

## §2 GLEICHUNGEN UND IHRE UMFORMUNGEN

### Arbeitsblatt 3

#### Übungen zu §2.1 Linearen Gleichungen

2. a)  $4x = 48$     b)  $\frac{1}{6}x = 3$     c)  $y - 7 = 19$     d)  $a + 9 = 4$   
 $7x = -56$      $\frac{1}{7}x = -5$      $z + 3 = 42$      $\frac{2}{3}z = \frac{4}{5}$   
 $-6x = 42$      $-\frac{1}{3}x = 7$      $5u = -55$      $-\frac{7}{9}y = -\frac{14}{3}$   
 $-11x = -88$      $-\frac{1}{4}x = -12$      $\frac{1}{2}v = \frac{3}{4}$      $r - 3,4 = -1,1$   
 $0,9 \cdot x = 8,1$      $\frac{1}{5}x = \frac{7}{10}$      $-4r = -32$      $\frac{3}{4}x = -\frac{5}{8}$

3. a)  $3x + 11 = 20$     g)  $5x + 43 = 13$     m)  $10 - \frac{1}{3}x = 6$     s)  $8x + 17 = 21$   
b)  $9x - 7 = 11$     h)  $4x - 56 = -16$     n)  $5 - 12x = 5$     t)  $15 - 4x = 12$   
c)  $8x + 9 = 41$     i)  $19 - 4x = -9$     o)  $-5x - 3 = 7$     u)  $3x - 7 = -9$   
d)  $15 + 7x = 15$     j)  $\frac{1}{2}x + 6 = 10$     p)  $11x + 8 = 19$     v)  $-3x + 12 = 13$   
e)  $6x - 5 = 31$     k)  $-8x + 30 = 6$     q)  $\frac{1}{3}x - 3 = 0$     w)  $5x - 3 = 1$   
f)  $17 - 2x = 27$     l)  $\frac{1}{3}x - 5 = -12$     r)  $17 - 9x = 26$     x)  $6x + 11 = 16$

4. a)  $7 - y = 3$     c)  $2y - 5 = 17$     e)  $11 - 3r = 2$     g)  $7\frac{3}{4} - u = 1\frac{1}{2}$   
b)  $15 - z = 0$     d)  $72 - 8b = 64$     f)  $5 = 4a - 19$     h)  $3,3 - v = 1,6$

5. Bestimme die Lösungsmenge.

a)  $2x + 7x = 45$   
b)  $13x + 2x = 60$   
c)  $2,9x + 1,4x = 21,5$   
d)  $5x - 3x = 18$   
e)  $1\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 18$   
f)  $11x - 4x + 35$   
g)  $9x = 39 - 4x$     j)  $8x + 3 = 5x + 24$     m)  $7x + 18 + 20x = 93 + 16x - 4x$   
h)  $17x = 75 - 8x$     k)  $11x + 6 = 5x + 54$     n)  $2,4x + 31,5 = 0,5x + 69,5$   
i)  $45x = 16x - 87$     l)  $21x + 17 = 2x + 72 + 8x$     o)  $12\frac{5}{6}x + 18\frac{1}{2} = 3\frac{1}{3}x + 28$

$$\begin{array}{l|l} 10x = 5x + 40 & -5x \\ 10x - 5x = 5x + 40 - 5x & T \\ 5x = 40 & :5 \\ 5x : 5 = 40 : 5 & \\ x = 8 & \\ L = \{8\} & \end{array}$$

### 8.3 Lineare Gleichungen mit Klammern

1. Bestimme die Lösungsmenge. Mache auch die Probe.

a)  $16x + 19 = 5(4 + 3x)$   
b)  $13x + 10 = 2(6x + 7)$   
c)  $3(17 + 8x) = 70x - 87$   
d)  $5(2x + 17) = 7x + 112$   
e)  $25 + 13(x + 4) = 4x + 122$   
f)  $15x + 7(8 + 3x) = 15x + 182$   
g)  $5(2x + 15) - 9x = 69$   
h)  $3(7 - 2x) + 7x = 20$   
i)  $13x + 4(5 - 3x) = 18$   
j)  $7x + (x + 8) \cdot 3 = 4x$   
k)  $(3x + 2) \cdot 2 - 6x = 4$   
l)  $(5x - 3) \cdot 4 - 8x = 0$   
m)  $(12x + 7) \cdot 3 + 5x = 7$   
n)  $(2 - 3x) \cdot 8 + 4x = 6$   
o)  $(15x - 2) \cdot 3 + 6x = -23$

