Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

LEIBNIZ Calculus – Historische Aspekte der Analysis dynamisch visualisiert

Die Ursprünge der Analysis und auch die heutigen Schreibweisen sind wesentlich mit dem Namen LEIBNIZ verbunden. Die historischen Ansätze und Ideen sollen kurz vorgestellt werden und dann mit GeoGebra dynamisch visualisiert und für den heutigen Unterricht fruchtbar gemacht werden.

1. Differenziale, Differenzialquotient und charakteristisches Dreieck

Differenziale wurden zu LEIBNIZ Zeiten als beliebig kleine, aber von Null verschiedene Objekte verstanden, aus denen dann das Verhältnis, der Differenzialquotient gebildet wurde. So wurde die Steigung der Tangente (Ableitung von f) als Quotient aus derartigen Differenzialen bestimmt, die Existenz der Tangente (im heutigen Sinne: Differenzierbarkeit) wurde damals einfach unterstellt. Die Differenziale dx und dy als Katheten und ds als Hypotenuse bildeten an einem Punkt P des Graphen von f ein infinitesimales Dreieck, das die Steigung der Kurve/ der Tangente festlegte und charakteristisches Dreieck genannt wurde. Dieses infinitesimale Dreieck wollte man sichtbar machen, indem man es längs der Tangente vergrößert zeichnete bzw. über die Normale ein ähnliches Dreieck konstruierte (Abb. 1).

Der aus heutiger Sicht ‚unstrenge' Umgang mit dem Unendlichkleinen bzw. dem Unendlichen ermöglichte einerseits große Entwicklungen, führte andererseits aber zu Problemen und Paradoxien, was erst zwei Jahrhunderte später von WEIERSTRAß, CAUCHY und RIEMANN überwunden werden konnte.

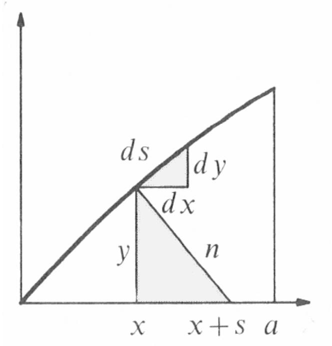

Abb. 1: Das charakteristische Dreieck bei LEIBNIZ (WALTER 2004, S. 234)

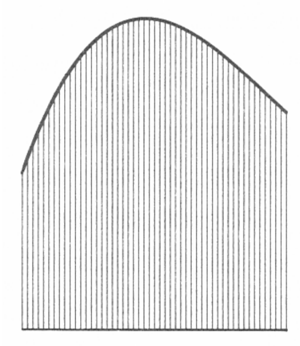

Abb. 2: CAVALIERIS Indivisiblenmethode (WALTER 2004, S. 193)

2. Indivisible, Flächeninhalte und Kurvenlänge

Die Vorstellung von ‚Indivisiblen' als unteilbar kleinsten Größen kommt von den antiken Atomisten und wurde in der Entwicklung der Analysis insbesondere von CAVALIERI und LEIBNIZ vertreten.

„Die Indivisiblen sind unendlich dünne Gebilde, die eine um Eins kleinere Dimension besitzen als das von ihnen in ihrer Gesamtheit gebildete stetige Ganze.“ (WUßING 1979, S. 159). Dabei steht man nun vor dem Problem, wie man dies visualisiert. Wir stellen uns hier Flächen aus unendlich vielen, unendlich dünnen parallelen ‚rechteckigen Streifen‘ zusammengesetzt vor, die mit dem Differenzial dx als einer Seite und $f(x)$ als der anderen Seite dann jeweils den Flächeninhalt $dy = f(x) \cdot dx$ haben und alle aufsummiert werden (Abb. 2). Ähnlich stellte man sich die Kurve, den Graphen von f, aus unendlich vielen indivisiblen Kurvenstückchen $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ bestehend vor (COLERUS 1934, S. 267).

3. Dynamische Visualisierung I

Man kann Abb. 1 dynamisieren, indem man zum infinitesimalen Dreieck dx-dy-ds ein ähnliches Tangenten-Dreieck konstruiert, so dass dx auf die Länge Δx vergrößert wird und dy und ds entsprechend (Abb. 3a).

