TEORÍA Y EJERCICIOS DEL TP N°1

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

CONSTRUCCIONES DE TRIÁNGULOS

INTRODUCCIÓN

La geometría del triángulo es una fuente inagotable de problemas geométricos que se prestan mucho para interesar a los alumnos y ejercitar el ingenio y el razonamiento. Se pueden graduar los niveles de dificultad, desde los apropiados para los distintos años de la escuela media, hasta los que se pueden proponer en los cursos del profesorado. Existen problemas en apariencia simples y que, sin embargo, no se pueden resolver con regla y compás (por ejemplo construir un triángulo dadas las tres bisectrices), lo que puede servir como motivación para estudiar el método algebraico para decidir si un problema es resoluble o no con regla y compás.

Unos primeros cálculos interesantes son los que conducen a los valores de las alturas h_a, las medianas m_a, las bisectrices w_a, el radio del círculo inscripto r y del circunscripto R, y el área del triángulo. Poniendo $2p = a + b + c$ (a, b, c son las longitudes de los lados), deducir las fórmulas

$$h_a = (2/a)\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ , \quad m_a = \sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{2}}\ ,$$

$$w_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

$$r = T/p = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)/p}\ , \qquad R = \frac{abc}{4T}$$

siendo T el área del triángulo, dada por la formula de HERON (siglo -II)

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ,$$

Esta fórmula se puede deducir de las $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$, $\text{sen}^2 A = 1 - (b^2 + c^2 - a^2)/4b^2c^2$, $T = (1/2)bc \text{ sen } A$,

Otra expresión del área T es

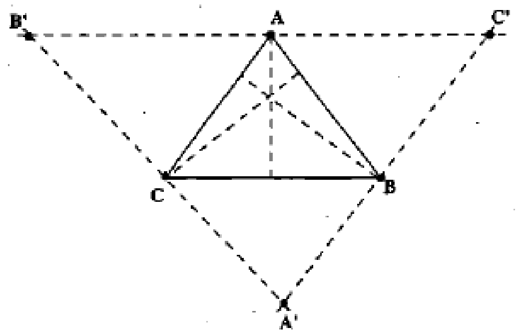
$$-16\,T^2 = \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

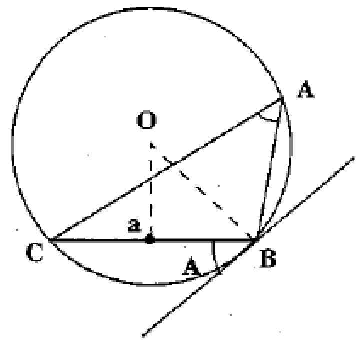
Algunas deducciones de las fórmulas son muy complicadas y otras una tontera (se las dejamos a los que están con tiempo) PERO LOS INVITO A MIRAR LA DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE HERÓN

https://youtu.be/6c_VZQhIwCk

Y para conocer algo de la biografía de Herón y alguna otra deducción (sólo para curiosos)
https://www.matesfacil.com/matematicos/Heron/Heron-de-Alejandria-formula-area-triangulo-metodo-aproximar-raiz-cuadrada-demostracion.html

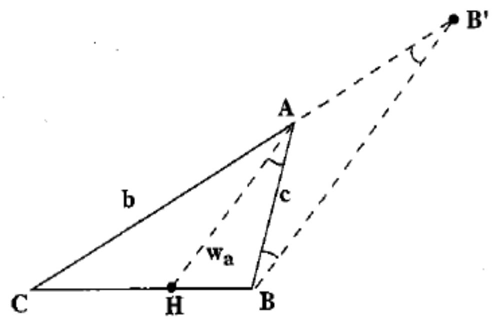
Es también conveniente recordar que las tres bisectrices, las tres mediatrices, las tres medianas y las tres alturas de un triángulo concurren, respectivamente, en el centro del círculo inscripto, circunscrito, baricentro y ortocentro del triángulo. ~~Los dos primeros casos son inmediatos y el caso de las medianas ya lo consideramos como aplicación de las transformaciones afines~~. Para las alturas basta observar que ellas son las mediatrices del triángulo A'B'C' construido trazando por cada vértice las paralelas al lado opuesto.