$$\begin{array}{l|l} 8(6 - 2x) + 41 = 9 & \text{Klammern auflösen} \\ 48 - 16x + 41 = 9 & \text{zusammenfassen} \\ 89 - 16x = 9 & -89 \\ -16x = -80 & :(-16) \\ x = 5 & \\ L = \{5\} & \end{array}$$

p)  $4(y - 3) - 2y = 5(3y + 1)$   
q)  $7(2z + 1) + 5z = 3(8z - 3)$   
r)  $18 + 5(3x - 2) = 2(7x + 1)$   
s)  $(13x - 5) \cdot 5 + 21 = (3 + 8x) \cdot 8$   
t)  $12a + 6(4 - 7a) = 9(2a + 4)$   
u)  $4x - 15(x - 1) = 2(6 - 3x)$   
v)  $(4x - 3) \cdot 5 - 6x = -4(5 + 9x)$

2. a)  $12 - (5 - x) = 10$   
 b)  $18 - (16 - x) = 1$   
 c)  $11x - 6(2x - 1) = 14$   
 d)  $14x - (8 + 3x) \cdot 5 = 0$   
 e)  $3(9x - 5) - 7(4x - 3) = 8$   
 f)  $5(7x + 15) - 2(17x + 25) = 20$   
 g)  $3(5 - 16x) - 7(9 - 7x) = 0$   
 h)  $6(5 + 6x) - (5x + 6) \cdot 7 = 3$   
 i)  $23x - 7(3x - 2) = x + 2$   
 j)  $26x - 5(5x + 10) = x - 50$   
 k)  $85x - (5 + 9x) \cdot 9 = 3x - 5$   
 l)  $6(5x - 4) - 3(10x + 2) = 10$   
 m)  $18 + 5(3x - 2) = 2(7x + 1)$   
 n)  $(13x - 5) \cdot 5 = (3 + 8x) \cdot 8 - 21$   
 o)  $5(9x - 8) - (8 + 3x) \cdot 15 = 13$   
 p)  $5(x + 9) - 7(x - 9) = 11(x - 2)$

$$\begin{array}{l|l} 32 + 9x = x - (2x + 8) & \text{Minusklammern auflösen} \\ 32 + 9x = x - 2x - 8 & \text{zusammenfassen} \\ 32 + 9x = -x - 8 & +x \\ 32 + 10x = -8 & -32 \\ 10x = -40 & :10 \\ x = -4 & \\ L = \{-4\} & \end{array}$$

- q)  $8(x - 1) - 3(x - 8) = 2(5 + x)$   
 r)  $3(2x + 5) - 4(x - 5) = x + 5$   
 s)  $5(7x - 6) - 9(8x - 3) = 2(8 - 9x)$   
 t)  $7(z - 5) - 6(2 - 3z) = 12(z + 1)$   
 u)  $(12y + 3) \cdot 4 - (9 - 7y) \cdot 5 = 8(3y - 5)$   
 v)  $6(5a - 1) - 13(2a + 5) = 2(7 - 2a)$   
 w)  $5(2c + 3) - 12(6 - c) = 11(4c + 7)$

