Teoría – Tema 9

Teoría - 11 - Posición relativa de una recta y un plano

Posición relativa de una recta y un plano

Si la recta y el plano se cortan en un punto, diremos que la recta es secante al plano.

Otra opción es que la recta esté contenida en el propio plano, por lo que ambos tendrán infinitos puntos en común.

Finalmente, la recta y el plano pueden ser paralelos, por lo que no tendrán ningún punto en común.

Cada caso lo vamos a estudiar siguiendo dos procedimientos.

Procedimiento 1. Si la recta viene dada como corte de dos planos, estudiaremos rangos de matrices.

$$r:\left\{\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right\}$$

$$\Pi: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

Sus matrices asociadas son:

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \rightarrow M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{array}\right)$$

- Si $rango(M)=rango(M/D)=3=número\ de\ incógnitas$ → Solución única → Sistema compatible determinado → La recta y el plano se cortan en un único punto → La recta es secante al plano.
- Si $rango(M)=rango(M/D)=2<3=número\ de\ incógnitas$ → Infinitas soluciones → Sistema compatible indeterminado → La recta está contenida en el plano.
- Si $rango(M)=2\neq 3=rango(M/D)$ → No existe solución → Sistema incompatible La recta y el plano no se cortan en ningún punto → La recta es paralela al plano.

Procedimiento 2. Si la recta viene dada en paramétricas, sustituiremos los valores de las incógnitas x, y, z en la ecuación general del plano.

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda \cdot u_x \\ y = y_0 + \lambda \cdot u_y \\ z = z_0 + \lambda \cdot u_z \end{array} \right\}$$

$$\Pi : A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

En la ecuación del plano llevamos las tres ecuaciones paramétricas de la recta. Operando, tendremos un término que acompaña al parámetro λ y otro término que no lo acompaña.

$$(A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D) + (A\,u_x + B\,u_y + C\,u_z)\lambda = 0$$

- Si $(A\,u_x + B\,u_y + C\,u_z) \neq 0$ → Podremos despejar λ → Obtendremos en la tres ecuaciones paramétricas de la recta un valor para cada incógnita x, y, z → Tendremos un punto solución → La recta es secante al plano.
- Si $(A\,u_x + B\,u_y + C\,u_z) = 0$ y $(A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D) \neq 0$ → Llegaríamos a un absurdo matemático del tipo → El sistema no tendría solución → La recta es paralela al plano.
- Si $(A\,u_x + B\,u_y + C\,u_z) = 0$ y $(A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D) = 0$ → Llegamos a la conclusión $0 = 0$ independientemente del valor del parámetro λ → Infinitos puntos solución → La recta está contenida en el plano.

Ejemplos con el procedimiento de rangos

Si la recta viene dada como corte de dos planos, estudiaremos rangos de matrices.

$$r:\begin{Bmatrix} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0 \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{Bmatrix}$$

$$\Pi: A_3 x+B_3 y+C_3 z+D_3=0$$

Ejemplo 1 resuelto

¿Posición relativa del plano $\Pi: 3x-2y+z-k=0$ y la recta $r:\begin{Bmatrix} x-2y+z=0 \\ 5x-3y+2z-1=0 \end{Bmatrix}$ en función del valor de k ?

La matriz del sistema formado por las dos ecuaciones de la recta y la ecuación del plano es:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |M|=-3-12-10-(-9-4-10)=-3\neq 0 \quad \rightarrow \quad Rango(M)=3$$

Por lo tanto estamos ante un sistema compatible determinado → Solución única → La recta es secante al plano independientemente del valor de k .

Podemos obtener el punto de corte resolviendo por Cramer o por el método que queramos.

Recuerda que **si solo nos preguntan estudiar la posición relativa, no es necesario obtener la solución final**. Con indicar que la recta es secante al plano, es suficiente.

Ejemplo 2 resuelto

¿Posición relativa del plano $\Pi: 3x-y+kz-2=0$ y la recta $r:\begin{Bmatrix} x-2y+z=0 \\ 5x-3y+2z-1=0 \end{Bmatrix}$ en función del valor de k ?

La matriz del sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano, y la matriz ampliada, son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix} \quad , \quad M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & k & 2 \end{array}\right)$$

$$|M|=-3k-12-5-(-9-2-10k)=0 \quad \rightarrow \quad 7k-6=0 \quad \rightarrow \quad k=\frac{6}{7}$$

Discusión de casos:

- Si $k\neq\frac{6}{7}$ → $rango(M)=rango(M/D)=3$ → Sistema compatible determinado → Solución única → La recta corta al plano en un punto (que podríamos obtener aplicando, por ejemplo, la regla de Cramer).

- Si $k=\frac{6}{7}$ → $rango(M)=2$ → Estudiamos el rango de la matriz ampliada y encontramos un menor de orden 3 no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=9\neq 0$ → $rango(M/D)=3$. Por lo tanto si $rango(M)=2\neq 3=rango(M/D)$ → Sistema incompatible → La recta es paralela al plano.

Ejemplos con el procedimiento de sustituir en la ecuación general del plano

Si la recta viene dada en paramétricas, sustituiremos los valores x, y, z en la ecuación general del plano.

$$r:\begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \\ z=z_0+\lambda\cdot u_z \end{Bmatrix}$$

$$\Pi: A\,x+B\,y+C\,z+D=0$$

Ejemplo 3 resuelto

¿Posición relativa del plano $\Pi: 2x-3y+z-2=0$ y la recta $r:\begin{Bmatrix} x=1+2t \\ y=3t \\ z=2+5t \end{Bmatrix}$?

Llevamos los valores x, y, z a la ecuación general del plano.

$2(1+2\cdot t)-3(3\cdot t)+(2+5\cdot t)-2=0 \ \rightarrow \ 2=0$ → Absurdo matemático → La recta es paralela al plano al no tener puntos en común.

Ejemplo 4 resuelto

¿Posición relativa del plano $\Pi: 2x-3y+z-2=0$ y la recta $r:\begin{Bmatrix} x=1-2t \\ y=-3t \\ z=2+5t \end{Bmatrix}$?

Llevamos los valores x, y, z a la ecuación general del plano.

$2(1-2\cdot t)-3(-3\cdot t)+(2+5\cdot t)-2=0 \ \rightarrow \ 10t+2=0 \ \rightarrow \ t=\frac{-1}{5}$ → Podemos obtener el punto solución.

$\begin{Bmatrix} x=1-2(\frac{-1}{5})=\frac{7}{5} \\ y=-3(\frac{-1}{5})=\frac{3}{5} \\ z=2+5(\frac{-1}{5})=1 \end{Bmatrix}$ → Solución única → La recta es secante al plano.