Femtegradspolynomier med fire ekstrema og med parvist identiske y-værdier.

Nogle polynomier med specifikt antal ekstremumspunkter.

Mængdekarakteristik af nogle udvalgte polynomier med specifikke antal ekstremumspunkter.

Affine transformationer af funktioner

Ved en affin transformation af en funktion $f(x)$ menes en funktion med forskrift

$K \cdot f(kx + v) + c$, hvor $K, k, v, c \in \mathbb{R}$ med $K \neq 0, k \neq 0$.

Sætning.

For en differentiabel funktion $f(x)$ antages at $f'(x_1) = f'(x_2)$ for et par $x_1, x_2 \in Dm(f)$.

Lad $g(x) = K \cdot f(kx + v) + c$ være en affin transformation af $f(x)$.

Da er $g'\left(\frac{x_1 - v}{k}\right) = g'\left(\frac{x_2 - v}{k}\right)$

Bevis.

$g'(x) = Kk \cdot f'(kx + v)$. $g'\left(\frac{x_1 - v}{k}\right) = Kk \cdot f'(x_1)$, $g'\left(\frac{x_2 - v}{k}\right) = Kk \cdot f'(x_2)$.

$\downarrow$

Affine transformationer af funktioner

Ved en affin transformation af en funktion $f(x)$ menes en funktion med forskrift

$K \cdot f(kx + v) + c$, hvor $K, k, v, c \in \mathbb{R}$ med $K \neq 0, k \neq 0$.

Sætning 7.

Femtegradspolynomier med fire ekstrema hvor y-værdierne er parvist identiske.

Mængden af femtegradspolynomier med denne egenskab er mængden af affine transformationer af femtegradspolynomiet $f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x$.

Det er også mængden af affine transformationer af stamfunktionerne til fjerdegradspolynomierne med rodsættet $\{0, 1, \sqrt[2]{5}, \sqrt[2]{5} + 1\}$.[i] [ii]

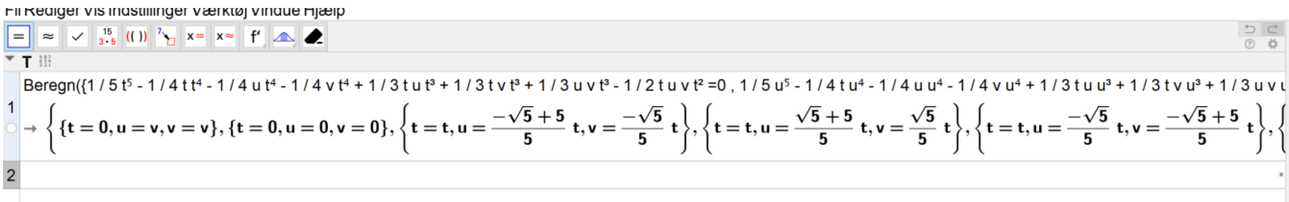
Bevis.

Løsningsmængden – og 'løsningsgenerator' rodsættet – kan findes ved at anvende GeoGebras stærke CAS-værktøj til integration og løsning af ligninger med mange led, som ellers ville være ganske besværlige at løse ved håndkraft. Men det er nok nemmere med Maple?

Pga. translation er det tilstrækkeligt at betragte $f'(x) = x(x-t)(x-u)(x-v)$ som den afledede med fire forskellige ekstrema.

1: Integration af $f'(x)$ i GeoGebra,

2: Opstilling af ligninger med $f(x)$. Sæt $f(0) = f(t)$ og $f(u) = f(v)$ og løs denne dobbeltligning i GeoGebra. Skærmklip nedenfor



3:

A: Betragt $F(x) = \int x(x-t)(x-u)(x-v)\,dx$

$$F(kx) = \int kx(kx-t)(kx-u)(kx-v)\,dx = k^4 \int x(x-\frac{t}{k})(x-\frac{u}{k})(x-\frac{v}{k})\,dx$$

Det følgende fremgår dermed af sætning 7: Hvis $(0, t, u, v)$ er et rodsæt således at y-værdierne er parvist identiske for stamfunktionerne $\int x(x-t)(x-u)(x-v)\,dx$ så er også $(0, \frac{t}{k}, \frac{u}{k}, \frac{v}{k})$ et rodsæt hvor y-værdierne er parvist identiske for stamfunktionerne $\int x(x-\frac{t}{k})(x-\frac{u}{k})(x-\frac{v}{k})\,dx$.

