3. Transformaciones ortogonales.

En todo el capítulo trabajaremos sobre un espacio vectorial euclídeo U.

1 Definición.

Definición 1.1 *Una* **transformación ortogonal** f *de un espacio eculídeo* U *es un endomorfismo que conserva el producto escalar.*

$$f(\bar{x})\cdot f(\bar{y})=\bar{x}\cdot\bar{y}\quad \textit{para cualesquiera } \bar{x},\bar{y}\in U.$$

Veamos que en realidad es suficiente la condición de conservación del producto escalar, es decir:

Proposición 1.2 *Si una aplicación de* $f:U\longrightarrow U$ *conserva el producto escalar entonces es una aplicación lineal.*

Prueba: Sean $\bar{x},\bar{y}\in U$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Queremos ver que:

$$f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=\alpha f(\bar{x})+\beta f(\bar{y}).$$

Se tiene:

$$(f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})-\alpha f(\bar{x})-\beta f(\bar{y}))\cdot(f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})-\alpha f(\bar{x})-\beta f(\bar{y}))=$$

$$\begin{aligned}&=f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})\cdot f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})+\alpha^2 f(\bar{x})\cdot f(\bar{x})+\beta^2 f(\bar{y})\cdot f(\bar{y})-\\&\quad-2\alpha f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})\cdot f(\bar{x})-2\beta f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})\cdot f(\bar{y})+2\alpha\beta f(\bar{x})\cdot f(\bar{y})=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})\cdot(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})+\alpha^2\bar{x}\cdot\bar{x}+\beta^2\bar{y}\cdot\bar{y}-\\&\quad-2\alpha(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})\cdot\bar{x}-2\beta(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})\cdot\bar{y}+2\alpha\beta\bar{x}\cdot\bar{y}=\end{aligned}$$

$$=((\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})-\alpha\bar{x}-\beta\bar{y})\cdot((\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})-\alpha\bar{x}-\beta\bar{y})=0$$

Por tanto $f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})-\alpha f(\bar{x})-\beta f(\bar{y})=0$. ■

Utilizando esta proposición podemos dar una caracterización de las transformaciones ortogononales:

Teorema 1.3 $f:U\longrightarrow U$ *es una transformación ortogonal si y sólo si lleva bases ortonormales en bases ortonormales.*

Prueba: Si f es una transformación ortogonal, está claro que lleva bases ortonormales en bases ortonormales. Simplemente hay que tener en cuenta que f conserva el producto escalar y que un sistema ortogonal es libre.

Probemos el recíproco. Teniendo en cuenta la proposición anterior, basta suponer que f lleva bases ortonormales en bases ortonormales y comprobar que entonces f conserva el producto escalar.

Sea $B=\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$ una base ortonormal de U y $f(B)=\{f(\bar{u}_1),\ldots,f(\bar{u}_n)\}$ la base ortonormal imagen. Dados $\bar{x},\bar{y}\in U$ de coordenadas $(x^i),(y^j)$ respecto a la base B, tenemos:

$$f(\bar{x})\cdot f(\bar{y})=f(x^i\bar{u}_i)\cdot f(y^j\bar{u}_j)=x^iy^jf(\bar{u}_i)\cdot f(\bar{u}_j).$$

Teniendo en cuenta que las bases B y $f(B)$ son ortonormales queda:

$$f(\bar{x})\cdot f(\bar{y})=x^iy^jf(\bar{u}_i)\cdot f(\bar{u}_j)=x^iy^j\delta_{ij}=x^iy^j\bar{u}_i\cdot\bar{u}_j=(x^i\bar{u}_i)\cdot(y^j\bar{u}_j)=\bar{x}\cdot\bar{y}.$$

■

2 Propiedades.

Sea $f:U\longrightarrow U$ una transformación ortogonal. Veamos algunas de las principales propiedades que cumple.

