El pla donat b passa pel punt A i té un vector normal u. La seva equació és:

x(u) x + y(u) y + z(u) z - **(x(A) x(u) + y(A) i(u) +z(A) z(u))**=0

x(u) x + y(u) y + z(u) z - **t0**=0

L és un punt qualsevol d'aquest pla i és el punt de partida per determinar el punt que està equidistant del pla i d'una esfera a de centre C i que passa per D. Les seves coordenades són:

(x, y, (t0-x x(u)-y y(u))/z(u))

Dibuixem una perpendicular al pla que passa per L i una esfera de centre L i radi R, el de l'esfera a.

La intersecció d'ambdues dona un punt M de coordenades:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OL} - R \cdot \vec{u}$$

El pla mitger de C i M té per equació vectorial:

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{EP} = 0$$

sent E el punt mig del segment CM i P un punt qualsevol del pla.

$$\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

De manera que l'equació del pla queda així:

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{CM} \cdot \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}}{2} = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{OP} - \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}}{2} =$$
$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{OP} - \frac{OM^2 - OC^2}{2} = 0$$

Donat que el punt del lloc geomètric pertany també a la recta perpendicular al pla i que passa per L, podem escriure:

$$\overrightarrow{CM} \cdot \left(\overrightarrow{OL} + k \cdot \overrightarrow{LP}\right) - \frac{OM^2 - OC^2}{2} = 0$$

Podem substituir el vector LP pel vector u que és el vector director de la recta perquè és perpendicular al pla.

$$k = \frac{\frac{OM^2 - OC^2}{2} - \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{OL}}{\overrightarrow{CM} \cdot \vec{u}}$$

$$OM^2 - OC^2 = \left(\overrightarrow{OL} - R \cdot \vec{u}\right)^2 - OC^2 = OL^2 + R^2 - 2R \cdot \overrightarrow{OL} \cdot \vec{u} - OC^2$$

El vector CM té per components:

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OL} - R \cdot \vec{u} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CL} - R \cdot \vec{u}$$

$$\overrightarrow{CM} \cdot \vec{u} = \left(\overrightarrow{CL} - R \cdot \vec{u}\right) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OL} \cdot \vec{u} - \overrightarrow{OC} \cdot \vec{u} - R$$

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{OL} = \left(\overrightarrow{CL} - R \cdot \vec{u}\right) \cdot \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OL} - R \cdot \vec{u} \cdot \overrightarrow{OL} = OL^2 - \overrightarrow{OL} \cdot \left(\overrightarrow{OC} + R \cdot \vec{u}\right)$$

El numerador queda així:

$$\frac{OM^2-OC^2}{2}-\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OL}=\frac{OL^2+R^2-OC^2}{2}-R\cdot\overrightarrow{OL}\cdot\vec{u}-OL^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OL}+R\cdot\vec{u}\cdot\overrightarrow{OL}=$$
$$\frac{R^2-OC^2-OL^2}{2}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OL}$$

Introduirem les constants:

$$t1=-\overrightarrow{OC}\cdot\vec{u}-R$$
$$t2=\frac{R^2-OC^2}{2}$$

De manera que:

$$k=\frac{t2-\frac{OL^2}{2}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OL}}{\overrightarrow{OL}\cdot\vec{u}+t1}$$

Definirem les funcions:

f0(x,y)= (t0-x x(u)-y y(u))/z(u))

f1(x,y)=1/2(x^2+y^2+(f0(x,y))^2)

f2(x,y)= x x(C)+y y(C)+f0(x,y) z(C)

x x(u)+y y(u)+f0(x,y) z(u) = t0

Les tres expressions de la superfície, amb els paràmetres x i y, són:

x+(t2-f1(x,y)+f2(x,y))/(t1+t0)*x(u)

y+(t2-f1(x,y)+f2(x,y))/(t1+t0)*y(u)

(t0-x x(u)-y y(u))+(t2-f1(x,y)+f2(x,y))/(t1+t0)*z(u)