6. Schnitt zweier Kegel

Der Schnitt eines Kegels und eines Zylinders darf wohl schon als recht anspruchsvoll gelten, allerdings setzt dieser letzte Fall noch einen Ticken drauf. Die z-Achse falle mit einer Kegelachse zusammen und der Ursprung liege in der Spitze des zugehörigen Kegels. Die x-Achse verlaufe parallel zu einem gemeinsamen Lot beider Kegelachsen. Der Abstand der vom Ursprung verschiedenen Spitze zur yz-Ebene sei s und entsprechend seien ihre Abstände zur xz-Ebene bzw. xy-Ebene gegeben als t bzw. u. Ferner sei der von beiden Kegelachsen (*genauer von einer Parallelen zur entsprechenden Kegelachse durch den Ursprung und der zweiten Kegelachse*) eingeschlossene Winkel gleich ϑ mit $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Zu guter Letzt seien die Radien beider Kegel R und r. Der einfachere Fall ist wieder $s = 0$, für welchen die Gleichungen

$$(K_0) \qquad x^2 + y^2 - R^2 z^2 = 0$$

$$\begin{aligned}(K_\vartheta) \qquad x^2 &+ \left(\frac{1}{2}(1-r^2) + \frac{1}{2}(1+r^2)cos(2\vartheta)\right)(y-t)^2 + \\ &- (1+r^2)sin(2\vartheta)(y-t)(z-u) + \\ &+ \left(\frac{1}{2}(1-r^2) - \frac{1}{2}(1+r^2)cos(2\vartheta)\right)(z-u)^2 = 0\end{aligned}$$

zu lösen sind. Ihre Differenz ergibt $-y^2 + R^2 z^2 + (\cdots) = 0$ und nach einer Umschrift hin zu Ausdrücken in $z - u$ findet man $-y^2 + R^2(z-u)^2 + 2R^2 u(z-u) + R^2 u^2 + (\cdots) = 0$, also eine (*höchstens*) quadratische Gleichung $a(z-u)^2 + b(z-u) + c = 0$ mit Koeffizienten parametrisiert in $y =: \eta$ wie gewohnt. Der Fall $a = R^2 + \frac{1}{2}(1-r^2) - \frac{1}{2}(1+r^2)cos(2\vartheta) = 0$ tritt ein für $\vartheta = \frac{1}{2} arccos\left(\frac{2R^2+1-r^2}{1+r^2}\right)$. Dann vereinfacht sich die Gleichung zu

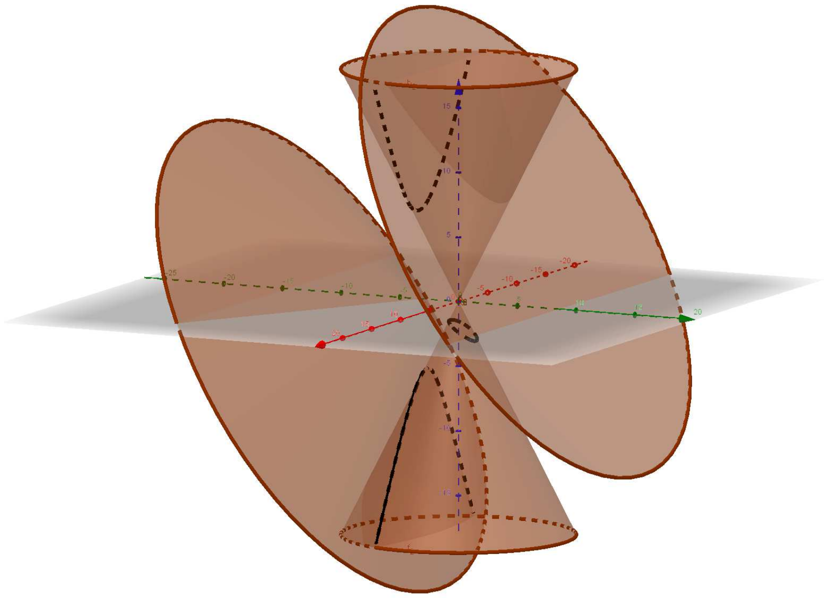
$$\left(2R^2 u - (1+r^2)sin(2\vartheta)(y-t)\right)(z-u) + R^2u^2 - y^2 + (1-r^2+R^2)(y-t)^2 = 0$$

