Esercizi svolti

Esercizio 1. Dati i punti: $A(1,1,0)$, $B(-1,-1,4)$, $C(1,1,3)$, $D(2,2,-8)$ dello spazio $\mathbb{R}^3$

a) Perché posso affermare che sono complanari?

b) Determina l'equazione del piano che li contiene

Soluzione:

a)

I punti A e C appartengono ad una retta r perpendicolare al piano $z = 0$ di equazione parametrica $r : (1,1,0)+t_1(0,0,1)$ ovvero: $r : (1,1,t_1)$ mentre B e D appartengono ad una retta s passante per l'origine (essendo uno multiplo dell'altro) di equazione: $s : t_2(1,1,-2)$ ovvero: $s : (t_2,t_2,-2t_2)$. Queste due rette hanno un punto comune basta scegliere $t_1 = -2$ e $t_2 = 1$ quindi sono due rette complanari e quindi i 4 punti sono complanari.

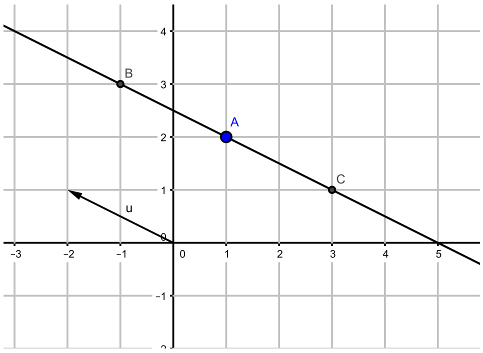
b)

considero i vettori $v_1 = B - A = (-2,-2,4)$ e $v_2 = C - A = (0,0,3)$ il loro prodotto vettoriale $\mathbf{n} = v_1 \otimes v_2 = (-1,1,0)$ per calcolare l'equazione del piano utilizzo la relazione $\mathbf{n} \cdot (P - P_0) = 0 \to \mathbf{n} \cdot (x,y,z) = \mathbf{n} \cdot A$ scegliendo come P_0 il punto A. Il prodotto scalare $\mathbf{n} \cdot (1,1,0) = 0$. L'equazione del piano sarà: $-x + y = 0$

Esercizio 2. Nel piano $\mathbb{R}^2$ disegna la retta r di equazione: $(1,2) + t(-2,1)$ individuando 2 suoi punti e fornisci anche la relativa equazione cartesiana.

Soluzione:

Scegliamo per $t = 1 \Rightarrow B(-1,3)$ e $t = -1 \Rightarrow B(3,1)$ l'equazione cartesiana sarà: $x + 2y = 5$



Esercizio 3. Scrivi due equazioni parametriche della retta passante per i punti $A(1, -2, 3)$ e $B(-3, -3, 2)$.

Soluzione:

per ottenere un'equazione parametrica della retta individuiamo un vettore direzione $\mathbf{u} = B - A \Rightarrow \mathbf{u} = (4, 1, 1)$ A questo punto un'equazione della retta è la seguente: $(1, -2, 3) + t(4, 1, 1)$. Un'altra equazione parametrica della stessa retta potrebbe essere: $(-3, -3, 2) + t(8, 2, 2)$.

Esercizio 4. Dato il piano di equazione $2x + 3y - z + 2 = 0$

a) Determina la sua intersezione con l'asse z

b) Determina la sua intersezione con il piano contenente gli assi x e y (la retta che otterrai esprimila con un'equazione parametrica).

Soluzione:

a)
I punti dell'asse z sono del tipo $(0, 0, z)$ quindi i punti del piano comuni all'asse z devono avere coordinate x e y nulle. ovvero $(0, 0, 2)$.
b)
il piano contenente gli assi x e y ha equazione $z = 0$ devo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

posto $x = t$ otteniamo un'equazione della retta intersezione:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t - \frac{2}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

- scritta in forma vettoriale: $(0, -\frac{2}{3}, 0) + t(1, -\frac{2}{3}, 0)$

Esercizio 5. Stabilisci se i seguenti piani sono tra loro paralleli, perpendicolari oppure né paralleli né perpendicolari, motivando opportunamente la tua risposta: $2x - 5y + z = 1$ e $3x + 2y + 4z = 5$

Soluzione:

osservando le equazioni dei due piani notiamo che i vettori normali ai due piani sono rispettivamente: $n_1 = (2, -5, 1)$ e $n_2 = (3, 2, 4)$ possiamo fare le seguenti valutazioni:

- n_1 non è un multiplo di n_2 quindi i due vettori non hanno la stessa direzione e ciò significa che i piani non sono paralleli.
- $n_1 \cdot n_2 = 6 - 10 + 4 = 0$ e ciò significa che i piani sono perpendicolari

Esercizio 6. Data la superficie sferica di raggio 2 e centro $C(-1, 1, 0)$ e la retta $r : (-1, 1, 0) + t(0, 1, 1)$ determina l'equazione del piano tangente alla sfera nel punto di intersezione retta-sfera con quota positiva.