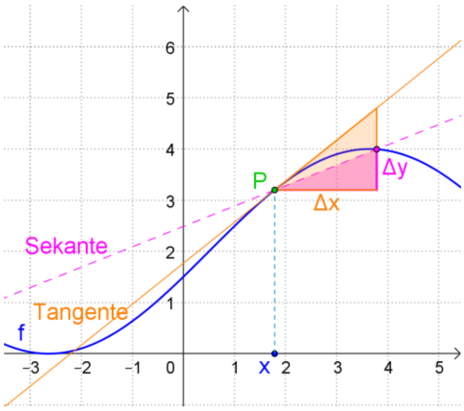

Abb. 3a: Charakteristisches Dreieck I

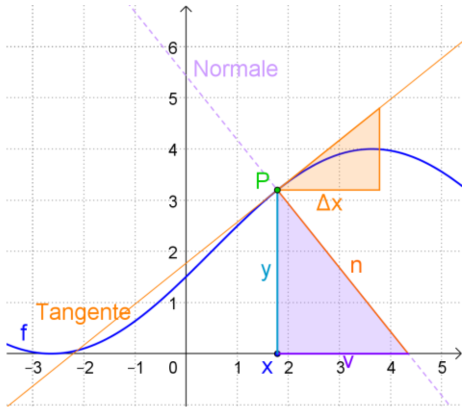

Abb. 3b: Charakteristisches Dreieck II

In der dynamischen Konstruktion (hier mit GeoGebra) kann man auch den Term von f ändern und die Lage des Punktes P auf dem Graphen. Vor allem kann man aber auch den Wert von Δx variieren. Damit können wir die Größe des Tangenten-Dreiecks in Abb. 3a ändern und dieses Dreieck ‚schrumpfen‘. Natürlich können wir diesen Prozess in der GeoGebra-Konstruktion nicht ad infinitum durchführen, sondern bis nur zu einer kleinen unteren Grenze, hier $\Delta x = 0.0001$. Wahlweise können wir dabei auch das Sekanten-Dreieck Δx-Δy-Δs mit einblenden und den Annäherungsprozess der Sekanten an die Tangente, die Annäherung des Sekanten-Dreiecks Δx-Δy-Δs an das Tangenten-Dreieck verfolgen und berechnen. Wenn wir dazu die Funktionenlupe einsetzen, sehen wir, dass das Differenzial-Dreieck aufgrund des Zoomens im zweiten Grafikfenster stets in gleicher Größe erscheint.
All dies kann man aber nicht auf dem Papier erleben, dazu braucht man dynamische Konstruktionen (ELSCHENBROICH 2018, 2019).

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, nach der Idee von LEIBNIZ und PASCAL mit Hilfe der Normalen ein ähnliches Dreieck *y-v-n* bis zur *x*-Achse zu konstruieren (Abb. 3b), das unverändert bleibt, wenn Δx variiert wird.

4. Dynamische Visualisierung II

Die Dynamisierung von Abb. 2 führen wir hier am Beispiel eines (Halb-)Kreises und der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ durch (natürlich können auch andere Funktionen eingegeben werden). Die Fläche zwischen dem Graphen von *f* und der *x*-Achse wird mit achsenparallelen Indivisiblen gefüllt.

Um das Prinzip zu verstehen, gibt es eine Anzahl *n* der Unterteilungen, die automatisch den Wert Δx festlegt und wir betrachten *n* Rechtecke $f(x) \cdot \Delta x$, zunächst für kleine *n* und zugehörige große Δx. Die Dynamisierung erfolgt dadurch, dass dieser Wert von *n* verändert, vergrößert werden kann. Man sieht für zunächst kleine *n* deutlich, dass wir hier äquidistante Mittensummen haben (Abb. 4a). Links und rechts außen ist in diesem Fall $f(x) = 0$. Einen besonderen Effekt können wir neben dem Erhöhen von *n* auch noch dadurch erzielen, dass wir den Halbkreis dynamisch von links nach rechts füllen lassen (ELSCHENBROICH & SEEBACH 2018, S. 91).

