Taak: Exponentiële en logaritmische functies

Virga Jessecollege — **Toets WISKUNDE**

Hasselt — **leerkracht: Karel Appeltans**

Datum: — **schooljaar**

Klas: VI — **Studierichting:**

Naam:.. — **Aantal uren wiskunde: 6**

1	1. Soit la fonction f de R^+ dans R définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x(\ln x)^2$ si $x > 0$. Soit C la courbe déquation $y = f(x)$. a) Vérifer que la fonction f est continue en 0. b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$; préciser les domaines de définition de f' et f''. c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C au point d'abscisse e. d) Etablir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant • les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale et $e \approx 2,72$) • les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$ • les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f • les points d'inflexion de C et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C. e) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du d)
2	4. The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given by $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+3x)}{2x} & \text{if } x > 0; \\ ax + b & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$ a) For which values of a and b is $f(x)$ continuous in 0? b) For which values of a and b is $f(x)$ differentiable in 0?
3	De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = e^{\lvert x-2 \rvert}$ bereikt in het punt $(a, f(a))$ een absoluut minimum. Bepaal $f(a)$. (A) $f(a) = 0$ (B) $f(a) = 1$ (C) $f(a) = e$ (D) $f(a) = e^2$

<table>
<tr><td>4</td><td>
On considère la fonction f définie sur $\left]-2;1\right[$ par $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$.
a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f.
c) Déterminer le sens de variation de la fonction f.
d) Tracer sa courbe représentative.
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = (2x+1)\ e^{-2x}$$
et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
b) Déterminer une équation cartésienne
• de la tangente à C au point d'abscisse 0.
• des asymptotes (éventuelles) de C.
c) Etablir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant
• les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
• les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
• les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f.
• les points d'inflexion, les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f.
d) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du c)
e) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par
$$g(x) = f(|x|).$$
</td></tr>
</table>

6	3. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $$f(x) = \ln(x^2 - x + 1).$$ et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f) (a) Justifier que le domaine de f est bien $\mathbb{R}$. (b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. (c) Déterminer une équation cartésienne – de la tangente à C au point d'abscisse 1 – des asymptotes (éventuelles) de C. (d) Etablir le tableau des variations de f,f' et f'' contenant – les racines de f,f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale) Indication numérique : $\ln 2 \simeq 0{,}7$ et $\ln 3 \simeq 1{,}1$ – les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$ – les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f – les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f. (e) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du 3d. (f) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $$g(x) = \|f(\|x\|)\|.$$
7	1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$. a) Que vaut la limite de f • lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier. • lorsque x tend vers 1 par valeurs > 1 ? Justifier. b) Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de cette dérivée première. c) Calculer $f''(x)$ et étudier le signe de cette dérivée seconde. d) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de points de minimum? de points d'inflexion? Justifier et calculer leurs coordonnées. e) Esquisser le graphe de f, en indiquant les différents points qui apparaissent dans les réponses aux questions précédentes.

8	1. Soit la fonction f de R^+ dans R définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x(\ln x)^2$ si $x > 0$. Soit C la courbe déquation $y = f(x)$. a) Vérifer que la fonction f est continue en 0. b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$; préciser les domaines de définition de f' et f''. c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C au point d'abscisse e. d) Etablir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant • les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale et $e \approx 2,72$) • les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$ • les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f • les points d'inflexion de C et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C. e) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du d)
9	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$ 1) Pourquoi les droites d et Δ d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}_f$? 2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f. 3) Tracer d, Δ et $\mathscr{C}_f$ 4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.
10	**Soit $f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x+1}$** **a) Déterminer le domaine de définition de la fonction réelle f** **b) Déterminer les asymptotes de la courbe C d'équation $y = f(x)$ et préciser leur nature.** **c) Déterminer les zéros de f.** **d) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.** **e) Déterminer les points de minimum et les points de maximum de f** **f) Esquisser le graphe C de la fonction f.** **g) C admet-il un centre de symétrie ? Justifier.**
11	1. Soit la fonction f de R dans R définie par $f(x) = (x+1)^2\, e^{-x}$. Soit C la courbe déquation $y = f(x)$. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$; préciser les domaines de définition de f' et f''. b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C au point d'abscisse 1. c) Etablir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant • les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale) • les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$ • les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f • les points d'inflexion de C et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C. d) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du c)

