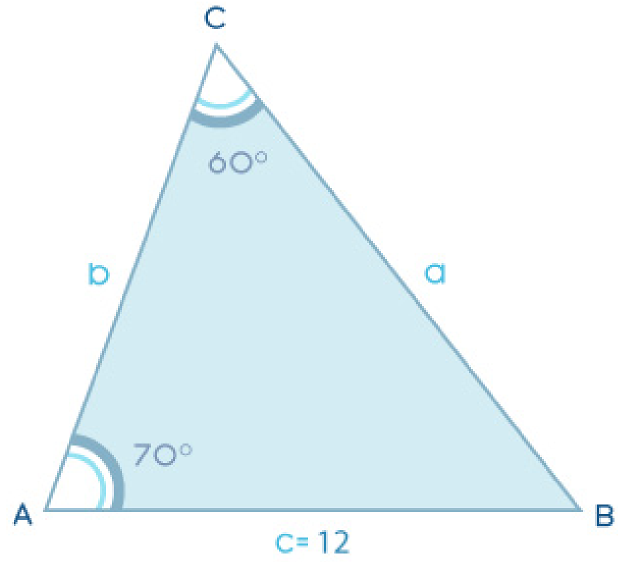
Podríamos haber utilizado cualquier otro par de lados y el ángulo entre ellos. Para cualquier *ΔABC*, el área está dada por las fórmulas siguientes:

$$A = \frac{1}{2} b\, c\ sen\ A \qquad A = \frac{1}{2} a\, c\ sen\ B \qquad A = \frac{1}{2} a\, b\ sen\ C$$

3.3.4 Ejemplos de triángulos oblicuángulos

A continuación se muestran ejemplos de cómo se resuelve un triángulo oblicuángulo.

Ejemplo 1.



De la figura podemos obtener los siguientes datos e identificar las incógnitas.

Datos	Incógnitas
$\hat{A} = 70°$	$a = ?$
$\hat{C} = 60°$	$b = ?$
$c = 12m$	$\hat{B} = ?$

Como conozco dos ángulos, puedo encontrar el tercero con el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

Al sustituir los valores de Â y Ĉ en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} 70° + \hat{B} + 60° &= 180° \\ 130° + \hat{B} &= 180° \\ \hat{B} &= 180° - 130° \\ \hat{B} &= 50° \end{aligned}$$

Para calcular el valor de ***a*** utilizamos la **ley de los senos**:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{c}{sen\ C}$$

Despejamos ***a***

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C}$$

Al sustituir los valores de *c*, *Â* y *Ĉ*

$$a = \frac{12 \text{ sen } 70}{\text{sen } 60}$$

$$a = \frac{12\,(0.9396)}{0.8660}$$

$$a = \frac{11.2752}{0.8660} \;\therefore\; a = 13.01\,u$$

Para calcular el valor de ***b*** utilizamos la **ley de los senos**:

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Despejamos ***b***

$$b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C}$$

Si sustituimos los valores de *c*, *B* y *C*

$$b = \frac{12 \text{ sen } 50}{\text{sen } 60}$$

$$b = \frac{12\,(0.7660)}{0.8660}$$

$$b = \frac{9.1925}{0.8660} \;\therefore\; b = 10.61\,u$$

Para calcular el valor del área utilizamos la siguiente expresión:

$$A = \frac{1}{2} bc \text{ sen } A$$

Al sustituir los valores de *b*, *c* y *A*, y realizando operaciones, se tiene:

$$A = \frac{1}{2}(10.61)(12)sen70$$

$$A = \frac{1}{2}(127.32)(0.9396)$$

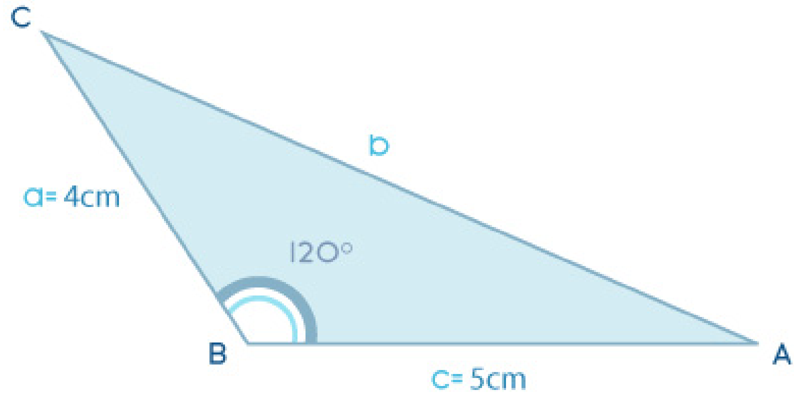
$$A = \frac{1}{2}(119.6299)$$

$$A = 59.81495u^2$$

$$A \approx 59.815u^2$$

Nota: *u* = unidades y u^2 = unidades cuadradas.

2. Resuelve el triángulo cuyos lados miden 4 y 5 *cm*; el ángulo formado por dichos lados es de 120º.



Datos	Incógnitas
a = 4*cm*	*b* = ?
c = 5*cm*	*A* = ?
B = 120º	*C* = ?

Hay que tener en cuenta que se trata de un triángulo oblicuángulo, por lo tanto no se puede utilizar el Teorema de Pitágoras.

¿Podrías usar la ley de los senos para calcular los valores faltantes? Inténtalo en tu cuaderno.

Como te habrás dado cuenta, en cada igualdad siempre tendrás dos incógnitas.

