Nombres complexes

Résumé de cours

I. Module et argument d'un nombre complexe

A. Module

Définition : On appelle module du nombre complexe $z = a + bi$ le nombre noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétés :

- $z.\bar{z} = |z|^2$ donc $|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- Le module d'un nombre réel est sa valeur absolue, ce qui justifie sa notation.
- $AB = |z_B - z_A|$

B. Argument d'un complexe non nul

Définition : Soit, dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, un nombre complexe z d'affixe M. On appelle argument de z et on note $arg(z)$ toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$.

Déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe : 66 p 244 + exo perso 1

Propriétés :

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$ ou $arg(z) = 0\ [\pi]$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$ ou $arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Faire prouver les formules suivantes :

$arg(\bar{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$

$arg(-z) = arg(z) + \pi[2\pi]$

$arg(-\bar{z}) = \pi - arg(z)\ [2\pi]$

Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ alors $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ arg(z) = arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$

C. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition : On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul l'écriture : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$.

Remarque : 0 n'a pas de forme trigonométrique.

Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice 3

II. Interpretation geometrique des operations sur les complexes.

On observe sur des figures

$\boxed{\bar{z} = a - ib}$ M et M' sont symétriques par rapport à Ox

A. Addition

$\boxed{|z+z'| \leq |z| + |z'|}$

B. Différence

$\boxed{|z-z'| \leq |z| + |z'|}$ $\boxed{|z-z'| = d(M, M')}$ et $\boxed{Arg(z-z') = (\vec{u}, \overrightarrow{M'M})}$

Résumé de cours

Théorème : Si M et M′ sont deux points d'affixes respectives z et z',

MM′ = $|z - z'|$ et $\arg(z - z') = (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{M'M})$

C. *Produit*

a) Multiplication par (-1).
b) Multiplication par (i)
c) Cas général :

Exercice 5

Preuve : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$z.z' = r.r'[(\cos\theta.\cos\theta' + \sin\theta.\sin\theta') + i(\cos\theta.\sin\theta' + \cos\theta'.\sin\theta)]$

$z.z' = r\,r'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$

$\boxed{|z.z'| = |z|.|z'|}$ et en particulier : $\boxed{|k.z| = |k||z| \text{ où } k \in IR}$ $\boxed{Arg(z.z') = Arg(z) + Arg(z')\ [2\pi]}$

D. *Quotient*

$\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}}$ et $\boxed{Arg\left(\frac{1}{z}\right) = -Arg(z)\ [2\pi]}$ d'où $\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}}$ et $\boxed{Arg\left(\frac{z}{z'}\right) = Arg(z) - Arg(z')\ [2\pi]}$

E. *Puissance*

Quel que soit $\boxed{n \in Z,\ \arg(z^n) = n.\arg(z)\ [2\pi]}$

III. NOTATION EXPONENTIELLE DES NOMBRES COMPLEXES

A. *Définition et propriétés*

Définition : On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe z non nul dont l'argument est θ l'écriture : $z = |z|e^{i\theta}$

Propriétés :

- $|e^{i\theta}| = 1$ et $arg(e^{i\theta}) = \theta\ [2\pi]$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ formule de Moivre
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta'\ [2\pi]$

Compréhension

Faux 65, 67, 68 p 244

Passer de la forme exponentielle à la forme algébrique

n°70, 71, 74

Utiliser les propriétés

B. *Formules de trigonométrie*

Retrouver les formules de trigonométrie avec les nombres complexes