3. a)  $100 + (x - 1) + (2x - 3) + (3x - 4) = 101 + (5x + 5)$   
 b)  $(13x - 1) + (14x + 2) - (12x - 3) = (8x - 1) + (6x + 8)$   
 c)  $2(3x - 12) - 6(5x - 37) + 3(7x + 16) = 10(2x + 4) + 2(6x - 37)$   
 d)  $13 - (7x - 9) + (23x - 11) - (18x + 19) = 3x - (2x + 13)$   
 e)  $525 - 3(2x - 3) + 3x = 7(3x - 21) + 42(3x - 1) - 4(x + 5) + 13$   
 f)  $2 - 5(9x - 4) + 3(1 - 5x) + 12x - 6(x - 4) - 2(5 - 6x) = 46$   
 g)  $25y - 1,5(4y - 7) - 2(5y + 8) = 30,5 + 2,5(2y - 8)$   
 h)  $12(8z + 7) - 5(16z - 3) = 18(4z + 3) + 31$   
 i)  $4,8(1,5a - 0,8) + 1,2(3,5a - 1,3) - 5(4,8a - 3,6) = 0$

4. a)  $(x + 5)(x - 4) = x^2 - 15$   
 b)  $(8 - x)(x + 7) = 52 - x^2$   
 c)  $(x - 3)(x + 2) = x^2 - 5$   
 d)  $(x + 6)(x + 2) = x^2 + 7x + 15$   
 e)  $(x - 4)(x - 7) = x^2 - 10x + 30$   
 f)  $(x - 1)(x + 6) = x^2 + 4x + 4$   
 g)  $(x + 3)(x + 5) - (x + 1)(x + 6) - 8 = 0$   
 h)  $(x - 8)(x + 14) + 1 = (x + 3)(x + 2)$   
 i)  $(x + 10)(x - 7) - (x + 1)(x + 3) = 2$

$$\begin{array}{l|l} (x + 7)(x - 4) = x^2 + 2 & \text{Klammern auflösen} \\ x^2 - 4x + 7x - 28 = x^2 + 2 & \text{zusammenfassen} \\ x^2 + 3x - 28 = x^2 + 2 & -x^2 \\ 3x - 28 = 2 & +28 \\ 3x = 30 & :3 \\ x = 10 & \\ L = \{10\} & \end{array}$$

5. a)  $(x - 3)^2 = x^2 - 3(x + 1)$   
 b)  $(x + 1)^2 = x^2 + x + 6$   
 c)  $x^2 + 1 = (x - 1)^2 + 3$   
 d)  $(x + 2)^2 - (x - 4)^2 = 11x - 8$   
 e)  $(x - 3)^2 + (x + 1)^2 + (3x - 5) = 2x^2$   
 f)  $(x^2 - 4) + (2x - 1)^2 + (3x + 5) = 5x^2$   
 g)  $(z - 4)^2 - (z + 8)^2 + 23z + 45 = 0$   
 h)  $(a + 5)^2 - (a + 6)^2 + a + 14 = 0$

6. a)  $(x + 1)^2 + (x + 4)^2 = (x + 2)^2 + (x + 3)^2 - 2x$   
 b)  $(z + 4)^2 - (z + 2)^2 + 2z = (z + 5)^2 - (z + 3)^2$   
 c)  $2(y - 1)^2 - (y + 1)^2 = (y - 7)^2$   
 d)  $(4x + 3)^2 + (3x + 5)^2 = (5x + 6)^2 + 10$   
 e)  $(2z - 3)^2 + (6z + 1)^2 = (4z - 2)^2 + 2(12z^2 - 13)$   
 f)  $(2y + 1)^2 - (3y - 2)^2 - 3 = (y - 3)^2 - (4y - 1)^2 + 10y^2$   
 g)  $(x + 5)(x - 5) + (x - 2)^2 = (x + 5)^2 + (x^2 + 52)$   
 h)  $9z(z + 5) - (3z + 2)(3z - 2) = (2z - 7)^2 - (2z + 5)(2z - 5) + 3$

## 10.1 Lösen von Bruchgleichungen, die auf lineare Gleichungen führen

Die Gleichungen  $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$ ,  $\frac{8}{x} + \frac{1}{2x} = 10$ ,  $\frac{3}{3x+4} + 1 = \frac{x+5}{x+2}$  heißen **Bruchgleichungen**, weil auf mindestens einer Seite des Gleichheitszeichens ein Bruchterm auftritt.