1. *Conserva el producto escalar.*
2. *Transforma bases ortonormales en bases ortonormales.*
3. *Conserva el módulo:*

   $$\|f(\bar{x})\|^2=f(\bar{x})\cdot f(\bar{x})=\bar{x}\cdot\bar{x}=\|\bar{x}\|^2.$$

4. *Conserva ángulos:*

   $$cos(f(\bar{x}),f(\bar{y}))=\frac{f(\bar{x})\cdot f(\bar{y})}{\|f(\bar{x})\|\|f(\bar{y})\|}=\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}=cos(\bar{x},\bar{y}).$$

5. *Es biyectiva.*

   Prueba: Por llevar bases ortonormales en bases ortonormales es sobreyectiva. Por la fórmula de las dimensiones es también inyectiva.

   También podemos ver directamente que es inyectiva, comprobando que el núcleo es $\{0\}$.

   $$f(\bar{x})=\bar{0}\quad\Rightarrow\quad\bar{x}\cdot\bar{x}=f(\bar{x})\cdot f(\bar{x})=0\quad\Rightarrow\quad\bar{x}=\bar{0}.$$

6. *La composición de transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal.*

   Prueba: Si f y g son transformaciones ortogonales, se tiene:

   $$(g\circ f)(\bar{x})\cdot(g\circ f)(\bar{y})=g(f(\bar{x}))\cdot g(f(\bar{y}))=f(\bar{x})\cdot f(\bar{y})=\bar{x}\cdot\bar{y}.$$

7. *La inversa de una transformación ortogonal es una transformación ortogonal.*

   Prueba: Si f es ortogonal, se verifica:

   $$f^{-1}(\bar{x})\cdot f^{-1}(\bar{y})=f(f^{-1}(\bar{x}))\cdot f(f^{-1}(\bar{y}))=\bar{x}\cdot\bar{y}.$$

8. *Si f es un endomorfismo y B una base de U se tiene:*

$$\boxed{f \text{ transformación ortogonal} \iff F_B G_B {F_B}^t = G_B}$$

Prueba: Tenemos:

$$\begin{array}{rl} f \text{ t. ortogonal} & \iff f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}, \qquad \forall \bar{x}, \bar{y} \in U \iff \\ & \iff (x) F_B G_B ((y) F_B)^t = (x) G_B \{y\} \qquad \forall \bar{x}, \bar{y} \in U \iff \\ & \iff (x) F_B G_B {F_B}^t \{y\} = (x) G_B \{y\} \qquad \forall \bar{x}, \bar{y} \in U \iff \\ & \iff F_B G_B {F_B}^t = G_B. \end{array}$$

9. *Si f es un endomorfismo y B una base ortonormal de U se tiene:*

$$\boxed{f \text{ transformación ortogonal} \iff F_B {F_B}^t = Id \iff F_B \text{ es ortogonal}}$$

Prueba: Es consecuencia de la propiedad anterior teniendo en cuenta que la matriz de Gram respecto a una base ortonormal es la identidad.

10. *Si f es un endomorfismo, B una base de U, entonces $|F_B| = \pm 1$.*

Prueba: Se tiene:

$$|G_B| = |F_B G_B {F_B}^t| = |F_B||G_B||F_B| \quad \Rightarrow \quad |F_B|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |F_B| = \pm 1.$$

3 Autovalores y autovectores.

Proposición 3.1 *Los* **autovalores** *reales de una transformación ortogonal son* 1 *ó* -1.

Prueba: Si $t : U \longrightarrow U$ es una transformación ortogonal, λ es un autovalor real y $\bar{x}$ el autovector no nulo asociado se tiene:

$$t(\bar{x}) \cdot t(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 \bar{x} \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1.$$

■

Proposición 3.2 *Si $t : U \longrightarrow U$ es una transformación ortogonal, los* **subespacios característicos** *asociados a autovalores distintos son ortogonales.*

Prueba: Los únicos autovalores reales distintos de t son 1 y -1. Sean $\bar{x} \in S_1$, $\bar{y} \in S_{-1}$. Tenemos:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = t(\bar{x}) \cdot t(\bar{y}) = -\bar{x} \cdot \bar{y} \quad \Rightarrow \quad 2\bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = 0.$$

Por tanto S_1 y S_{-1} son ortogonales. ■

Teorema 3.3 *Si una transformación ortogonal t es diagonalizable, entonces existe una base de autovectores ortonormal.*