12	3. Soient la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $$f(x) = x\, e^{-x^2}$$ et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$ ($\mathcal{C}$ est le graphe de f). (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ (b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 (c) Etablir le tableau des variations de f,f' et f'' contenant – les racines de f , f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale) – les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$ – les extréma de f, les domaines de croissance et de décroissance de f – les points d'inflexion de f et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f (d) Tracer soigneusement la courbe $\mathcal{C}$ d'après les résultats du 3c. (e) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction g (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) définie par $$g(x) = f(\|x\|)$$
13	3. Etudiez la fonction : $$y = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$$ (a) donnez le domaine de définition et les caractéristiques générales (parité, périodicité, etc ...) (b) recherchez les points remarquables et donnez leur nature (c) tracez un graphe soigné de la courbe en y indiquant les éléments précédemment trouvés.

14	(a) Let $$f(x) = \frac{-2}{1+e^{4x}}.$$ i. Find all asymptotes of the graph of $f(x)$. ii. Determine the interval on which $f(x)$ is decreasing. iii. Determine the interval on which $f(x)$ is increasing. iv. Find all point(s) of inflection for the graph of $f(x)$. v. Sketch the graph of $f(x)$.
15	Consider the function $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ defined by $$f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x}\right).$$ a) Prove that f is one-to-one. b) Calculate the inverse function $f^{-1}(x)$ and specify its domain.
16	The function $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ is defined by $$f(x) = x^2 - 2x^2 \ln x.$$ a) Calculate $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ and $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. b) Find the extreme values of f and classify them as local or absolute. c) Calculate the inflection point(s) of the curve $y = f(x)$.
17	. Consider the function $f : (0, e] \to \mathbb{R}$ defined by $$f(x) = x^2 \ln(x).$$ a) Find the absolute extreme values of f on $(0, e]$. b) Calculate the inflection point(s) of the curve $y = f(x)$ on $(0, e)$.

18	De functie $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}.$$ a) Bepaal het maximum en het minimum van f op $[-1, 2]$. b) Bepaal het buigpunt van de grafiek van f op $[-1, 2]$.
19	3. Gegeven is de functie $f : D_f \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \ln(6 + x - x^2)$. a) Wat is het natuurlijke domein D_f van f? [Dus: bepaal alle x waarvoor het gegeven functievoorschrift betekenis heeft.] b) Bepaal de extreme waarde(n) van f op D_f. c) We beperken ons nu tot het open interval $(1, 2)$. Toon aan dat f hier een inverse functie f^{-1} heeft en bepaal het functievoorschrift van $f^{-1}(x)$.
20	1. De functie $f : D_f \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $$f(x) = \ln(2x - x^2).$$ a) Wat is het domein van f? [Dus: bepaal alle x waarvoor de gegeven formule betekenis heeft.] b) Bepaal de extreme waarde(n) van f op het in a) bedoelde interval.
21	24. Let $y = -2\ln(x^2 + 3) + 8$ a) Find all the intercepts. b) Find all the critical points and classify each as a local maximum, minimum, or neither. c) Find all the inflection points.
22	10. Consider the function $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$. Which of the following are true? (a) f has a horizontal asymptote. (b) f has two critical points. (c) f has a point of inflection. (d) f has a vertical asymptote. (e) (b), (c), and (d) (f) (a), (c), and (d) (g) (a),(b), (c), and (d)

23	8) Consider the function: $f(x) = \ln\left(\frac{x^4}{x-1}\right)$ a) Determine the domain of f. b) Find the intervals in which f increases or decreases. c) Find the extreme values. d) Determine the concavity of the graph, and find the inflection points. e) Sketch the graph specifying the asymptotes, if any.
24	Let $f(x) = \dfrac{1}{(1+e^x)^2}$. Bepaal het verloop
25	$f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$ Bepaal het verloop
26	$f(x) = \log(2^x + 1)$ Bepaal het verloop
27	f(x)= $\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 12\right) e^x$ Bepaal het verloop