$\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{3} = 5$	· 6	Multiplikation mit einem gemeinsamen Nenner Ziel: „Brüche weg!“
$3(x+1) + 2(x-1) = 30$	T	(Klammern auflösen)
$3x+3+2x-2 = 30$	T	(zusammenfassen)
$5x+1 = 30$	- 1	
$5x = 29$	: 5	
$x = \frac{29}{5} = 5\frac{4}{5}$		
$L = \{5\frac{4}{5}\}$		

1. a)  $\frac{x}{12} = 7$     c)  $\frac{5x}{8} = 15$     e)  $\frac{7x}{8} = \frac{49}{64}$     g)  $\frac{x}{3} + 4 = 12$     i)  $\frac{x+8}{12} = 2$   
 b)  $\frac{z}{3} = 14$     d)  $\frac{4y}{5} = -20$     f)  $-\frac{3u}{7} = \frac{33}{35}$     h)  $11 - \frac{2z}{7} = 15$     j)  $\frac{2y+14}{15} = 16$
2. a)  $\frac{x}{2} - \frac{x}{5} = 12$     e)  $\frac{9z}{14} + \frac{4z}{21} = 35$     i)  $\frac{9y}{10} - \frac{4y}{5} = \frac{3y}{4} - 13$     m)  $\frac{16}{9} - \frac{4a}{3} = \frac{10a}{12} - 4$   
 b)  $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 3$     f)  $\frac{3y}{8} - \frac{2y}{5} = \frac{3}{4}$     j)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{8} = 23$     n)  $\frac{5z}{3} - 1 = \frac{7z}{5}$   
 c)  $\frac{x}{4} - \frac{x}{6} = \frac{1}{2}$     g)  $\frac{4x}{3} + \frac{2}{3} = 5x - \frac{1}{4}$     k)  $\frac{x}{2} - \frac{2x}{5} - \frac{2x}{15} = 21$     o)  $\frac{9y}{2} + \frac{7}{2} = 14y - 6$   
 d)  $\frac{3x}{8} - \frac{x}{6} = 5$     h)  $\frac{5x}{6} + \frac{3}{10} = \frac{2x}{5} - 1$     l)  $\frac{x}{4} + \frac{2}{3} = \frac{x}{5} + 5$     p)  $\frac{5r}{2} - \frac{r}{18} - \frac{r}{12} = 17$
3. a)  $\frac{x+4}{6} - \frac{x}{10} = 2$     e)  $\frac{7x+3}{5} = \frac{5x+23}{10}$     i)  $\frac{6y+1}{6} + \frac{23+3y}{8} = 2$   
 b)  $\frac{x}{3} + \frac{x-5}{7} = 5$     f)  $\frac{22x-7}{12} = \frac{8x+7}{5}$     j)  $\frac{x-9}{3} + \frac{3x-4}{4} = \frac{2x+3}{3}$   
 c)  $\frac{x}{6} - \frac{x-8}{8} = 2$     g)  $\frac{x-3}{6} - \frac{x+2}{8} = 6$     k)  $\frac{7x-5}{2} - \frac{3x+5}{5} = \frac{5x-3}{2}$   
 d)  $\frac{x+2}{24} = \frac{x-3}{16}$     h)  $\frac{5x+12}{6} - \frac{7x-9}{15} = 7$     l)  $\frac{3z-19}{5} = \frac{35-z}{4} + \frac{2z-25}{3}$

In der Bruchgleichung  $\frac{5}{x-1} = \frac{6}{x+2}$  tritt die Variable  $x$  im Nenner auf.

Der Term  $\frac{5}{x-1}$  ist für  $x = 1$  und der Term  $\frac{6}{x+2}$  für  $x = -2$  *nicht* definiert.