Betragt rodsættet i skærmklippet med formen $(t,\ \frac{\sqrt[2]{5}+5}{5}t,\ \frac{\sqrt[2]{5}}{5}t)$. Ved multiplikation med $\sqrt[2]{5}$ fås

$(t,\ \sqrt[2]{5}t,\ \sqrt[2]{5}t + t)$. Det fremgår nu at rodsættet $\{0\,, 1\,, \sqrt[2]{5}\,, \sqrt[2]{5} + \ 1\}$ også er et rodsæt som generer et femtegradspolynomium med egenskaben.

B: Betragt rodsættet i skærmklippet med formen $(t,\ \frac{-\sqrt[2]{5}+5}{5}t,\ \frac{-\sqrt[2]{5}}{5}t)$. Ved multiplikation med $\sqrt[2]{5}$ fås $(-t,\ \sqrt[2]{5}t,\ \sqrt[2]{5}t - t)$. Det fremgår igen at rodsættet $\{0\,, -1\,, \sqrt[2]{5}\,, \sqrt[2]{5} - \ 1\}$ også er et rodsæt som generer et femtegradspolynomium med egenskaben.

Translation af $\{0\,, -1\,, \sqrt[2]{5}\,, \sqrt[2]{5} - \ 1\}$med +1: $\{0+1\,, -1+1\,, \sqrt[2]{5}+1\,, \sqrt[2]{5} - \ 1 + 1\} =$ $\{0\,, 1\,, \sqrt[2]{5}\,, \sqrt[2]{5} + \ 1\}$ som er identisk med rodsættet i punkt A.

4: Betragt

$f'(x) = x(x - \ 1)(x - \ \sqrt[2]{5})(x - \ \sqrt[2]{5} - 1)$ som er dannet ud fra rodsættet $\{0\,, 1\,, \sqrt[2]{5}\,, \sqrt[2]{5} + \ 1\}$ med $t = 1$.

Ved sætning 7 følger resultatet idet rodsættet $\{0\,, t\,, \sqrt[2]{5}t\,, \sqrt[2]{5}t + \ t\}$ kan findes ved den affine tranformation $F(\frac{x}{t})$. QED.

Eksempler.[iii] [iv]

f(x)

$$\rightarrow 3\left(\frac{1}{5}(x+1)^5 + (x+1)^4\left(-\sqrt{5}+1\right) + 4\,(x+1)^3\left(-\sqrt{5}+2\right) + 4\,(x+1)^2\left(-\sqrt{5}+5\right)\right) + 2$$

Ekstremum(f(x))

$$\rightarrow \left\{\left(-3, \frac{394}{5}\right), (-1, 2), \left(2\sqrt{5}-3, \frac{394}{5}\right), \left(2\sqrt{5}-1, 2\right)\right\}$$

f(x)

$$\rightarrow \frac{1}{5}x^5 + x^4\left(-\sqrt{5}+1\right) + 4\,x^3\left(-\sqrt{5}+2\right) + 4\,x^2\left(-\sqrt{5}+5\right)$$

Ekstremum(f(x))

$$\rightarrow \left\{\left(-2, \frac{128}{5}\right), (0, 0), \left(2\sqrt{5}-2, \frac{128}{5}\right), \left(2\sqrt{5}, 0\right)\right\}$$

f(x)

$$\rightarrow \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4\left(-\sqrt{5}+1\right) + x^3\left(-\sqrt{5}+2\right) + \frac{1}{2}x^2\left(-\sqrt{5}+5\right)$$