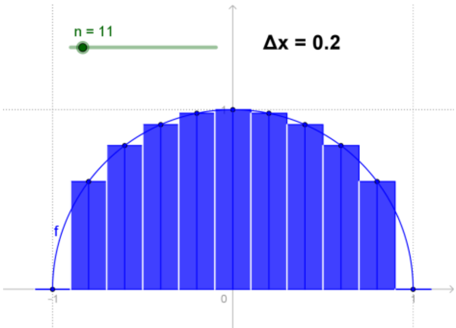

Abb. 4a: Halbkreis und achsenparallele Strecken als Indivisible

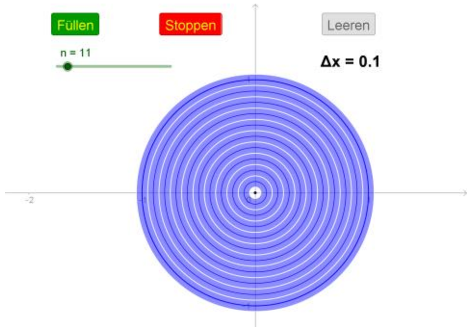

Abb. 4b: Vollkreis und konzentrische Kreislinien als Indivisible

Eine andere Möglichkeit, den Kreis aus indivisiblen Objekten zusammenzusetzen, besteht darin, konzentrische Kreislinien der ‚Breite' dx zu wählen (Abb. 4b). Solche nichtparallelen Objekte können aber auch Probleme mit sich bringen, wie aus klassischen Paradoxien bekannt ist. Dass man dies hier korrekt durchführen kann, erklärt sich anschaulich dadurch, dass man die Kreisringe ‚aufschneiden' kann und nebeneinander ‚aufgestellt' als senkrechte parallele Indivisible zu einer Funktion $g(x) = 2\pi x$ sehen kann.

Im Vortrag wurden dann auch noch Rotationskörper mit Zylinderscheiben $\pi f^2(x) \cdot dx$ als Indivisible und Kurvenlängen mit $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als Indivisible betrachtet (vgl. Elschenbroich 2019), was hier aber aus Platzgründen nicht ausgeführt werden kann.

5. Differenziale & Indivisible heute und ihr didaktisches Potential

Differenziale und Indivisible sind wegen des nebulösen und nicht unproblematischen Umgangs mit dem Unendlichen heute weitgehend aus Schule und Hochschule verschwunden. Wie kann man ihnen auch heute Sinn geben?

Früher wurde von Differenzialen ausgehend der Differenzialquotient und damit die Steigung der Tangente, der Wert $f'(x)$ bestimmt. Wenn man heute in der Näherungsrechnung mit Differenzialen arbeitet, so erhält man von der Ableitung $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ausgehend $dy = f'(x) \cdot dx$. Weiter ist dann $dx = \Delta x$ und wir können damit $\frac{dy}{dx}$ tatsächlich als Quotienten von diesen Differenzialen handhaben. Diese Differenziale sind dann aber nicht mehr ‚unendlich klein'. Für immer kleineres Δx nähert sich dann Δy immer mehr dy an.

Für die Indivisiblen kann man die RIEMANNsche Integral-Definition mit ‚passenden' Zwischenpunkten ξ_i für Zerlegungen Z des Intervalls [a, b] aufgreifen. Hier hätten wir die spezielle Situation, dass die Zerteilung äquidistant ist und die ξ_i immer in der Mitte des Intervalls sitzen, man könnte also von ‚Mittensummen' sprechen.

Die Thematisierung der Denkweise von LEIBNIZ hat weiterhin ein bedeutendes didaktisches Potential:

1. Sie ist geistesgeschichtlich und mathematikgeschichtlich interessant.
   - Woher haben denn Differenzialrechnung und Differenzialquotient ihren Namen?
   - Woher kommt die Differenzial- und Integral-Schreibweise?
2. Sie ermöglicht in der dynamischen Visualisierung einen genetischen Zugang zu Grundvorstellungen und zentralen Ideen der Analysis.
3. Man kann damit einfach Ableitungs- und Integrationsregeln finden.

Literatur

ELSCHENBROICH, H.-J. (2019): Historische Aspekte der Analysis - dynamisch visualisiert. In: PINKERNELL, G. & SCHACHT, F. (Hrsg.) (2019). Digitalisierung fachbezogen gestalten. Hildesheim: Franzbecker Verlag.

ELSCHENBROICH, H.-J. (2018): Leibniz Calculus. GeoGebra Book. www.geogebra.org/m/hymsqdyg

ELSCHENBROICH, H.-J. & SEEBACH, G. (2018): Funktionen erkunden. Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra. Friedrich Verlag, Velber

COLERUS, E. (1934): Vom Einmaleins zum Integral. Paul Szolnay Verlag, Berlin-Wien-Leipzig

WALTER, W. (2004): Analysis 1. 7. Auflage, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg

WUßING, H. (1979): Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften