Seción 1.3

15. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2) = 2$

El teorema de existencia garantiza al menos una solución en cualquier parte del plano $\mathbb{R}^2$, contenida en:

$$\{(x,y) : x - y > 0\}$$

$$\{(x,y) : x > y\}$$

ya que el P.V.I es en (2,2) esta condición no se cumple y el teorema no garantiza la existencia de una solución a este P.V.I.

Tampoco se garantiza la unicidad ya que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ no es continua si $x=y$

16. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2) = 1$

El teorema de existencia, garantiza al menos una solución al PVI (2,1) ya que :

$2>1$
$x>y$ } El teorema de unicidad garantiza unica solución al P.V.I.

$f(x,y) = \sqrt{x-y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}$

es continua en la region donde

$x-y>0 \Rightarrow x>y$

por tanto el PVI, admite unica solución en la region.

$R.\{(x,y) : 2-\epsilon \leq x \leq 2+\epsilon,\ 1h \leq y \leq 1+h\}$

con $\epsilon, h>0$.

sección 1.3

27) a) $y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ (x-c)^2 & x > c \end{cases}$

✓ Para $x < c$ tenemos $y = 0$ $\to$ $\frac{dy}{dx} = 0$ $\to$ $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$

$0 = 2\sqrt{0}$

$0 = 0$

✓ Para $x > c$ tenemos $y = (x-c)^2$ $\to$ $\frac{dy}{dx} = 2(x-c)$

$\to \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$

$\to 2(x-c) = 2\sqrt{(x-c)^2}$

$2(x-c) = 2|x-c|$

$*$ $x > c \to |x-c| = x-c$

$\to 2(x-c) = 2(x-c)$

✓ Si $x = c$

$\frac{dy}{dx}(c) = \lim_{x \to c} \frac{y(x) - y(c)}{x-c}$

- $\lim_{x \to c^-} \frac{0-0}{x-c} = \lim_{x \to c^-} \frac{0}{x-c} = 0$
- $\lim_{x \to c^+} \frac{(x-c)^2 - 0}{x-c} = \lim_{x \to c^+} x-c = 0$

$\to \lim_{x \to c} \frac{y(x) - y(c)}{x-c} = 0$ $\to$ $\frac{dy}{dx}(c) = 2\sqrt{y(c)}$

$0 = 0$

R/ $y(x)$ si satisface la EDO $y' = 2\sqrt{y}$; $y(0) = 0$ $\forall x$

✓ como c puede ser tan cercano como sea a $x=0$ entonces valores de c muy pequeños serán soluciones a la EDO con PVI $y(0)=0$ y significa que tendremos infinitas soluciones

Banco de Bogotá
Un Banco hecho entre dos

DIA DAY | MES MONTH | TEMA SUBJECT

b) I) $y' = 2\sqrt{y}$

$y(0) = b$ no tiene solución para $b < 0$

II) $y' = 2\sqrt{y}$

$y(0) = b$ tiene unica solución para $b > 0$

$f(x,y) = 2\sqrt{y}$ es continua si $y > 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ es continua si $y > 0$

30) si $x < c$; $x > c + \pi$

$y(x) = \pm 1$ respectivamente en cualquier caso $y' = 0$

→ $y' = \sqrt{1 - y^2}$

$0 = \sqrt{1 - (\pm 1)^2}$

$0 = \sqrt{0}$ en $x > c$ $\wedge$ $x > c + \pi$

$0 = 0$

→ si $c < x < c + \pi$

$y(x) = \cos(x - c)$

$y'(x) = -sen(x - c)$

→ $-sen(x-c) = \sqrt{1 - \cos^2(x-c)}$

$-sen(x-c) = -\sqrt{sen(x-c)}$

$-sen(x-c) = -|sen(x-c)| = -sen(x-c)$ *

* como $c < x < c + \pi$

$c - c < x - c < c + \pi - c$

$0 < x - c < \pi$ → si $x - c \in [0, \pi]$ entonces

$-|sen(x-c)| = -sen(x-c)$

R/ $y(x)$ satisface la EDO $\forall x$

DIA DAY | MES MONTH | TEMA SUBJECT

Banco de Bogotá

Un Banco hecho entre dos

→ puesto que $\frac{dy}{dx}(c) = \frac{dy}{dx}(c+\pi) = 0$

✓ $\frac{dy}{dx}(c) = \lim_{x \to c} \frac{y(x) - y(c)}{x - c} = 0$

• $\lim_{x \to c^-} \frac{1 - 1}{x - c} = 0$ • $\lim_{x \to c^+} \frac{\cos(x-c) - 1}{x - c} = -\operatorname{sen}(c-c) = 0$