Ekstremum(f(x))

$$\rightarrow \left\{\left(-1, \frac{4}{5}\right), (0, 0), \left(\sqrt{5}-1, \frac{4}{5}\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)\right\}$$

Bemærkning om løsningen i GeoGebras CAS:

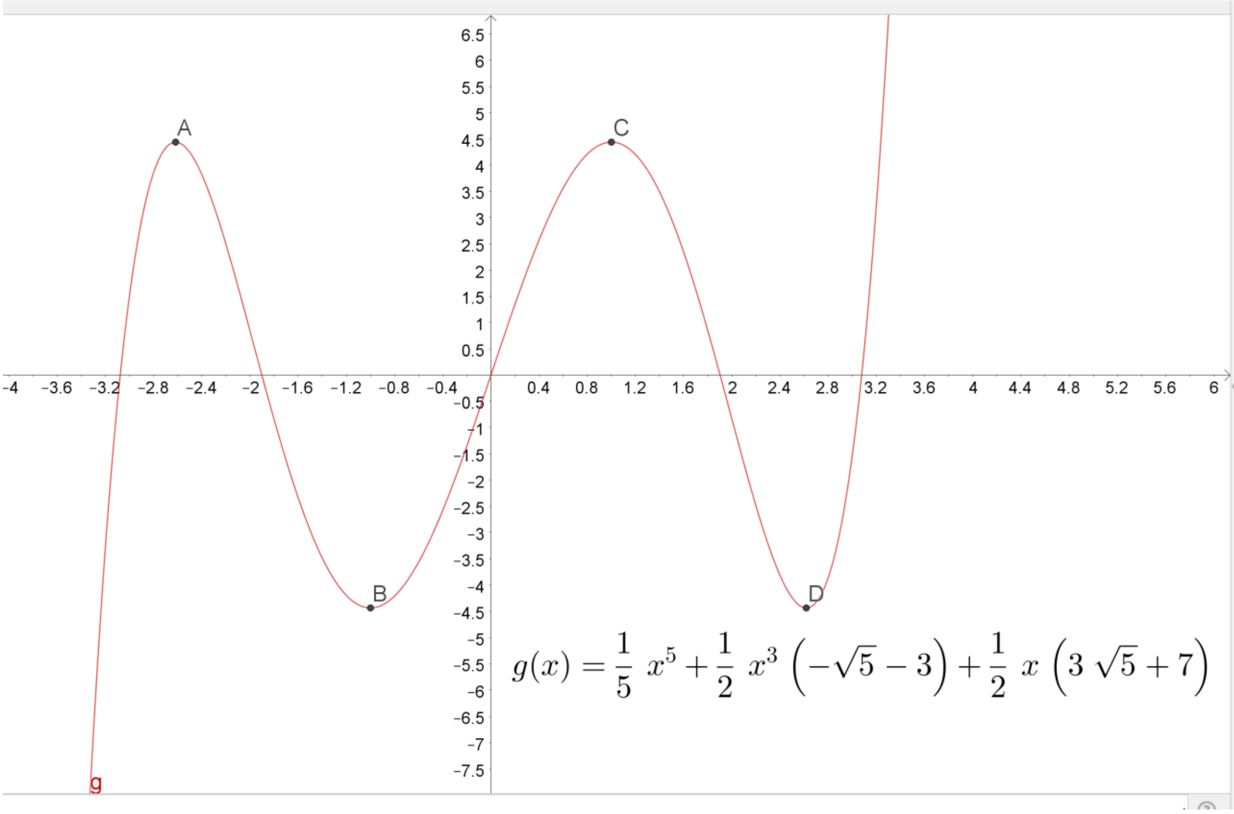
Med Words ’erstat’ funktion kan man relativt hurtigt og let opskrive ovenfor omtalte ligninger, som ellers ville meget besværlige at bearbejde med håndkraft. Jeg formoder dog at en Maple superbruger kan finde en (meget?) hurtigere fremgangsmåde hvor disse ligninger ikke er nødvendige at opskrive?

