ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL:

Empezaremos definiendo qué es una asíntota y que es una rama infinita de una función.

Rama infinita: Se dice que una función $y = f(x)$ tiene una **RAMA INFINITA** cuando *x*, *f*(*x*) o ambas al mismo tiempo crecen infinitamente. De esta manera el punto $(x, f(x))$ se aleja infinitamente. Algunas de estas ramas infinitas se aproximan a unas rectas determinadas que reciben el nombre de **ASÍNTOTAS.**

Asíntota: Si un punto $(x, f(x))$ se desplaza continuamente por una función $y = f(x)$ de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de asíntota de la función.

Normalmente cuando se explica cómo calcular o determinar una asíntota hacemos tres grupos:

Verticales, horizontales y oblicuas. En realidad son dos tipos: ***las verticales***, que están asociadas a puntos que no pertenecen al dominio de definición de la función, pero que están tan cerca de un punto de éste como queramos, además a medida que nos acercamos a él la función se va al infinito. Se trata de puntos de discontinuidad de salto infinito de la función. Estas asíntotas son de la forma $x = a$. Por otro lado están, ***las horizontales y oblicuas cuya expresión es del tipo*** $\boldsymbol{y = mx + n}$. En todos los casos, las asíntotas son rectas a las que la función se parece mucho cuando observamos puntos que están muy alejados del origen de coordenadas.

Una función puede tener muchas asíntotas verticales, infinitas incluso, como la función tangente. Por el contrario, asíntotas del tipo $y = mx + n$, puede tener como mucho 2: una para el infinito positivo y otra para el infinito negativo, en caso de que la función esté definida a trozos.

CALCULO DE ASÍNTOTAS DEL TIPO: $\boldsymbol{y = mx + n}$.

Primero nos vamos a centrar en determinar las del tipo $y = mx + n$, es decir en determinar la pendiente y la ordenada en el origen. (*Cuando explicamos esto, decimos que si hay asíntotas horizontales no hay oblicuas y viceversa, si lo enfocamos como el cálculo de una asíntota del tipo general* $y = mx + n$*, la pendiente es 0, o distinta de 0, obviamente no puede ser las dos cosas a la vez*).

En el siguiente cuadro puedes ver las distintas posibilidades que hay para determinar la pendiente y la ordenada en el origen de las asíntotas del tipo $y = mx + n$.

El estudio que tenemos que hacer es similar para $+\infty$ $y - \infty$ (nosotros lo haremos de forma general para ∞), y se realiza según el dominio de definición, para uno, otro o ambos lados.

De forma general $\boldsymbol{m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}}$ **y si** $\boldsymbol{\exists\, m \implies n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx}$

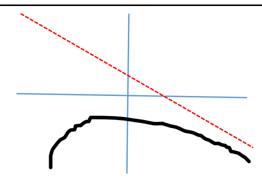
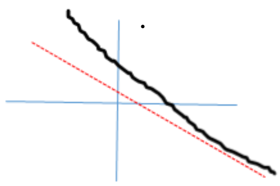
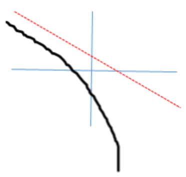
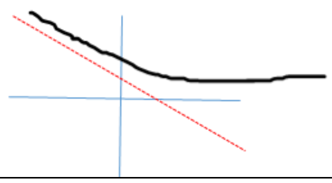
	$n \in \mathbb{R}$	$n = \pm\infty$	$\nexists n$
$m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\boldsymbol{ASÍNTOTA\ OBLICUA}$ $\boldsymbol{y = mx + n}$ $Ej: f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$	$Hay\ una\ rama\ parabólica$ $del\ tipo: \pm\sqrt{x}\ \ o\ \log$ $Ej: f(x) = x - \sqrt{x}$	$No\ hay\ asíntotas, ni\ ramas\ infinitas$ $Ej: f(x) = x - \cos(x)$
$m = 0$	$\boldsymbol{ASÍNTOTA\ HORIZONTAL}$ $\boldsymbol{y = n}$ $Ej: f(x) = \frac{x - 3}{x - 2}$	$Hay\ una\ rama\ parabólica$ $del\ tipo: \pm\sqrt{x}$ $Ej: f(x) = \sqrt{x - 3}$	$No\ hay\ asíntotas, ni\ ramas\ infinitas$ $Ej: f(x) = \cos(x)$
$m = \pm\infty$	$No\ es\ posible$	$No\ es\ posible$	$Hay\ una\ rama\ parabólica\ del\ tipo: \pm x^2$ $Ej: f(x) = \frac{x^3 - 3}{x - 2}$
$\nexists m$	$No\ es\ posible$	$No\ es\ posible$	$No\ hay\ asíntotas, ni\ ramas\ infinitas$ $Ej: f(x) = x \cdot \cos(x)$