Soluzione:

determiniamo inizialmente l'equazione della superficie sferica: utilizzando la formula: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$ otteniamo:

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$$

scriviamo ora l'equazione della retta in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

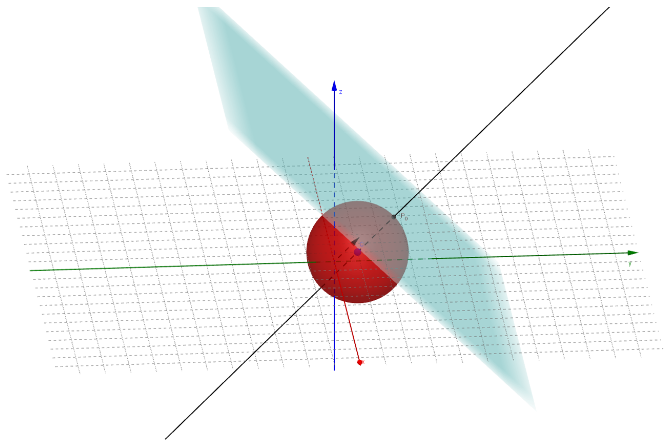
sostituiamo nell'equazione della superficie sferica:

$$(-1 + 1)^2 + (1 + t - 1)^2 + t^2 = 4 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$$

sostituendo ora i valori di t nell'equazione della retta otteniamo il punto P_0 di intersezione retta superficie sferica che ci interessa: $P_0 = (-\sqrt{2}, 1 +$

$\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Poiché la retta r passa per il centro il piano tangente in P_0 avrà direzione normale coincidente con la direzione della retta r. Dobbiamo quindi determinare l'equazione di un piano passante per P e normale al vettore $n(0,1,1)$ utilizziamo la formula. $n \cdot (P - P_0)$. Otteniamo: $n \cdot P = n \cdot P_0 = (0,1,1) \cdot P_0 = (-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Otteniamo:

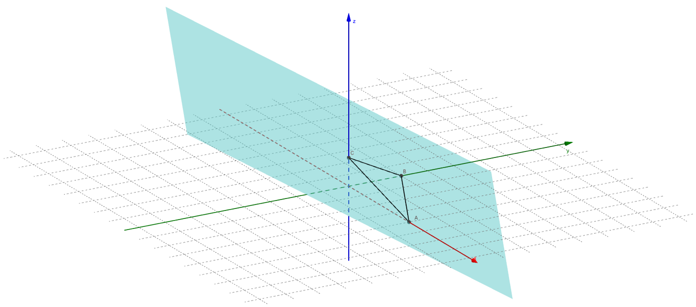
$$y + z = 1 + 2\sqrt{2}$$



Esercizio 7. Calcola l'area del triangolo che ha per vertici i punti di intersezione del piano $x + 2y + 4z = 4$ con gli assi cartesiani.

Soluzione:

Dobbiamo determinare i punti del piano del tipo: $(x,0,0)$, $(0,y,0)$ e $(0,0,z)$. sostituendo otteniamo rispettivamente i punti: $A(4,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,1)$ descritti nella figura seguente:



per calcolare l'area ci serve la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ e la distanza del punto C da $\overline{AB}$. cioè l'altezza del triangolo ABC

$$\overline{AB} = ||B - A|| = ||(-4, 2, 0)|| = 2\sqrt{5}$$

per calcolare la distanza di C da $\overline{AB}$ dobbiamo:

1. determinare l'equazione del piano α passante per C e perpendicolare alla retta contenente il segmento $\overline{AB}$
2. trovare il punto di intersezione H del piano α con retta per $\overline{AB}$.
3. trovare la lunghezza del segmento $\overline{CH}$

retta per $\overline{AB}$:

$$A + t \cdot (B - A) \Rightarrow (4, 0, 0) + t(-4, 2, 0)$$

equazione del piano α:

$$-4x + 2y = (-4, 2, 0) \cdot (0, 0, 1) \Rightarrow$$

$$-4x + 2y = 0$$

intersezione piano-retta:

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ x = 4 - 4t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

otteniamo $t = \frac{4}{5}$ da cui: $H(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 0)$

altezza: $\overline{CH} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{64}{25} + 1} = \sqrt{\frac{21}{5}}$

Esercizio 8. Verifica che le rette: $r : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 4 - s \end{cases}$

sono complanari

Soluzione:

scriviamo la rette r in forma parametrica con la sostituzione $z = t$:

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

risolviamo ora il sistema:

$$\begin{cases} -1 + t = 1 + s \\ 1 + t = 1 + 3s \\ t = 4 - s \end{cases}$$

dal quale otteniamo: $t = 3$ e $s = 1$ che sostituiti nelle due rette generano lo stesso punto $P(2, 4, 3)$