Prueba: Por el teorema anterior los subespacios característicos correspondientes a autovalores distintos son ortogonales. Por tanto si la transformación es diagonalizable, podemos construir una base de autovectores ortogonales formada a su vez por bases de autovectores ortogonales de ada uno de los dos subespacios característicos.
■

4 Orientación relativa de las bases.

Definición 4.1 *Sea U un espacio vectorial real de dimensión finita. Dos bases B y B' se dice que tienen la misma* **orientación** *si la matriz de cambio de base tiene determinate positivo:*

$$|M_{B'B}| > 0$$

Proposición 4.2 *La relación "tener la misma orientación" es de equivalencia. Además el conjunto cociente tiene dos elementos.*

Prueba: Veamos que cumple las tres propiedades que caracterizan las relaciones de equivalencia.

1. Reflexiva: $M_{BB} = Id \;\Rightarrow\; |M_{BB}| = 1 \;\Rightarrow\;$ toda base B tiene la misma orientación que ella misma.
2. Simétrica: si B, B' tienen la misma orientación, entonces $|M_{B'B}| > 0$, y:
$$|M_{BB'}| = |{M_{B'B}}^{-1}| = \frac{1}{|M_{B'B}|} > 0.$$
3. Transitiva:
$$\left.\begin{array}{l} B, B' \text{ misma orientación} \quad \Rightarrow \quad |M_{B'B}| > 0 \\ B', B'' \text{ misma orientación} \quad \Rightarrow \quad |M_{B''B'}| > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad |M_{B''B}| = |M_{B''B'} M_{B'B}| = |M_{B''B'}||M_{B'B}| > 0.$$
Por tanto B y B'' tiene la misma orientación.

Ahora probemos que sólo hay dos clases de equivalencia. Sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ una base de U. Está claro que la base:

$$B' = \{-\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$$

tiene distinta orientación que B', porque la matriz de cambio de base es:

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |M_{B'B}| = -1.$$

Veamos que cualquier otra base B'' tiene la misma orientación que una de estas dos. Si B'' tiene distinta orientación que B, entonces $|M_{B''B}| < 0$ y:

$$|M_{B''B'}| = |M_{B''B}||M_{BB'}| > 0.$$

y por tanto B'' tiene la misma orientación que B'.

5 Transformaciones ortogonales directas o inversas.

Definición 5.1 *Sea $t : U \longrightarrow U$ una transformación ortogonal, B una base de U y T_B la matriz asociada a t respecto a la bse B . Decimos que t es un a transformación:*

- **directa** *si* $|T_B| = 1$.
- **inversa** *si* $|T_B| = -1$.

Teniendo en cuenta que la fórmula de cambio de base de la matriz asociada a t es:

$$T'_B = M_{B'B} T_B {M_{B'B}}^{-1},$$

la definición no depende de la base escogida, ya que matrices semejantes tienen el mismo determinante.

Por otra parte podemos dar la siguiente caracterización de las transformaciones directas e inversas:

Proposición 5.2 *Sea $t : U \longrightarrow U$ una transformación ortogonal. Entonces t es un a transformación:*

- **directa** *si y sólo si conserva la orientación de las bases.*
- **inversa** *si y sólo si invierte la orientación de las bases.*

Prueba: Sea $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ una base de U. Sea $t(B) = \{t(\bar{u}_1), \dots, t(\bar{u}_n)\}$ la imagen de esta base. Si T_B es la matriz de la aplicación t respecto a la base B se tiene:

$$\{t(\bar{u}_j)\} = T_B\{\bar{u}_i\}.$$

Por tanto, la matriz de cambio de base entre B y $t(B)$ es:

$$M_{t(B)B} = T.$$

Entonces:

$$\begin{array}{lclcl} t \text{ directa} & \iff & |M_{t(B)B}| = |T| = 1 & \iff & B \text{ y } t(B) \text{ misma orientación.} \\ t \text{ inversa} & \iff & |M_{t(B)B}| = |T| = -1 & \iff & B \text{ y } t(B) \text{ distinta orientación.} \end{array}$$

■

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. *La composición de dos transformaciones ortogonales directas es directa.*
2. *La composición de dos transformaciones ortogonales inversas es directa.*
3. *La composición de dos transformaciones ortogonales una directa y otra inversa es inversa.*
4. *La inversa de una transformaciones ortogonal directa es directa.*
5. *La inversa de una transformaciones ortogonal inversa es inversa.*

6 Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$.