Nach einfacher Rechnung sieht man, dass für den betrachteten Winkelwert von ϑ dann gilt $(1+r^2)sin(2\vartheta) = 2\sqrt{(1+R^2)(r^2-R^2)}$. Eine Auflösung nach z gelingt daher für $y - t \neq \frac{R^2 u}{\sqrt{(1+R^2)(r^2-R^2)}}$ und man findet nach einer Parametrisierung in $y =: \eta$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{R^2 z(\eta)^2 - \eta^2} \\ \eta \\ z(\eta) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad z(\eta) = u + \frac{\eta^2 - (1-r^2+R^2)(\eta-t)^2 - R^2u^2}{2\left(R^2 u - (\eta - t)\sqrt{(1+R^2)(r^2-R^2)}\right)}$$

Sonst erhält man für $\eta = t + \frac{R^2 u}{\sqrt{(1+R^2)(r^2-R^2)}}$ eine hier nicht weiter verfolgte Nebenbedingung, die womöglich auf eine zusätzliche Lösungsgerade führt. An eine Bestimmung der Definitionsmenge wird gleichfalls gar nicht erst gedacht…

Ein einfaches Beispiel erhält man für $R = 0.5$ und $r = 2$, für welche das kritische $\vartheta = 60°$ wird. Mit den weiteren Parametern $s = 0$, $t = -3$ und $u = 0$ ergibt sich folgendes Schnittbild:



Offensichtlich löst *geogebra* das gestellte Problem auch für einen *zu groß* gewählten Definitionsbereich mit Bravour.

Für $a = R^2 + \frac{1}{2}(1 - r^2) - \frac{1}{2}(1 + r^2)cos(2\vartheta) \neq 0$ hat man die in η parametrisierten weiteren Koeffizienten $b(\eta) = 2R^2u - (1 + r^2)sin(2\vartheta)(\eta - t)$ und $c(\eta) = R^2u^2 - \eta^2 + \frac{1}{2}\big(1 - r^2 + (1 + r^2)cos(2\vartheta)\big)(\eta - t)^2$. Setzt man diese in die Lösungsformel quadratischer Gleichungen ein, so erhält man wieder die gesuchten Lösungskurven.

Den Abschluss macht der Fall $s \neq 0$. Offenbar verbleibt jetzt bei der Differenzbildung ein Mischterm mit x und ein erneutes Einsetzen einer Auflösung nach x in eine der beiden Gleichungen ergäbe im Allgemeinen Terme in y und z von höherer Ordnung als zwei. Insbesondere müssten Lösungsformeln angewendet werden, die deutlich komplizierter als die der quadratischen Gleichung sind. Einen möglichen Ausweg stellt jedoch die Wahl von ω in den beiden Gleichungen

$$(K_\omega) \quad x^2 + \left(\frac{1}{2}(1-R^2) + \frac{1}{2}(1+R^2)cos(2\omega)\right)y^2 - (1+R^2)sin(2\omega)yz + \\ + \left(\frac{1}{2}(1-R^2) - \frac{1}{2}(1+R^2)cos(2\omega)\right)z^2 = 0$$

$$(K_{\omega+\vartheta}) \quad (x-s')^2 + \left(\frac{1}{2}(1-r^2) + \frac{1}{2}(1+r^2)cos\big(2(\omega+\vartheta)\big)\right)(y-t')^2 + \\ - (1+r^2)sin\big(2(\omega+\vartheta)\big)(y-t')(z-u') + \\ + \left(\frac{1}{2}(1-r^2) - \frac{1}{2}(1+r^2)cos\big(2(\omega+\vartheta)\big)\right)(z-u')^2 = 0$$

der Gestalt dar, dass sich auch die z^2-Glieder bei der Differenzbildung wegheben. Darin ergeben sich die Parameter s', t', u' aus den ungestrichenen Parametern wie folgt:

Ohne zusätzliche Drehung um ω hätte man das Gleichungssystem

$$(K_0) \quad (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$(K_\vartheta) \quad (x-s, y-t, z-u){M_\vartheta}^T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}M_\vartheta\begin{pmatrix} x-s \\ y-t \\ z-u \end{pmatrix} = 0$$

wie oben zu lösen. Mit dem Übergang zu neuen Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_\omega \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ folgt nun

$\begin{pmatrix} x-s \\ y-t \\ z-u \end{pmatrix} = M_\omega \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = M_\omega \left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - {M_\omega}^T \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}\right] =: M_\omega \begin{pmatrix} x'-s' \\ y'-t' \\ z'-u' \end{pmatrix}$ und es ist

$\begin{pmatrix} s' \\ t' \\ u' \end{pmatrix} = {M_\omega}^T \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$. Da der Unterschied erst am Schluss wichtig wird, wenn die Schnittsituation von *geogebra* graphisch dargestellt wird, wird im Weiteren auf die Striche verzichtet.

