Θ. Ζαχαριάδης «Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού»
Δ. Πόταρη – Ειδικά Θέματα Διδακτικής – «Έρευνα στη Δ.τ.Μ και διδακτική πράξη»

Έρευνα στη διδασκαλία και μάθηση της έννοιας της συνάρτησης

Επιλογές από διαλέξεις στα αντίστοιχα μαθήματα

Βιβλιογραφία

- Eisengerg (1991). Functions and Associated Learning Difficulties. In D. Tall (ed.) Advanced Mathematical Thinking, Kluwer.

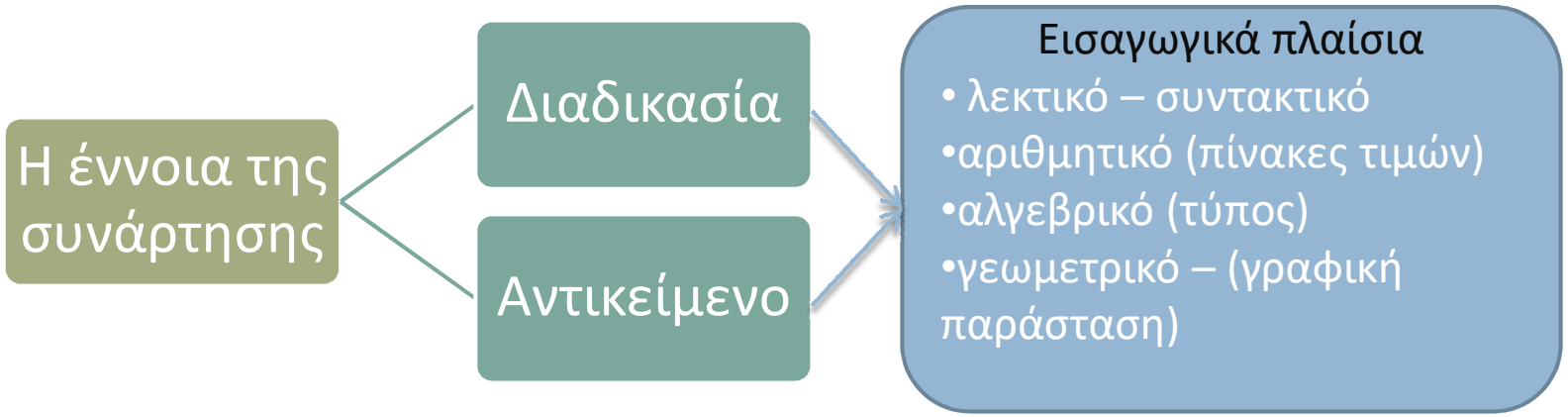
Μια σύντομη ιστορική αναδρομή

- Η έννοια της συνάρτησης προτείνεται ως βασική στο αναλυτικό πρόγραμμα με την κίνηση των μοντέρνων μαθηματικών.
- Ο ορισμός της συνάρτησης εισάγεται σε μια ποικιλία πλαισίων . Για παράδειγμα:
  - Διαγράμματα
  - Πίνακες
  - Αλγεβρική περιγραφή
  - Κουτί εισόδου- εξόδου
  - Διατεταγμένα ζεύγη
- Τα διατεταγμένα ζεύγη είναι παιδαγωγικά η ασθενέστερη

- Η επιλογή του ενός ορισμού και η εξοικείωση των μαθητών δεν σημαίνει αυτόματα «μεταφορά» εμπειρίας στα άλλα πλαίσια
- Ακόμα και προσπάθειες παράλληλης αντιμετώπισης δεν φαίνεται να φέρνουν αποτελέσματα.

Συμβολισμός και σύνθετο εννοιολογικό πλαίσιο

- Ο συμβολισμός της συνάρτησης προκαλεί δυσκολίες
  - f(x) αναπαριστά το όνομα της συνάρτησης και την τιμή της συνάρτησης
  - Η ερμηνεία εξαρτάται από το πλαίσιο άρα αυτό προκαλεί δυσκολίες (βλ.επόμενη διαφάνεια)
- Η έννοια της συνάρτησης περιλαμβάνει διάφορες εννοιακές εικόνες (concept images) (procept (process & concept), symbol)



Η ερμηνεία εξαρτάται από το πλαίσιο άρα αυτό προκαλεί δυσκολίες

Εξετάστε αν οι παρακάτω σχέσεις μπορούν να ορίσουν συναρτήσεις.
Δικαιολογήστε τις αρνητικές σας απαντήσεις.
Σε όσες νομίζετε ότι ορίζουν συνάρτηση δώστε κατάλληλο πεδίο ορισμού, για το σύμβολο που θα θεωρήσετε ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
Αν υπάρχουν σταθερές συναρτήσεις, σημειώστε τις με [c].

Από έρευνα σε πρωτοετείς φοιτητές Μαθηματικού Τμήματος

$y = x^2$	Σωστό 91%, Λάθος 9%
$f(x) = 3$	Σωστό 94%, Λάθος 6%
$x^2 + y^2 = 3$	Σωστό 69%, Λάθος 28%, Δε γνωρίζω4%
$s = 3t$	Σωστό 76%, Λάθος 24%
$\alpha^2 - \beta = 0$	Σωστό 65%, Λάθος 26%, Δε γνωρίζω 9%
$x^4 = 3y$	Σωστό 67%, Λάθος 22%, Δε γνωρίζω 11%
$\alpha = \sqrt{2}$	Σωστό 81%, Λάθος 13%, Δε γνωρίζω 6%
$f(y) = e^y$	Σωστό 67%, Λάθος 28%, Δε γνωρίζω 6%

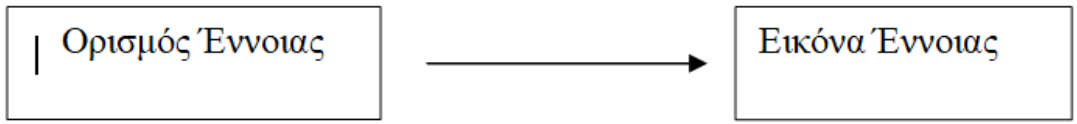
Σε όλα τα ερωτήματα απαντά σωστά το 22%

Η έννοια της μεταβλητής

- Η αλλαγή του συμβόλου της μεταβλητής σήμαινε για τους μαθητές άλλο μαθηματικό αντικείμενο (π.χ στην επίλυση μιας εξίσωσης)
- Μια ερμηνεία του φαινομένου είναι η διαφορά ανάμεσα στην έννοια και στην εννοιακή εικόνα (βλ επόμενες 2 διαφάνειες.

Έννοια και εννοιακή εικόνα
(concept image – concept definition) 1

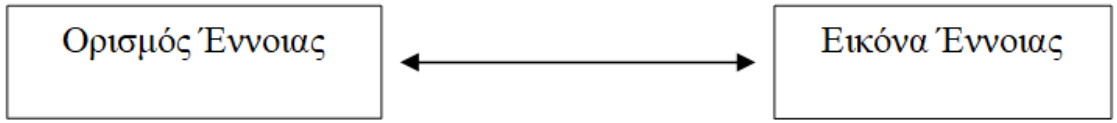
- Ο Vinner (1991) στην προσπάθεια του να περιγράψει τον τρόπο που συνδέονται ο ορισμός μιας έννοιας με την εικόνα της έννοιας, απομόνωσε τον ορισμό από τα υπόλοιπα συστατικά της εικόνας και θεώρησε την ύπαρξη δύο διαφορετικών «κελιών» στη γνωστική δομή που έχει διαμορφώσει ένα άτομο για την έννοια.
- Το ένα κελί αφορά στον *ορισμό της έννοιας* και το δεύτερο στην *εικόνα της έννοιας* (χωρίς να περιλαμβάνεται σε αυτό ο ορισμός). Ένα από τα κελιά ή ακόμα και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Το κελί της **εικόνας της έννοιας** θεωρείται κενό, εφ' όσον δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. **Αυτό μπορεί να συμβεί στις περιπτώσεις που απλά απομνημονεύεται ο ορισμός της έννοιας**.
- Πολλοί θεωρούν ότι η εικόνα έννοιας θα διαμορφωθεί με τη βοήθεια του ορισμού έννοιας και θα ελέγχεται πλήρως από αυτόν. Δηλαδή, θεωρούν ότι τα δύο κελιά συνδέονται με μια διαδικασία μονής κατεύθυνσης για το σχηματισμό έννοιας, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Γνωστική ανάπτυξη μιας τυπικής έννοιας

Έννοια και εννοιακή εικόνα
(concept image – concept definition) 2

- Παράδειγμα για την προηγούμενη μονοσήμαντη σύνθεση: «Αν και πρέπει να υπάρχουν συστήματα συντεταγμένων με πλάγιους άξονες, εν τούτοις όταν αναφερόμαστε σε σύστημα συντεταγμένων xOy θα εννοούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα κάθετων αξόνων…»
- Μια παρόμοια διαδικασία ενδέχεται να εμφανιστεί όταν μια έννοια εισάγεται αρχικά μέσω ενός ορισμού. Εδώ, το κελί της εικόνας της έννοιας είναι κενό αρχικά. Μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις γεμίζει βαθμιαία.
- **Αλληλεπίδραση μεταξύ της έννοιας και της εννοιακής εικόνας:**



Σχήμα 2: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας & ορισμού έννοιας

- Το σχήμα 2 αναφέρεται στις μακροχρόνιες διαδικασίες του σχηματισμού μιας έννοιας μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των περιεχομένων των δύο κελιών.

Συναρτήσεις, γραφικές παραστάσεις, οπτικοποίηση

- Οι μαθητές κάνουν τη γραφική παράσταση απλών συναρτήσεων αλλά το βλέπουν ως κάτι **εξωτερικό(*)** της ίδιας της έννοιας της συνάρτησης.
- Δεν φτιάχνουν οι μαθητές συνήθως ένα διάγραμμα για μια σχέση που μελετούν
- Ιστορικά η «οπτική εικόνα» μιας συνάρτησης σε αντιπαράθεση με τον «αναλυτικό χαρακτηρισμό» συζητιόταν για εκατό χρόνια

(*) βλ. μονοσήμαντη (αντί αμφίδρομης σύνδεσης) έννοιας →εννοιακής εικόνας

- Ένας αριθμός ερευνών δείχνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν γραφικές παραστάσεις
  - Παράδειγμα με την αντίστροφη συνάρτηση (μαθητές την υπολόγιζαν αλγεβρικά και κάποιοι αιτιολογούσαν γιατί η διαδικασία ίσχυε ενώ δεν μπορούσαν να κάνουν το ίδιο γραφικά)

Αφαίρεση, συμβολισμός και άγχος

- Οι συναρτήσεις απαιτούν αφαιρετική ικανότητα
- ***Μέσα από αυτή τη διανοητική διαδικασία της μαθηματικής αφαίρεσης, μέσα από την προσπάθεια κατανόησης συμβολικών αναπαραστάσεων οι μαθητές χάνουν τη σημασία και το ενδιαφέρον***
- Πρόβλημα συμβολισμού f(x) πιο δύσκολο

  από $x \longrightarrow f(x)$

Επιστημολογικά εμπόδια και στη θεώρηση της συνάρτησης ως διαδικασίας

- «Αν 2 και 4 είναι οι τιμές του x για τις οποίες f(x) =0, ποιες είναι οι τιμές του x για τις οποίες f(4x) =0»
- (70% από πρωτοετείς μαθηματικούς δεν απάντησαν σωστά)
- Η απάντηση τους: «Μόνο οι τιμές 2 και 4 μηδενίζουν τη συνάρτηση f. Ποιες τιμές πολλαπλασιαζόμενες με το 4 θα μηδενίσουν τη συνάρτηση f;»

- Δυσκολία να δει κανείς τη συνάρτηση ως μαθηματικό αντικείμενο
- Δυσκολία να δει κανείς τη συνάρτηση και ως τελεστή και ως αντικείμενο (π.χ συνάρτηση συνάρτησης)

Επιστημολογικά εμπόδια που αφορούν στους συμβολισμούς

- Ο πολύπλοκος συμβολισμός οδηγεί στο να χαθεί το νόημα
- Επιλογή του λιγότερου πολύπλοκου και του περισσότερου διασθητικού

Επιστημολογικά εμπόδια που αφορούν στο χειρισμό του ορισμού

- Έρευνες έχουν δείξει ότι μεγάλος αριθμός μαθητών, για να ελέγξουν αν μία σχέση ορίζει συνάρτηση, χρησιμοποιούν κριτήρια που έρχονται σε αντίθεση με τον ορισμό της έννοιας, αν και οι περισσότεροι από αυτούς είναι σε θέση να τον αναπαράγουν.
- Τα κριτήρια που πολλές φορές χρησιμοποιούν, δημιουργούνται από τυπικά παραδείγματα που θεωρούνται ως πρότυπα και από συσχετισμούς του τύπου: «συνάρτηση είναι ένας τύπος με x και y» κ.α..
- Για αυτό το λόγο το ίδιο αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση ή όχι, ανάλογα με τη σημειακή του αναπαράσταση.
- Π.χ. η συνάρτηση f: R→ R με f(x)=2 για κάποιους μαθητές δεν είναι συνάρτηση γιατί η δοθείσα αλγεβρική έκφραση δεν περιέχει το x.
- Είναι όμως συνάρτηση αν δοθεί η γραφική της παράσταση που είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα yy΄.

Επιστημολογικά εμπόδια στο χειρισμό της συνάρτησης ως διαδικασία και ως αντικείμενο

- Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα των μαθητών είναι η αδυναμία συνδυασμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης και η μετάβαση από μια αναπαράσταση σε άλλη.
- Επίσης παρουσιάζεται αδυναμία στη θεώρηση της συνάρτησης όχι μόνο ως διαδικασία, αλλά και ως αντικείμενο.