Die Zahlen 1 und -2 scheiden also von vornherein als Lösungen aus. Wir führen die Umformung daher unter der folgenden allgemeinen Annahme durch:

Sei  $x \neq 1$  und  $x \neq -2$ .

$$\frac{5}{x-1} = \frac{6}{x+2} \quad | \cdot (x-1)(x+2) \quad \begin{array}{l} \text{(Multiplikation mit einem gemeinsamen Nenner;} \\ \text{Ziel: „Brüche weg!“)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{5(x-1)(x+2)}{x-1} = \frac{6(x-1)(x+2)}{x+2} & \text{T (Kürzen)} \\ 5(x+2) = 6(x-1) & \text{T (Ausmultiplizieren)} \\ 5x + 10 = 6x - 6 & | -6x \\ -x + 10 = -6 & | -10 \\ -x = -16 & | \cdot (-1) \\ x = 16 & \\ L = \{16\} & \end{array}$$

4. a)  $\frac{1}{x} + 5 = 7$     d)  $\frac{6}{y} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$     g)  $\frac{4}{5u} + \frac{1}{10} = \frac{5}{6u}$     j)  $\frac{3}{2a} + \frac{5}{3a} = \frac{7}{4}$   
 b)  $\frac{3}{z} - 8 = 12$     e)  $\frac{5}{2x} - \frac{5}{6} = \frac{2}{x}$     h)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12x} + \frac{9}{8}$     k)  $\frac{1}{4} + \frac{7}{2x} = \frac{12}{2x} + \frac{3}{8}$   
 c)  $\frac{22}{x} - \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$     f)  $\frac{3}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3x}$     i)  $\frac{1}{y} + \frac{1}{3y} = \frac{4}{9}$     l)  $\frac{1}{8} - \frac{12}{x} = \frac{3}{4} - \frac{7}{x}$
5. a)  $\frac{12}{x+2} = 1$     d)  $\frac{5}{x+8} = \frac{1}{x}$     g)  $\frac{5}{x+2} = \frac{4}{x+1}$     j)  $\frac{x}{x-3} = \frac{x+12}{x}$   
 b)  $\frac{15}{x-3} = 4$     e)  $\frac{3}{5y+7} = \frac{1}{2y}$     h)  $\frac{13}{3x+5} = \frac{16}{5x-3}$     k)  $\frac{4x}{3x+5} = \frac{8x-5}{6x}$   
 c)  $\frac{4}{7z-5} = \frac{1}{11}$     f)  $\frac{4}{11x-65} = \frac{3}{5x}$     i)  $\frac{3}{5+y} = \frac{2}{5-y}$     l)  $\frac{2x-3}{4x-9} = \frac{5x+6}{10x}$
6. a)  $\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+2}$     c)  $\frac{1}{y-2} + \frac{1}{y+1} = \frac{2}{y-1}$     e)  $\frac{3}{3z-1} + \frac{4}{2z+1} = \frac{12}{4z+1}$   
 b)  $\frac{6}{x} - \frac{5}{x-2} = \frac{1}{x-1}$     d)  $\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x-1} = \frac{7}{x-2}$     f)  $\frac{2}{4x+5} + \frac{1}{2x-3} = \frac{5}{5x-2}$
7. a)  $\frac{x}{x+7} + \frac{x-4}{x-5} = 2$     d)  $\frac{x+11}{x+8} + \frac{2x+15}{x+10} = 3$     g)  $\frac{x}{x-4} - \frac{x}{x+4} = \frac{40}{x^2-16}$   
 b)  $\frac{x-7}{x+7} + \frac{x+10}{x-3} = 2$     e)  $\frac{5x+2}{x-2} - \frac{x-6}{x+6} = 4$     h)  $\frac{z+1}{z-2} - \frac{z-1}{z+2} = \frac{18}{z^2-4}$   
 c)  $\frac{z-10}{z-7} = 2 - \frac{z+3}{z-3}$     f)  $\frac{4y-1}{y-1} + \frac{2y+9}{y+3} = 6$     i)  $\frac{2x-3}{2x+3} - \frac{2x+3}{2x-3} = \frac{48}{4x^2-9}$
8. Löse nach  $x$  auf.  
 a)  $\frac{x}{a} + f = c$     c)  $\frac{ax-b}{c} = \frac{dx-e}{f}$     e)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{ax} + \frac{1}{bx} = c$   
 b)  $\frac{x-c}{d} = 1$     d)  $\frac{ax+bc}{b} + \frac{dx-e}{f} = c$     f)  $\frac{a}{x} + \frac{2}{bx} + \frac{3}{cx} = d$