Man löse also zunächst die Gleichung

$$\frac{1}{2}(1-R^2)-\frac{1}{2}(1+R^2)cos(2\omega)=\frac{1}{2}(1-r^2)-\frac{1}{2}(1+r^2)cos\big(2(\omega+\vartheta)\big)$$

$$\Leftrightarrow\quad -(1+R^2)cos(2\omega)+(1+r^2)cos(2\omega+2\vartheta)=R^2-r^2.$$

Betrachtet man die linke Seite im Komplexen, so kann man sie auch schreiben als $-(1+R^2)e^{2i\omega}+(1+r^2)e^{2i(\omega+\vartheta)}=\big(-(1+R^2)+(1+r^2)e^{2i\vartheta}\big)e^{2i\omega}=A\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{2i\omega}=A\cdot e^{i(2\omega+\varphi)}$, worin φ das *Argument* der komplexen Zahl $z_0=-(1+R^2)+(1+r^2)e^{2i\vartheta}$ und $A=\left|-(1+R^2)+(1+r^2)e^{2i\vartheta}\right|=\sqrt{(1+R^2)^2+(1+r^2)^2-2(1+R^2)(1+r^2)cos(2\vartheta)}$ ihr *Betrag* ist. Wieder im Reellen lautet die Gleichung sodann $A\cdot cos(2\omega+\varphi)=R^2-r^2$ und es folgte $\omega=\frac{1}{2}\left(-\varphi+arccos\left(\frac{R^2-r^2}{A}\right)\right)$.

Da A stets mindestens gleich $\sqrt{\big((1+R^2)-(1+r^2)\big)^2}=|R^2-r^2|$ ist, folgt $\left|\frac{R^2-r^2}{A}\right|\leq 1$ für $A\neq 0$ und die obige Auflösung ist statthaft. Sonst müsste $R=r$ und $cos(2\vartheta)=1$ sein, also ist tatsächlich nur der Spezialfall gleicher Radien und $\vartheta=0$ kritisch. Hierfür kann $\omega=0$ gewählt werden und die Kegelgleichungen vereinfachen sich zu

(I) $\quad x^2+y^2-R^2z^2=0$

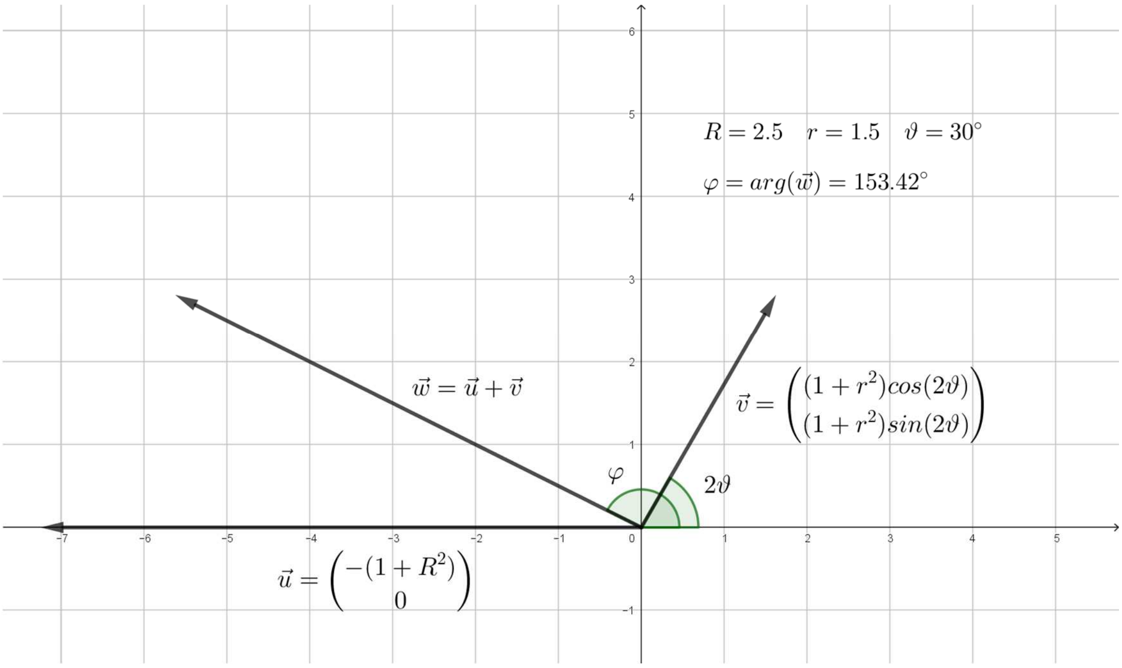
(II) $\quad (x-s)^2+(y-t)^2-R^2(z-u)^2=0$