Por los datos del problema, nos damos cuenta de que conocemos **dos lados** y el **ángulo comprendido entre ellos**, por ese motivo es mejor utilizar la **Ley de los cosenos** para calcular el valor del lado *b*:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Al sustituir los valores de *a*, *c* y *B* efectuando las operaciones indicadas:

$$b^2 = (4\ cm)^2 + (5\ cm)^2 - 2(4\ cm)(5\ cm)\cos 120^\circ$$
$$b^2 = (16\ cm^2) + (25\ cm^2) - (40\ cm^2)(-0.5)$$
$$b^2 = 41cm^2 + 20cm^2$$
$$b^2 = 61cm^2$$
$$b = \sqrt{61cm^2} \quad \therefore \quad b = 7.81\ cm$$

Una vez conocido el lado *b*, se puede conocer el valor de los ángulos *A* y *C*, por la **ley de los senos**, o bien la **ley de los cosenos**. Para calcular el valor del ángulo utilizaremos la **ley de los cosenos**.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Si despejamos el *cos*A

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Al sustituir los valores de *a*, *b* y *c* efectuando las operaciones indicadas:

$$\cos A = \frac{(7.81cm)^2 + (5cm)^2 - (4cm)^2}{2(7.81cm)(5cm)}$$

$$\cos A = \frac{61cm^2 + 25cm^2 - 16cm^2}{2(7.81cm)(5cm)}$$

$$\cos A = \frac{70cm^2}{78.10cm^2}$$

$$\cos A = 0.8962$$

$$A = \cos^{-1}(0.8962) \quad \therefore \quad A = 26^\circ 19'$$

El valor del ángulo *C* se puede obtener de diferentes maneras; en esta ocasión utilizaremos la ley de los senos.

Calculamos el valor del ángulo *C* con la ley de los senos.

$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

Si despejamos *sen*C

$$b\,sen\ C = c\ Sen\ B$$

$$sen\ C = \frac{c\ senB}{b}$$

Al sustituir los valores de *b*, *c* y *B*

$$sen\ C = \frac{(5cm)\ sen120}{7.81cm}$$

$$sen\ C = \frac{(5cm)(0.8660)}{7.81cm}$$

$$sen\ C = \frac{4.3301cm}{7.81cm}$$

$$sen\ C = 0.5544$$

$$C = sen^{-1}(0.5544)$$

$$C = sen^{-1}(0.5544) \quad \therefore \quad C = 33^{o}40'$$

Para calcular el valor del área utilizamos la siguiente expresión:

$$A = \frac{1}{2}ac\ \ sen\ B$$

Si sustituimos los valores de *b*, *c* y *A*, y realizando operaciones, se tiene:

$$A = \frac{1}{2}(4cm)(5cm)\ \ sen\,(120^{o})$$

$$A = \frac{1}{2}20cm^{2}(0.8660)$$

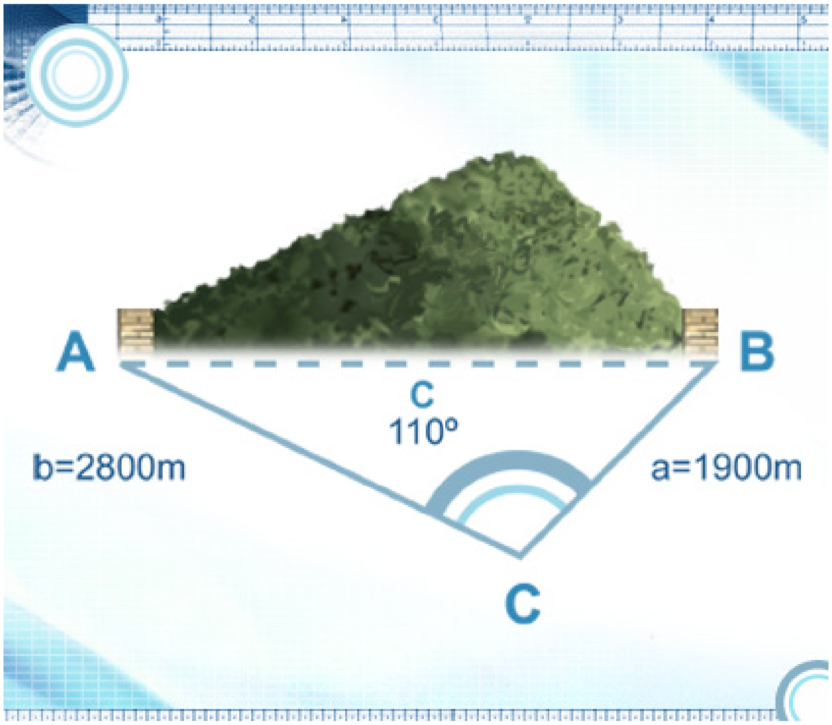
$$A = 8.66\ cm^{2}$$

Ahora veamos una aplicación práctica para los conceptos que hemos estudiado.

3.3.5 Aplicación práctica

Para medir la distancia de un túnel a través de una montaña se elige un punto *C* que se puede alcanzar desde cada extremo del túnel. Si *AC* = 2800*m*, *BC* = 1900*m* y el ángulo *C* = 110º, determina la longitud del túnel.

Del enunciado del problema, podemos identificar:



Datos	Incógnitas
a = 1900m	c = ?
b = 2800m	
C = 110º	

Para determinar la longitud del túnel utilizamos la ley de los cosenos.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Al sustituir los valores a, b y C

$$c^2 = (1900m)^2 + (2800m)^2 - 2(1900m)(2800m) \cos 110º$$
$$c^2 = 3610000m^2 + 7840000m^2 - (10640000m^2)(-0.3420)$$
$$c^2 = 11450000m^2 + 3639094.3249m^2$$
$$c^2 = 15089094.3249m^2$$
$$c = 3884.46m$$

¿Te das cuenta de cómo no es tan difícil?

A continuación realiza la actividad **Solución de triángulos** en la cual pondrás en práctica los conocimientos que has adquirido.