I billedet nedenfor er ligningerne opskrevet ved anvendelse af Word og GeoGebra.

$1 / 5\ t^5 - 1 / 4\ t\ t^4 - 1 / 4\ u\ t^4 - 1 / 4\ v\ t^4 + 1 / 3\ t\ u\ t^3 + 1 / 3\ t\ v\ t^3 + 1 / 3\ u\ v\ t^3 - 1 / 2\ t\ u\ v\ t^2 = 0$,

$1 / 5\ u^5 - 1 / 4\ t\ u^4 - 1 / 4\ u\ u^4 - 1 / 4\ v\ u^4 + 1 / 3\ t\ u\ u^3 + 1 / 3\ t\ v\ u^3 + 1 / 3\ u\ v\ u^3 - 1 / 2\ t\ u\ v\ u^2 =$

$1 / 5\ v^5 - 1 / 4\ t\ v^4 - 1 / 4\ u\ v^4 - 1 / 4\ v\ v^4 + 1 / 3\ t\ u\ v^3 + 1 / 3\ t\ v\ v^3 + 1 / 3\ u\ v\ v^3 - 1 / 2\ t\ u\ v\ v^2$



Forslag til elev-aktivitet: Vis ved hjælp af CAS-værktøj at de to påstande i nedenstående sætning er korrekt:

Sætning.

1: Ottendegradspolynomier med syv ekstrema hvor hhv. fire og tre y-værdier er identiske.

Affine transformationer ($F(x) \rightarrow K \cdot F(kx + v) + c$) af stamfunktionerne til syvendegradspolynomierne med følgende rodsæt

$$\left\{0\,,1\,,-1,\sqrt[2]{2+\sqrt[2]{2}}\,,-\sqrt[2]{2+\sqrt[2]{2}},\ 1+\sqrt[2]{2},-1-\sqrt[2]{2},\right\}$$

er polynomier med denne egenskab.

2: Sjettegradspolynomier med fem ekstrema hvor tre y-værdier er identiske.

Affine transformationer ($F(x) \rightarrow K \cdot F(kx + v) + c$) af stamfunktionerne til femtegradspolynomierne med rodsæt $\{0\ ,6,15,20,24\}$ er polynomier med denne egenskab.

i

```
1 / 4 t x⁴ (-sqrt(5) - 3) + 1 / 24 t² x³ (15sqrt(5) + 33) + 1 / 16 t³ x² (-7 sqrt(5) - 15) + 1 / 5 x⁵
```

5 $\rightarrow t\,x^4 \cdot \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-3\right) + t^2\,x^3 \cdot \frac{1}{8}\left(5\sqrt{5}+11\right) + t^3\,x^2 \cdot \frac{1}{16}\left(-7\sqrt{5}-15\right) + \frac{1}{5}x^5$

```
1 / 4 t x⁴ (-5^0.5 - 3) + 1 / 24 t² x³ (15*5^0.5 + 33) + 1 / 16 t³ x² (-7*5^0.5 - 15) + 1 / 5 x⁵
```

6 $\rightarrow t\,x^4 \cdot \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-3\right) + t^2\,x^3 \cdot \frac{1}{8}\left(5\sqrt{5}+11\right) + t^3\,x^2 \cdot \frac{1}{16}\left(-7\sqrt{5}-15\right) + \frac{1}{5}x^5$

```
(1 / 4 t (2*5^0.5 + 6))
```

7 $\rightarrow \frac{1}{2}\,t\left(\sqrt{5}+3\right)$

```
1 / 4 t ((1 / 4 t (5^0.5 + 1)))⁴ (-5^0.5 - 3) + 1 / 24 t² ((1 / 4 t (5^0.5 + 1)))³ (15*5^0.5 + 33) + 1 / 16 t³ ((1 / 4 t (5^0.5 + 1)))² (-7*5^0.5 - 15) + 1 / 5 ((1 / 4 t (5^0.5 + 1)))⁵
```