Una vez calculada la asíntota, tenemos que posicionar la gráfica de la función con respecto a la asíntota: ésta puede quedar comprendida entre el eje de abscisas y la asíntota, o bien ser la asíntota la que quede comprendida entre la gráfica de la función y el eje de abscisas. En el primer caso hablamos de que la función queda por debajo de la asíntota y en el segundo de que queda por encima. Y la manera de determinar si se trata de un caso u otro es determinar el signo del siguiente límite.

$$\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + n)]}$$

Obviamente si $y = mx + n$ es una asíntota de $f(x)$, el límite anterior tiene que ser 0. Si nos acercamos al 0 por valores positivos, quiere decir que en el ∞ la función es mayor que la asíntota. Y eso quiere decir que su gráfica queda por encima de esta. Si nos acercamos por valores negativos sucede lo contrario.

Recogemos las distintas situaciones en el siguiente cuadro:

$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0^-}$	$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n) = 0^+}$
	
$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0^-}$	$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n) = 0^+}$
	

<u>CALCULO DE ASÍNTOTAS DEL TIPO: $\boldsymbol{x=a}$.</u>

Para el cálculo de estas asíntotas tenemos primero que identificar los puntos candidatos. Puntos que no pertenecen al dominio pero que están tan cerca de él como pueda imaginarme. Por ejemplo los puntos en los que se anula una función racional o el 0 en la función *log(x)*. Y luego comprobar que los límites laterales de la función, en ese punto, son divergentes. Veamos la siguiente tabla:

Sea ***a*** un punto en la frontera del dominio de la función $f(x)$.

	$\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ $L\in\mathbb{R}$	$\nexists \lim_{x\to a^-} f(x)$
$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$	**ASÍNTOTA VERTICAL** $\boldsymbol{x=a}$ $P.e.\ x=2;\ en$ $f(x)=\frac{x}{x-2}$	**ASÍNTOTA VERTICAL SOLO POR LA DERECHA.** $\boldsymbol{x=a}$ $P.e.\ x=2;\ en$ $f(x)=\begin{cases} 3\ si\ x\leq 2 \\ \frac{x}{x-2}\ si\ x>2 \end{cases}$	**ASÍNTOTA VERTICAL SOLO POR LA DERECHA.** $\boldsymbol{x=a}$ $P.e.\ x=0;\ en$ $f(x)=\log(x)$
$\lim_{x\to a^+} f(x)=M$	**ASÍNTOTA VERTICAL SOLO POR LA IZQUIERDA** $\boldsymbol{x=a}$ $P.e.\ x=2;\ en$ $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x-2}\ si\ x<2 \\ 5\ \ si\ x\geq 2 \end{cases}$	**NO HAY ASÍNTOTA VERTICAL.** Si $M=L$ discontinuidad evitable. $f(x)=\begin{cases} 3\ si\ x<2 \\ x+1\ si\ x>2 \end{cases}$ Si $M\neq L$ discontinuidad de salto finito. $f(x)=\begin{cases} 3\ si\ x<2 \\ 5\ \ si\ x>2 \end{cases}$	**NO HAY ASÍNTOTA VERTICAL.** Hay una discontinuidad evitable haciendo $f(a)=M$ $f(x)=\begin{cases} 5\ si\ x=2 \\ 5\ \ si\ x>2 \end{cases}$
$\nexists \lim_{x\to a^+} f(x)$	**ASÍNTOTA VERTICAL SOLO POR LA IZQUIERDA** $\boldsymbol{x=a}$ $P.e.\ x=0;\ en$ $f(x)=\log(-x)$	**NO HAY ASÍNTOTA VERTICAL.** Hay una discontinuidad evitable haciendo $f(a)=L$ $f(x)=\begin{cases} 5\ si\ x=2 \\ 5\ \ si\ x<2 \end{cases}$	**NO HAY ASÍNTOTA VERTICAL.**

El posicionamiento de la gráfica de una función respecto a estas asíntotas queda resuelta, en la propia determinación de la asíntota.