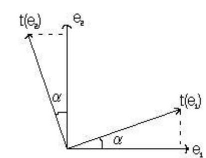
Comenzaremos describiendo las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$

6.1 Giros en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 6.1 *Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ una base* **ortonormal** *de $\mathbb{R}^2$ y α un ángulo cualquiera. El* **giro de ángulo α con respecto a la orientación dada por la base** *B tiene por matriz asociada:*

$$T_B = \begin{pmatrix} Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Prueba: Si tenemos en cuenta el siguiente dibujo:



$$\begin{array}{rcl} t(\bar{e}_1) & = & Cos(\alpha)\bar{e}_1 + Sin(\alpha)\bar{e}_2 \\ t(\bar{e}_2) & = & -Sin(\alpha)\bar{e}_1 + Cos(\alpha)\bar{e}_2 \end{array}$$

Por tanto obtenemos la matriz T_B descrita en el enunciado. ■

6.1.1 Procedimiento para hallar la matriz de un giro de ángulo dado en una base cualquiera.

Supongamos que nos dan una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ **no necesariamente ortonormal** y nos piden calcular la matriz de un giro de ángulo α en esta base con respecto a la orientación que define.

Los pasos para hallar la matriz de giro son:

1. Calcular una base $B' = \{\bar{u}'_1, \bar{u}'_2\}$ ortonormal.

2. Comprobar que esta base tiene la misma orientación que la base de partida, es decir $|M_{B'B}| > 0$. Si no la tuviese cambiamos el vector $\bar{u}'_1$ por $-\bar{u}'_1$.
3. La matriz de giro respecto a la base B' es:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

4. Hacemos el cambio de base de la matriz $T_{B'}$:

$$T_B = {M_{B'B}}^{-1} T_{B'} M_{B'B}.$$

Hay que tener en cuenta que, en todos aquellos pasos donde aparezca el producto escalar (o normas), hay que utilizar la correspondiente matriz de Gram respecto a la base en que se esté trabajando. Si la base en que se trabaja es ortonormal, la matriz de Gram es la identidad y el producto escalar el usual.

6.2 Simetrías en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 6.2 *Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ una base* **ortogonal** *de $\mathbb{R}^2$. La* **simetría respecto al eje generado por** *$\bar{e}_1$ tiene por matriz asociada:*

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prueba: Basta tener en cuenta que el eje de simetría es invariante, mientras que los vectores perpendiculares a él son cambiados de signo:

$$t(\bar{e}_1) = \bar{e}_1; \quad t(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2.$$

Observación 6.3 *También puede considerarse* **una simetría respecto al origen***, pero es equivalente a un giro de ángulo π. La matriz asociada a esta simetría respecto a cualquier base es $-Id$.*

6.2.1 Procedimiento para hallar la matriz de una simetría en una base cualquiera.

Supongamos que nos dan una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ **no necesariamente ortonormal** y nos piden calcular la matriz de una simetría respecto al eje generado por un vector $\bar{u}_1$.

Los pasos para hallar la matriz de la simetría son:

1. Completamos $\bar{u}_1$ a una base ortogonal: $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$.
2. La matriz de la simetría respecto a esta base será:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Hacemos el cambio de base de la matriz $T_{B'}$:

$$T_B = {M_{B'B}}^{-1} T_{B'} M_{B'B}.$$

6.3 Clasificación de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 6.4 *Toda transformación ortogonal t en $\mathbb{R}^2$ distinta de la identidad es un giro o una simetría respecto a un eje.*

Prueba: Sea T la matriz de t respecto a una base B ortonormal. Sabemos que:

$$TT^t = Id. \qquad |T| = \pm 1. \qquad \text{Los autovalores reales de } T \text{ son 1 ó } -1.$$