8 $\rightarrow \frac{1}{80}\,t^5\left(-5\sqrt{5}-11\right)$

```
1 / 4 t ((1 / 4 t (5^0.5 + 1) + t))⁴ (-5^0.5 - 3) + 1 / 24 t² ((1 / 4 t (5^0.5 + 1) + t))³ (15*5^0.5 + 33) + 1 / 16 t³ ((1 / 4 t (5^0.5 + 1) + t))² (-7*5^0.5 - 15) + 1 / 5 ((1 / 4 t (5^0.5 + 1) + t))⁵
```

9 $\rightarrow 0$

```
1 / 4 t ((1 / 4 t (2*5^0.5 + 6)))⁴ (-5^0.5 - 3) + 1 / 24 t² ((1 / 4 t (2*5^0.5 + 6)))³ (15*5^0.5 + 33) + 1 / 16 t³ ((1 / 4 t (2*5^0.5 + 6)))² (-7*5^0.5 - 15) + 1 / 5 ((1 / 4 t (2*5^0.5 + 6)))⁵
```

$\rightarrow \frac{1}{80}\,t^5\left(-5\sqrt{5}-11\right)$

```
{0,1 / 80 t⁵ (-5 sqrt(5) - 11),0,1 / 80 t⁵ (-5 sqrt(5) - 11)}
```

$\rightarrow \left\{0, \frac{1}{80}\,t^5\left(-5\sqrt{5}-11\right), 0, \frac{1}{80}\,t^5\left(-5\sqrt{5}-11\right)\right\}$

```
f(x)=1 / 4 t x⁴ (-5^0.5 - 3) + 1 / 24 t² x³ (15*5^0.5 + 33) + 1 / 16 t³ x² (-7*5^0.5 - 15) + 1 / 5 x⁵
```

$\rightarrow f(x) = t\,x^4 \cdot \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-3\right) + t^2\,x^3 \cdot \frac{1}{8}\left(5\sqrt{5}+11\right) + t^3\,x^2 \cdot \frac{1}{16}\left(-7\sqrt{5}-15\right) + \frac{1}{5}x^5$

Input:

ii Jeg vurderer i skrivende stund at der ikke findes flere rodsæt som generer polynomier med denne egenskab.

iii Eksempel t=2.

```
t
```

$\rightarrow 2$

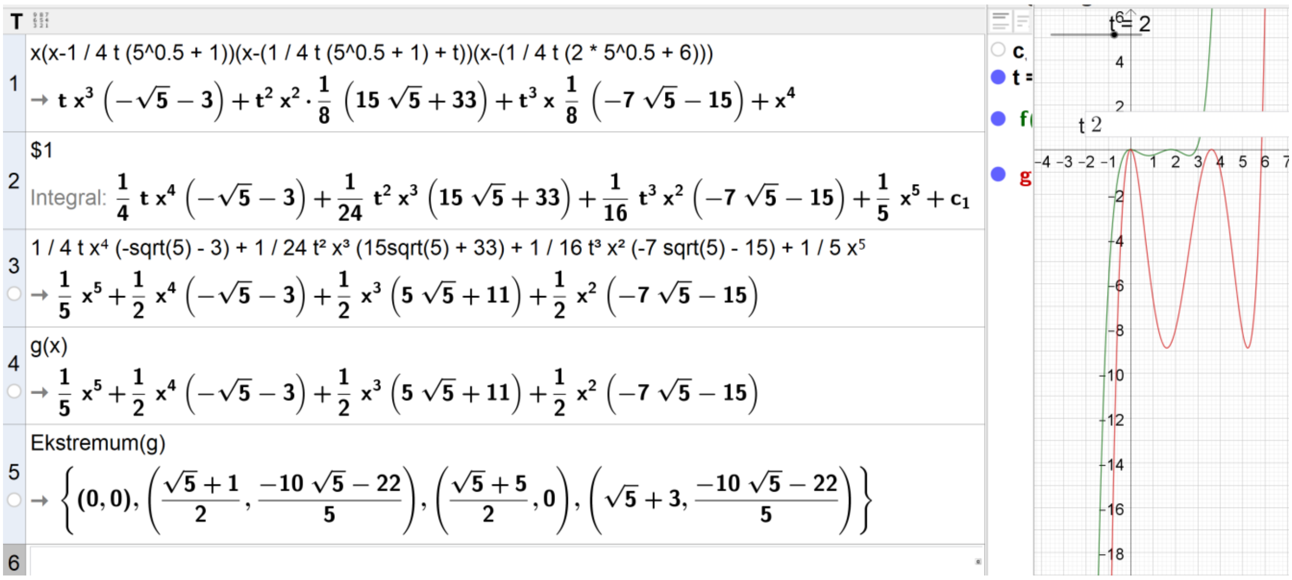
```
{(0, 0), ((t sqrt(5) + t) / 4, (-5 t⁵ sqrt(5) - 11t⁵) / 80), ((t sqrt(5) + 5t) / 4, 0), ((t sqrt(5) + 3t) / 2, (-5 t⁵ sqrt(5) - 11t⁵) / 80)}
```