✓ $\frac{dy}{dx}(c+\pi) = \lim_{x \to c} \frac{y(x) - y(c+\pi)}{x - (c+\pi)}$

• $\lim_{x \to (c+\pi)^-} \frac{\cos(x-c) - (-1)}{x - (c+\pi)} = \lim_{x \to (c+\pi)^-} -\operatorname{sen}(x-c) = 0$ • $\lim_{x \to (c+\pi)^+} \frac{-1-(-1)}{x - (c+\pi)} = 0$

→ $y' = -\sqrt{1-y^2}$; $y(a) = b$

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) &= \sqrt{1-y^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}\right\} \text{son continuas si } \begin{aligned} 1 - y^2 &> 0 \\ 1 &> y^2 \\ |y| &< 1 \\ |b| &< 1 \end{aligned}$$

R/ se garantiza existencia y unicidad de la solución si el PVI pertenece a (a, b) con $-1 < b < 1$
$a \in \mathbb{R}$

* si $b > 1$ no existe solución al PVI $y(a) = b$

* si $b = 1$ no se garantiza existencia y unicidad

* Igualmente se observa que:

• $y(t) = 1$ • $y(t) = -1$

son soluciones constantes al PVI $y(t) = -\sqrt{1-y^2}$
$y(a) = 1$ $y(a) = -1$

Scanned with CamScanner

32 ✓ Si $x^2 < c$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$

$y = 0$

$0 = 4x\sqrt{0}$

$0 = 0$

✓ Si $x^2 > c$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$

$y = (x^2 - c^2)$

$2(x^2 - c)(2x) = 4x\sqrt{(x^2 - c^2)}$

$4x(x^2 - c) = 4x\,|x^2 - c| = 4x\,(x^2 - c)$

$x^2 > c$ y $|x^2 - c| = x^2 - c$

Reescribo y para hallar su derivada

$$y(x) = \begin{cases} (x^2 - c)^2 & ; x < \sqrt{c} \\ 0 & ; -\sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{c} \\ (x^2 - c)^2 & ; x > \sqrt{c} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}(\sqrt{c}) = \lim_{x \to \sqrt{c}} \frac{y(x) - y(\sqrt{c})}{x - \sqrt{c}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \sqrt{c}^+} \frac{(x^2 - c)^2 - 0}{x - \sqrt{c}} \cdot \frac{x + \sqrt{c}}{x + \sqrt{c}}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{c}^+} \frac{(x^2 - c)^2 (x + \sqrt{c})}{x^2 - c} = \lim_{x \to \sqrt{c}^-} (x^2 - c)(x + \sqrt{c})$$

$$= (c - c)(\sqrt{c} + \sqrt{c})$$

$$= 0$$

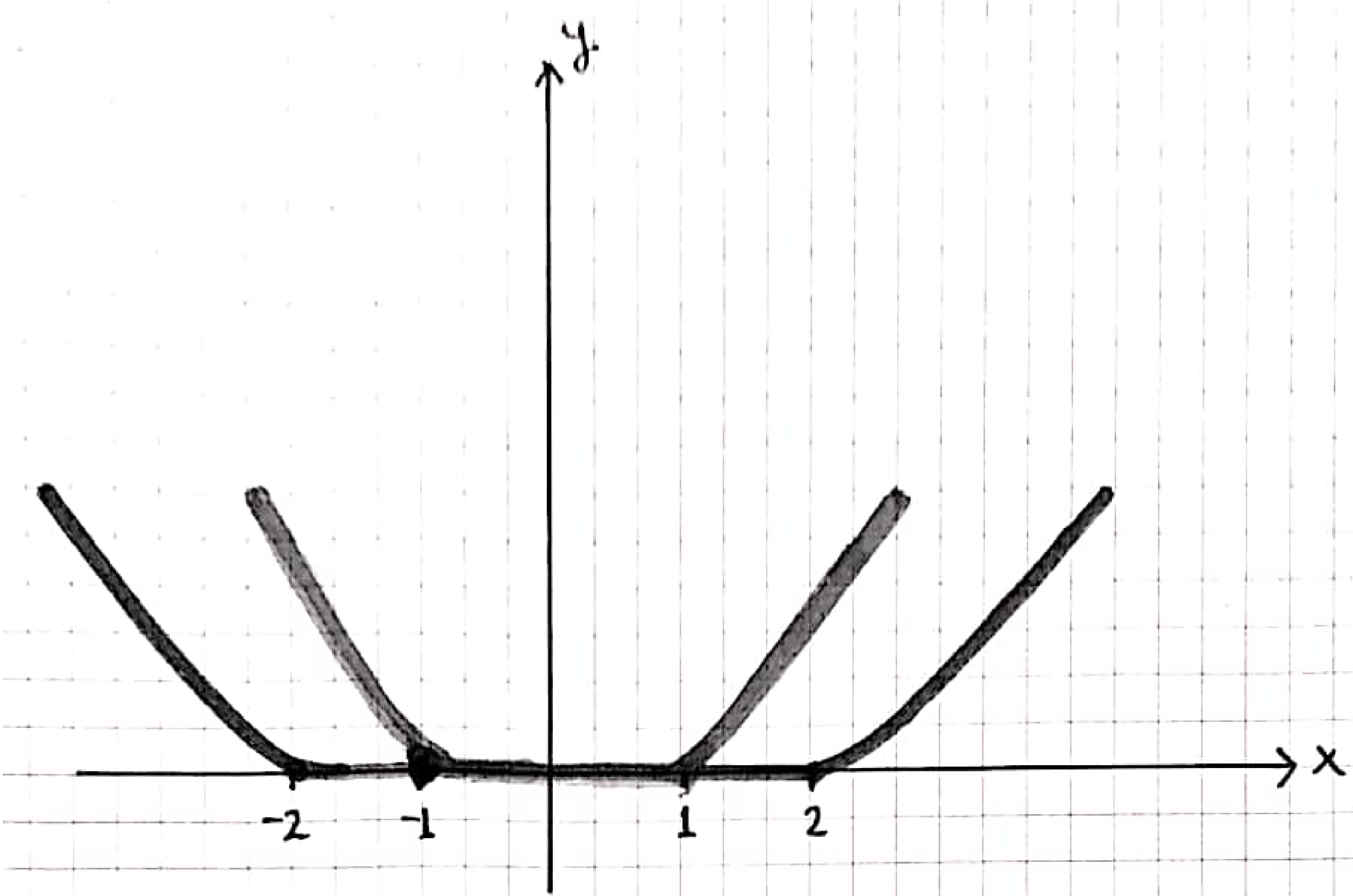
$$\lim_{x \to \sqrt{c}^-} \frac{0 - 0}{x - \sqrt{c}} = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}(-\sqrt{c}) = \lim_{x \to -\sqrt{c}} \frac{y(x) - y(-\sqrt{c})}{x + \sqrt{c}} = 0}$$

así que $\frac{dy}{dx}\left(\pm\sqrt{c}\right) = 4\left(\pm\sqrt{c}\right)\left(y \pm \sqrt{c}\right)$

$$0 = 0$$

$y(x) \Rightarrow$ Satisface E.D.O $\forall x$



la ecuación $\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$ $\quad y(a) = b$

Es solución unica si $b>0$; $\forall a$

$f(x,y) = 4x\sqrt{y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{y}$

son continuas para $y>0$ $(b>0)$

Para $y<0$ $(b<0)$ no hay soluciones y si $y=0$ $(b=0)$ el teorema no garantiza existencia ni unicidad; aunque hay infinitas soluciones al P.V.I. $y(0)=0$.