Hay las siguientes posibilidades:

1. T tiene un único autovalor real $\lambda = 1$ con multiplicidad 2. Entonces T es semejante a la identidad y por tanto de hecho $T = Id$.
2. T tiene un único autovalor real $\lambda = -1$ con multiplicidad 2. Entonces T es semejante a $-Id$ y de hecho $T = -Id$. Se trata de un giro de ángulo π o una simetría respecto al origen.
3. T tiene por autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Entonces T es semejante a la matriz

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En particular existe una base ortonormal B' respecto a la cual la matriz de t es la anterior. Deducimos que se trata de una simetría respecto a un eje. Teniendo en cuenta que dicho eje está formado por vectores que no varían por la simetría, el eje es el subespacio característico S_1.

4. T no tiene autovalores reales. Supongamos que T es de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Como $TT^t = Id$

$$a^2 + b^2 = 1; \quad ac + bd = 0; \qquad c^2 + d^2 = 1;$$

Además el polinomio característico es:

$$|T - \lambda Id| = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

Teniendo en cuenta que el discriminante es $(a+d)^2 - 4(ad - bc)$ para que no tenga autovalores reales tiene que cumplirse:

$$ad - bc > 0.$$

Podemos tomar:

$$a = Cos(\alpha), \quad b = Sin(\alpha); \qquad c = Sin(\beta), \quad d = Cos(\beta).$$

para ciertos valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Ahora:

$$\begin{array}{lllll} ac + bd = 0 & \Rightarrow & Cos(\alpha)Sin(\beta) + Sin(\alpha)Cos(\beta) = 0 & \Rightarrow & Sin(\alpha+\beta) = 0. \\ ad - bc > 0 & \Rightarrow & Cos(\alpha)Cos(\beta) - Sin(\alpha)Sin(\beta) > 0 & \Rightarrow & Cos(\alpha+\beta) > 0. \end{array}$$

Deducimos que $\alpha + \beta = 0$ y por tanto:

$$\begin{array}{l} c = Sin(\beta) = Sin(-\alpha) = -Sin(\alpha) = -a. \\ d = Cos(\beta) = Cos(-\alpha) = Cos(\alpha) = b. \end{array}$$

Vemos que T puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

y por tanto se trate de un giro de ángulo α respecto a la orientación dada por la base B. ■

Resumimos la clasificación en el siguiente cuadro:

Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$		
Autovalores	**Clasificación**	**Tipo**
$\{1,1\}$	*Identidad*	Directa
$\{1,-1\}$	*Simetría respecto a S_1.*	Inversa
$\{-1,-1\}$	*Simetría respecto al origen.* $\Updownarrow$ Giro de ángulo π.	Directa
no reales	*Giro de ángulo α:* $T_B = \begin{pmatrix} Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix}$ B base **ORTONORMAL.**	Directa

7 Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$.

Comenzaremos describiendo las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$.

7.1 Giros en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 7.1 *Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base* **ortonormal** *de $\mathbb{R}^3$ y α un ángulo cualquiera. El* **giro de ángulo α sobre el semieje de giro generador por $\bar{e}_1$ y con respecto a la orientación dada por la base** *B tiene por matriz asociada:*

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ 0 & -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Prueba: Basta tener en cuenta que el semieje de giro $\bar{e}_1$ queda invariante por el giro. Mientras que al plano perpendicular generado por la base ortonormal $\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ le aplicamos la matriz de giro en $\mathbb{R}^2$ vista en la sección anterior.

Observación 7.2 *Hay que tener en cuenta que para definir un giro en $\mathbb{R}^3$ son imprescindibles:*

1. *el semieje de giro (no sólo el eje).*
2. *la orientación que sirve de referencia.*
3. *el ángulo de giro.*

Los dos primeros datos son los que permiten identificar en que sentido se toman los ángulos positivos.

7.1.1 Procedimiento para hallar la matriz de un giro en $\mathbb{R}^3$ en una base cualquiera.

Supongamos que nos dan una base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ **no necesariamente ortonormal** y nos piden calcular la matriz respecto a la base B de un giro de ángulo α, semieje $\bar{v}$ y con la orientación dada por la base B.