$$\rightarrow \left\{(0,0), \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{-10\sqrt{5}-22}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{5}+5}{2}, 0\right), \left(\sqrt{5}+3, \frac{-10\sqrt{5}-22}{5}\right)\right\}$$

```
Ekstremum(f)
```

$$\rightarrow \left\{(0,0), \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{-10\sqrt{5}-22}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{5}+5}{2}, 0\right), \left(\sqrt{5}+3, \frac{-10\sqrt{5}-22}{5}\right)\right\}$$

iv


T
1
x(x-1 / 4 t (5^0.5 + 1))(x-(1 / 4 t (5^0.5 + 1) + t))(x-(1 / 4 t (2 * 5^0.5 + 6)))
$\rightarrow t\,x^3\left(-\sqrt{5}-3\right)+t^2\,x^2\cdot\frac{1}{8}\left(15\sqrt{5}+33\right)+t^3\,x\,\frac{1}{8}\left(-7\sqrt{5}-15\right)+x^4$
2
$1
Integral: $\frac{1}{4}\,t\,x^4\left(-\sqrt{5}-3\right)+\frac{1}{24}\,t^2\,x^3\left(15\sqrt{5}+33\right)+\frac{1}{16}\,t^3\,x^2\left(-7\sqrt{5}-15\right)+\frac{1}{5}\,x^5+c_1$
3
1 / 4 t x⁴ (-sqrt(5) - 3) + 1 / 24 t² x³ (15sqrt(5) + 33) + 1 / 16 t³ x² (-7 sqrt(5) - 15) + 1 / 5 x⁵
$\rightarrow \frac{1}{5}\,x^5+\frac{1}{2}\,x^4\left(-\sqrt{5}-3\right)+\frac{1}{2}\,x^3\left(5\sqrt{5}+11\right)+\frac{1}{2}\,x^2\left(-7\sqrt{5}-15\right)$
4
g(x)
$\rightarrow \frac{1}{5}\,x^5+\frac{1}{2}\,x^4\left(-\sqrt{5}-3\right)+\frac{1}{2}\,x^3\left(5\sqrt{5}+11\right)+\frac{1}{2}\,x^2\left(-7\sqrt{5}-15\right)$
5
Ekstremum(g)
$\rightarrow \left\{(0,0),\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},\frac{-10\sqrt{5}-22}{5}\right),\left(\frac{\sqrt{5}+5}{2},0\right),\left(\sqrt{5}+3,\frac{-10\sqrt{5}-22}{5}\right)\right\}$
6
t = 2
t 2