Ihre Differenz ergibt die Gleichung $-2sx+s^2-2ty+t^2+2R^2uz-R^2u^2=0$ und da $s\neq 0$ vorausgesetzt wurde, folgt $x=\frac{1}{2s}(-2ty+2R^2uz+s^2+t^2-R^2u^2)$. Eingesetzt in Gleichung (I) ergibt dies

$$\left(\frac{R^2u^2}{s^2}-1\right)R^2z^2+\frac{R^2u}{s^2}(-2ty+s^2+t^2-R^2u^2)z+y^2 \\ +\frac{1}{4s^2}(-2ty+s^2+t^2-R^2u^2)^2=0$$

Für $Ru\neq s$ ist diese Gleichung quadratisch in z und kann wie üblich weiter aufgelöst werden. Sonst vereinfacht sich die Gleichung zu $\frac{Rt}{s}(-2y+t)z+y^2+\frac{t^2}{4s^2}(-2y+t)^2=0$ und kann gleichfalls wie üblich weiter aufgelöst werden.

In den Fällen $A \neq 0$ ist nun noch das *Argument* φ zu bestimmen. Dies kann in *geogebra* mit Hilfe der Vektorrechnung sehr komfortabel erfolgen. Da φ in den ersten und zweiten Quadranten weist, führte eine Berechnung über den Arcustangens in vielen Fällen zu einer Phasenverschiebung von π, wodurch die Beschreibung unnötig verkompliziert würde.



Nach diesen Vorbereitungen führt die Differenz der Gleichungen (K_ω) und $(K_{\omega+\vartheta})$ auf eine in x und z lineare Gleichung. Mit den weiteren Abkürzungen

$n_\omega = \frac{1}{2}(1-R^2) - \frac{1}{2}(1+R^2)cos(2\omega)$ und $n_{\omega+\vartheta} = \frac{1}{2}(1-r^2) - \frac{1}{2}(1+r^2)cos\big(2(\omega+\vartheta)\big)$

$p_\omega = \frac{1}{2}(1-R^2) + \frac{1}{2}(1+R^2)cos(2\omega)$ und $p_{\omega+\vartheta} = \frac{1}{2}(1-r^2) + \frac{1}{2}(1+r^2)cos\big(2(\omega+\vartheta)\big)$

lautet obige Bedingung $n_\omega = n_{\omega+\vartheta}$ und es gilt $p_{\omega+\vartheta} = p_\omega + (R^2 - r^2)$. Da $s \neq 0$ vorausgesetzt wurde, ergibt sich die Auflösung $x = m(y) \cdot z + n(y)$ mit

$$m(y) = \frac{1}{2s} \cdot \left[(1+R^2)sin(2\omega) \cdot y - (1+r^2)sin\big(2(\omega+\vartheta)\big) \cdot (y-t) - 2u \cdot n_\omega\right]$$

$$n(y) = \frac{1}{2s} \cdot \Big[\big(p_\omega + (R^2-r^2)\big) \cdot (y-t)^2 - p_\omega \cdot y^2 + u(1+r^2)sin\big(2(\omega+\vartheta)\big) \cdot (y-t) \\ + u^2 \cdot n_\omega + s^2\Big].$$

Die Einsetzung in (K_ω) liefert schließlich die in z (*höchstens*) quadratische Gleichung

$$\left[\big(m(y)\big)^2 + n_\omega\right] \cdot z^2 + [2m(y)n(y) - (1+R^2)sin(2\omega) \cdot y] \cdot z + \left[\big(n(y)\big)^2 + p_\omega \cdot y^2\right] = 0$$

$$A(y) \cdot z^2 + B(y) \cdot z + C(y) = 0.$$

Tatsächlich verarbeitet *geogebra* die resultierenden Mammutterme klaglos. Die Auflösungen nach z können in $x = m(y) \cdot z + n(y)$ eingesetzt werden und mit der üblichen Parametrisierung $y = \eta$ folgen die Schnittkurven

$$\gamma(\eta) = \begin{pmatrix} m(\eta) \cdot z(\eta) + n(\eta) \\ \eta \\ z(\eta) \end{pmatrix}$$

in der gewohnten Weise.