Los pasos para hallar la matriz de giro son:

1. Calcular una base $B' = \{\bar{v}'_1, \bar{v}'_2, \bar{v}'_3\}$ **ortonormal**, de manera que
$$\bar{v}'_1 = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$$
2. Comprobar que esta base tiene la misma orientación que la de partida, es decir $|M_{B'B}| > 0$. Si no la tuviese cambiamos el vector $\bar{v}'_2$ por $-\bar{v}'_2$.
3. La matriz de giro respecto a la base B' es:
$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ 0 & -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

4. Hacemos el cambio de base de la matriz $T_{B'}$:

$$T_B = {M_{B'B}}^{-1} T_{B'} M_{B'B}.$$

Será util tener en cuenta que **si la base de partida B ya era ortonormal, entonces la matriz de paso $M_{B'B}$ es ortogonal y la inversa coincide con la traspuesta.**

Como antes, en todos aquellos pasos donde aparezca el producto escalar (o normas), hay que utilizar la correspondiente matriz de Gram respecto a la base en que se esté trabajando. Si la base en que se trabaja es ortonormal, la matriz de Gram es la identidad y el producto escalar el usual.

7.2 Simetrías en $\mathbb{R}^3$.

7.2.1 Simetrías respecto al origen.

Teorema 7.3 *Sea B una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$. La* **simetría respecto al origen** *tiene por matriz asociada $T_B = -Id$.*

Prueba: Basta tener en cuenta que la simetría respecto al origen invierte el signo de cualquier vector. ■

7.2.2 Simetría respecto a una recta.

Teorema 7.4 *Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base* **ortogonal** *de $\mathbb{R}^3$. La* **simetría respecto al eje generado por** *$\bar{e}_1$ tiene por matriz asociada:*

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prueba: Basta tener en cuenta que el eje de simetría es invariante, mientras que los vectores perpendiculares a él son cambiados de signo:

$$t(\bar{e}_1) = \bar{e}_1; \quad t(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2; \quad t(\bar{e}_3) = -\bar{e}_3.$$

7.2.3 Simetría respecto a un plano.

Teorema 7.5 *Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base* **ortogonal** *de $\mathbb{R}^3$. La* **simetría respecto al plano generado por** *$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ tiene por matriz asociada:*

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prueba: Basta tener en cuenta que el plano de simetría es invariante, mientras que los vectores perpendiculares a él son cambiados de signo:

$$t(\bar{e}_1) = \bar{e}_1; \quad t(\bar{e}_2) = \bar{e}_2; \quad t(\bar{e}_3) = -\bar{e}_3.$$

7.2.4 Procedimiento para hallar la matriz de una simetría en una base cualquiera.

Supongamos que nos dan una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ **no necesariamente ortonormal** y nos piden calcular la matriz de una simetría respecto al:

1. Eje generado por un vector $\bar{u}_1$.
2. Plano generado por un vector $\bar{u}_1, \bar{u}_2$.

Los pasos para hallar la matriz de la simetría son:

1. **Simetría respecto al eje generado por $\bar{u}_1$.**

   (a) Completamos $\bar{u}_1$ a una base ortogonal: $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$. En realidad sólo necesitamos que $\bar{u}_2, \bar{u}_3$ sean perpendiculares a $\bar{u}_1$.

   (b) La matriz de la simetría respecto a esta base será:

   $$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Hacemos el cambio de base de la matriz $T_{B'}$:

   $$T_B = {M_{B'B}}^{-1} T_{B'} M_{B'B}.$$

2. **Simetría respecto al plano generado por $\bar{u}_1, \bar{u}_2$.**

   (a) Completamos $\bar{u}_1$ a una base: $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, con $\bar{u}_3$ ortogonal al plano $\mathcal{L}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$.

   (b) La matriz de la simetría respecto a esta base será:

   $$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Hacemos el cambio de base de la matriz $T_{B'}$:

   $$T_B = {M_{B'B}}^{-1} T_{B'} M_{B'B}.$$

7.3 Clasificación de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 7.6 *Toda transformación ortogonal t en $\mathbb{R}^3$ distinta de la identidad es:*

- un giro, ó

- una simetría respecto a un punto, a una recta o a un plano, ó

- composición de un giro y una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

Prueba: Sea T la matriz de t respecto a una base B ortonormal. Sabemos que:

$$TT^t = Id. \qquad |T| = \pm 1. \qquad \text{Los autovalores reales de } T \text{ son } 1 \text{ ó } -1.$$

Hay las siguientes posibilidades:

1. T tiene un único autovalor real $\lambda = 1$ con multiplicidad 3. Entonces T es semejante a la identidad y por tanto de hecho $T = Id$.
2. T tiene un único autovalor real $\lambda = -1$ con multiplicidad 3. Entonces T es semejante a $-Id$ y de hecho $T = -Id$. Se trata de una simetría respecto al origen.
3. T tiene por autovalores $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = -1$, con multiplicidad 1. Entonces T es semejante a la matriz

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   En particular existe una base ortonormal B' respecto a la cual la matriz de t es la anterior. Deducimos que se trata de una simetría respecto a un plano. Teniendo en cuenta que dicho plano está formado por vectores que no varían por la simetría, el plano de simetría es el subespacio característico S_1.
4. T tiene por autovalores $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad 1 y $\lambda_2 = -1$, con multiplicidad 2. Entonces T es semejante a la matriz

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Razonando como antes vemos que t es una simetría respecto un eje correspondiente al subespacio característico S_1.
5. T tiene un único autovalor real $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 1. Entonces $\mathbb{R}^3$ puede descomponerse como:

$$\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_1^{\perp}$$

   donde $S_1^{\perp}$ es un subespacio 2-dimensional invariante por t. La restricción de t a $S_1^{\perp}$ es un transformación ortogonal que no tiene autovalores reales. Por la clasificación de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ sabemos que se trata de un giro.

   Por tanto existe una base ortonormal $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ con

$$S_1 = \{\bar{u}_1\} \quad \text{y} \quad S_1^{\perp} = \{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$$

   respecto a la cual la matriz asociada a t es:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ 0 & -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   y por tanto se trata de un giro de ángulo α respecto a la orientación dada por la base B' y el semieje $\bar{u}_1$.
6. T tiene un único autovalor real $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad 1. Razonando como antes deducimos que existe una base ortonormal $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ con

$$S_{-1} = \{\bar{u}_1\} \quad \text{y} \quad S_{-1}^{\perp} = \{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$$

   respecto a la cual la matriz asociada a t es:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ 0 & -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ 0 & -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   y por tanto se trate de la composición de un giro de ángulo α respecto a la orientación dada por la base B' y el semieje $\bar{u}_1$, con una simetría respecto al plano $S_{-1}^{\perp}$. ■

Resumimos la clasificación en el siguiente cuadro:

Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$		
Autovalores	**Clasificación**	**Tipo**
$\{1,1,1\}$	*Identidad*	Directa
$\{1,1,-1\}$	*Simetría respecto al plano S_1.*	Inversa
$\{1,-1,-1\}$	*Simetría respecto al eje S_1.*	Directa
$\{-1,-1,-1\}$	*Simetría respecto al origen.*	Inversa
1, mult=1.	*Giro de ángulo α respecto al semieje $\bar{u}_1$:* $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ 0 & -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix}$ $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ base **ORTONORMAL.** $S_1 = \mathcal{L}\{\bar{u}_1\}$ $S_1^{\perp} = \mathcal{L}\{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ Orientación dada por base B.	Directa
-1, mult=1.	*Composición de:* *- Giro de ángulo α respecto al semieje $\bar{u}_1$:* $T_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ 0 & -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix}$ $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ base **ORTONORMAL.** $S_{-1} = \mathcal{L}\{\bar{u}_1\}$ $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ Orientación dada por base B. *- Simetría respecto al plano $S_{-1}^{\perp}$.*	Inversa

7.4 Método alternativo de clasificación transformaciones ortogonales.

Expondremos un método alternativo para clasificar transformaciones ortogonales en dimensión 2 y 3. El resultado conocido en el que se basa es el siguiente:

Proposición 7.7 *El determinante y la traza de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base.*

Teniendo en cuenta esto y que, dependiendo de que tipo de transformación ortogonal se trate, hemos estudiado cuales son sus matrices asociadas respecto a bases ortonormales adecuadas, veamos como clasificar.

7.4.1 Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$.

Si la transformación ortogonal es una simetría respecto a una recta la matriz asociada respecto a una base ortonormal adecuada (uno de los vectores es el que genera el eje de simetría), vimos que es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos determinante -1 y traza 0.

Si la transformación ortogonal es un giro la matriz asociada respecto a una base ortonormal es:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Tenemos determinante 1 y traza $2cos(\alpha)$. En este caso están incluidas las situaciones particulares en las que el ángulo es 0 y por tanto la transformación es la identidad o el ángulo es de 180^o y la transformación es una simetría respecto al origen.

Vemos que la traza nos permite calcular el coseno del ángulo, de manera, que este puede ser escogido entre el intervalo $[0, \pi]$. El problema que hay que resolver es si este ángulo ha de tomarse con signo positivo o negativo, dependiendo de la orientación que estemos manejando.

Para ello, si trabajamos con la orientación dada por la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, consideramos la base $B' = \{\bar{e}_1, f(\bar{e}_1)\}$. Si ambas bases tienen la misma orientación, entonces el ángulo ha de ser tomado con signo positivo; si tienen distinta, el ángulo se toma con sentido negativo.

Resumimos todo esto en el siguiente cuadro:

Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$		
Orientación dada por $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. F matriz asociada en cualquier base		
Det(F)	**Traza(F)**	**Clasificación**
1	2	*Identidad*
1	-2	*Simetría respecto al origen.* $\Updownarrow$ Giro de ángulo π.
1	$\neq 2, -2$	*Giro de ángulo α:* $B' = \{\bar{e}_1, \bar{f}(e_1)\}$ Si $\lvert M_{B'B}\rvert > 0$, $\alpha = +arc\,cos(traza(F)/2)$. Si $\lvert M_{B'B}\rvert < 0$, $\alpha = -arc\,cos(traza(F)/2)$.
-1	0	*Simetría respecto a S_1*

7.4.2 Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$.

Estudiando, para cada tipo de transformación, la traza y el determinante, obtenemos la siguiente tabla de clasificación.

Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$		
Orientación dada por base B. F matriz asociada en cualquier base		
Det(F)	**Traza(F)**	**Clasificación**
1	3	*Identidad*
1	-1	*Simetría respecto a la recta* S_1
1	$\neq 3, -1$	*Giro de ángulo* α *respecto al semieje* $\bar{u}_1$*:* $\bar{u}_1 =$ autovector asociado al 1 $\bar{v}$ vector linealmentente independiente con $\bar{u}_1$ $B' = \{\bar{u}_1, \bar{v}, \bar{f}(v)\}$ Si $\lvert M_{B'B}\rvert > 0$, $\alpha = +arc\,cos((traza(F) - 1)/2)$. Si $\lvert M_{B'B}\rvert < 0$, $\alpha = -arc\,cos((traza(F) - 1)/2)$.
-1	-3	*Simetría respecto al origen.*
-1	1	*Simetría respecto al plano* S_1
-1	$\neq -3, 1$	Composición de giro y simetría: - *Giro de ángulo* α *respecto al semieje* $\bar{u}_1$*:* $\bar{u}_1 =$ autovector asociado al -1 $\bar{v}$ vector linealmentente independiente con $\bar{u}_1$ $B' = \{\bar{u}_1, \bar{v}, \bar{f}(v)\}$ Si $\lvert M_{B'B}\rvert > 0$, $\alpha = +arc\,cos((traza(F) + 1)/2)$. Si $\lvert M_{B'B}\rvert < 0$, $\alpha = -arc\,cos((traza(F) + 1)/2)$. - *Simetría respecto al plano* $S_{-1}^{\perp}$.