MUCHA ATENCIÓN CON ESTA PROPIEDAD:

HB/HC = c/b (por la semejanza de los triángulos ACH y B' C B, siendo AB' = AB = c.



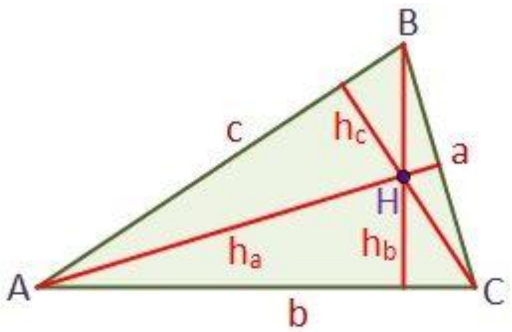
YA RECORDAMOS LO QUE ES UN ARCO CAPAZ AHORA ESTUDIAREMOS LAS CEVIANAS.

También hay que recordar el **arco capaz** de un ángulo A respecto de un segmento **a**, como lugar geométrico de los puntos desde los cuales el segmento se ve bajo el ángulo **A**. Es un arco de circunferencia que pasa por los extremos del segmento y cuya construcción es inmediata considerando la figura adjunta.

Otro teorema importante de la geometría del triángulo es que cada bisectriz, sea w_a, determina sobre el lado opuesto CB un punto H tal que

Los triángulos tienen unos segmentos (también llamados **cevianas**) y puntos que determinan una serie de elementos importantes.

Altura de un triángulo



La altura de un triángulo es el segmento perpendicular a un lado que va desde el vértice opuesto a este lado (o a su prolongación). También puede entenderse como la distancia de un lado al vértice opuesto.

Hay tres alturas (h_a, h_b y h_c), según a que lado está asociada dicha altura. A partir de la fórmula de Herón, conociendo los tres lados (*a*, *b* y *c*), se pueden hallar las tres alturas:

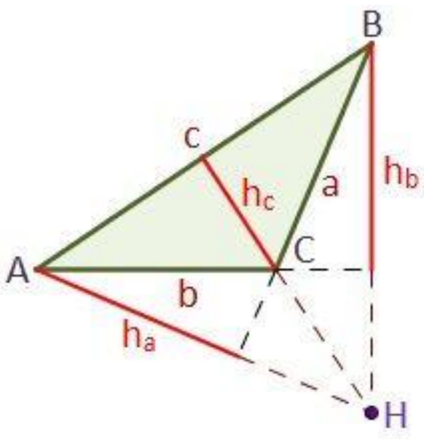
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

siendo a, b y c los tres lados del triángulo y s el semiperímetro

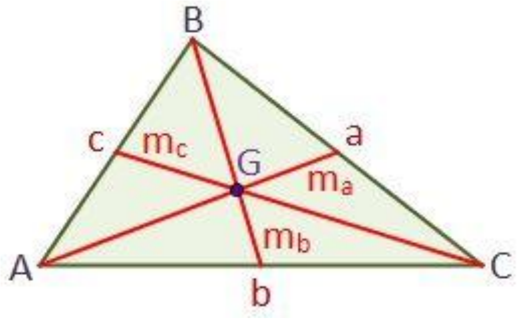
$$s = \frac{a+b+c}{2}$$



Las tres alturas del triángulo (o sus prolongaciones) se cortan en un punto llamado ortocentro (*H*).

Las alturas podrían estar en el exterior del triángulo, en el caso de que sea un triángulo obtusángulo. El ortocentro también será exterior en los triángulos obtusángulos. En los rectángulos coincidirá con el vértice del ángulo recto. En los acutángulos, será un punto interior.

Mediana de un triángulo



La mediana de un triángulo es el segmento que une uno de sus vértices con el centro del lado opuesto.

Hay tres medianas (m_a, m_b y m_c), según de que vértice parta ésta. La longitud de las medianas se calcula a partir del teorema de la mediana:

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$$

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}$$

Las tres medianas de un triángulo confluyen en un punto llamado baricentro o centroide (*G*).

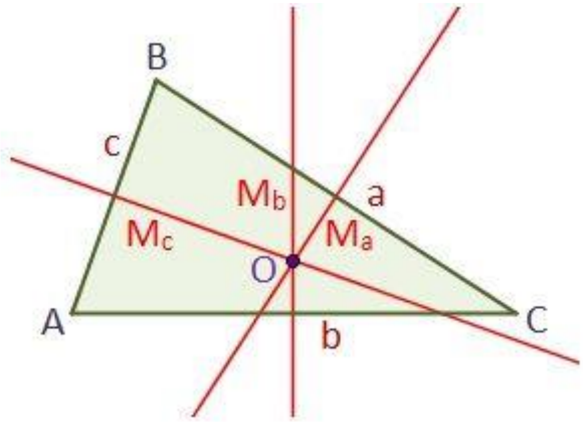
En cualquier mediana, la distancia entre el baricentro (o centroide) *G* y el centro de su lado correspondiente es 1/3 de la longitud de dicha mediana.

En física, el baricentro (G) sería el centro de gravedad del triángulo.

Propiedad de las medianas de un triángulo

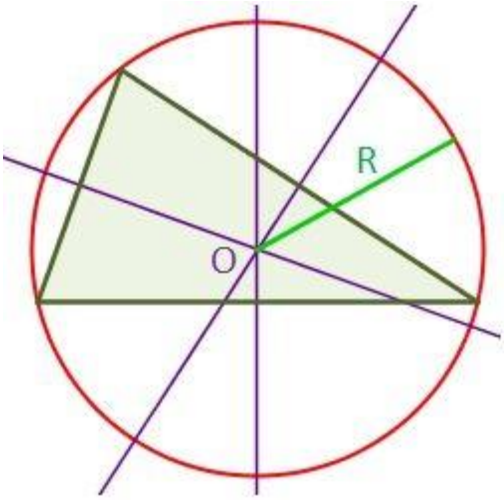
https://www.geogebra.org/m/B2JAzwG6

Mediatriz de un triángulo



La mediatriz de un triángulo es la mediatriz asociada a uno de sus lados, es decir, la recta perpendicular a dicho lado que pasa por el punto medio (o centro) de éste.

La mediatriz de un segmento es una recta, lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de dicho segmento.



Existen tres mediatrices en un triángulo (M_a, M_b y M_c), según el lado del triángulo al que se refieren (*a*, *b* o *c*).

Las tres mediatrices de un triángulo confluyen en un punto llamado circuncentro.

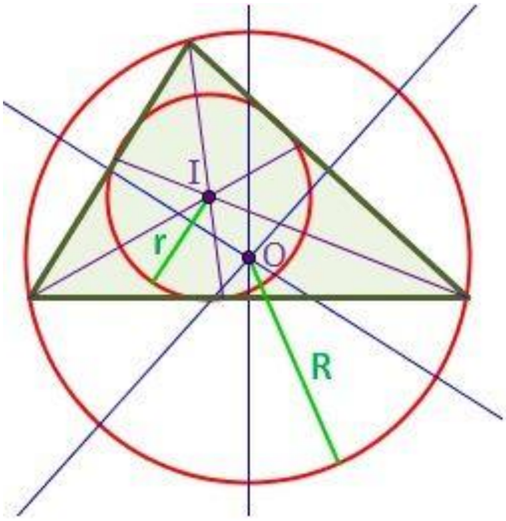
El circuncentro (*O*) es el centro de la circunferencia circunscrita en el triángulo, ya que equidista de sus tres vértices.

El radio (*R*) de la circunferencia circunscrita se halla mediante la fórmula:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

siendo a, b y c los tres lados del triángulo y s el semiperímetro

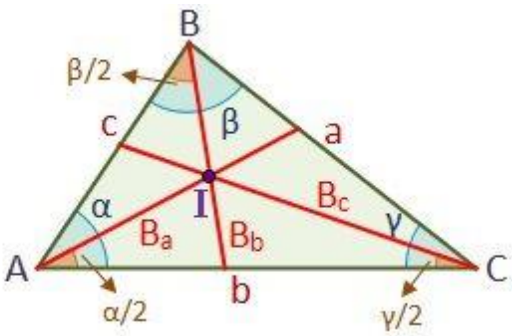
$$s = \frac{a+b+c}{2}$$



La relación entre el radio *R* del circuncentro *O* (mediante las mediatrices) y el radio *r* del incentro *I* (mediante las bisectrices) es:

$$R \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4s}$$

Bisectriz de un triángulo



La bisectriz de un triángulo es el segmento que, dividiendo uno de sus tres ángulos en dos partes iguales, termina en el correspondiente lado opuesto.

Existen tres bisectrices (B_a, B_b y B_c), según el ángulo en el que empieza. La longitud de las bisectrices se calculan con la fórmula:

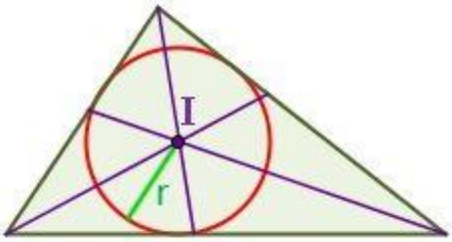
$$B_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{b \cdot c \cdot s(s-a)}$$

$$B_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{a \cdot c \cdot s(s-b)}$$

$$B_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{a \cdot b \cdot s(s-c)}$$

siendo a, b y c los tres lados del triángulo y s el semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$

Las tres bisectrices de un triángulo confluyen en un punto llamado incentro (*I*). Éste siempre es un punto interior de cualquier triángulo.



El incentro (*I*) es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

El radio de la circunferencia inscrita se halla mediante la fórmula:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

siendo a, b y c los tres lados del triángulo y s el semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$

EJERCICIOS

1) A partir de un triángulo cualquiera construyan las bisectrices, medianas, alturas y mediatrices, utilizando algunas herramientas del GG y también probando sin utilizarlas. Observen que al mover el triángulo deben conservar las propiedades de los trazados (recuerden que construimos, no dibujamos).

2) Sea un triángulo con los tres lados conocidos, siendo estos a = 4,5 cm, b = 4 cm y c = 3 cm.

¿Cuáles serán sus alturas h_a, h_b y h_c? Construyan y calculen. Verifiquen en el GG.

3) Sea un triángulo de lados conocidos, siendo estos a=2 cm, b=4 cm y c=3 cm. ¿Cuáles son sus medianas m_a, m_b y m_c? Construyan y calculen. Verifiquen en el GG.

4) a) Hallar el radio R de la circunferencia circunscrita a un triángulo de lados a = 9 cm, b = 7 cm y c = 6 cm.

b) Calcular también el radio r de la circunferencia inscrita, cuyo centro es el incentro, punto de intersección de las bisectrices.

5) Sea un triángulo con los tres lados conocidos, siendo estos a = 4 cm, b = 3 cm y c = 2 cm.

a) ¿Cuáles son sus bisectrices B_a, B_b y B_c?.

b) ¿Cuál será el radio de la circunferencia inscrita al triángulo trazada desde el incentro?

DESAFIO:

Investiguen el ***teorema de Viviani*** y realicen una construcción en el software GG para su *verificación*.

VIDEO DE Eduardo Saenz Cabezón.

https://youtu.be/e6y4bfVcVXU

Para los intrépidos que utilicen el GG3D comprobar si el teorema es válido en un tetraedro.

PARA CURIOSOS

- Medianas y Baricentro
- Concurrencia de las medianas
- Triángulo formado por las medianas
- Triángulos isósceles mellizos
- Mediatrices y Circuncentro
- Concurrencia de las mediatrices
- Alturas y Ortocentro
- Concurrencia de las alturas

CURIOSIDADES

Triángulo formado por tres cevianas (Teorema de Routh)

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/Triangulo_Cevianas_pqr.html