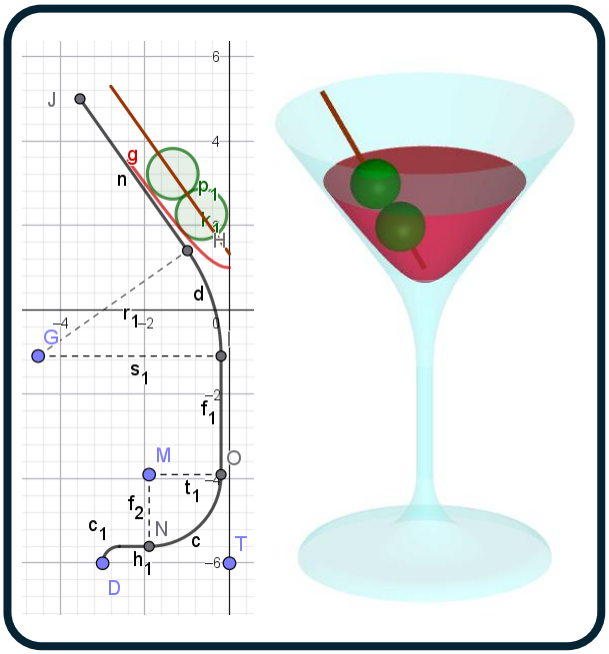
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

semrm Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia

VI DÍA DE GEOGEBRA

¡Brindemos con GeoGebra!



Hipérbolas, asíntotas, tangencias, máximos, mínimos, puntos de inflexión… vermut y cerveza.

Samuel Cortés García
s.cortesgarcia@edu.gva.es

https://www.geogebra.org/u/samuel_cortes

IES PUÇOL (Valencia)
SEMCV Al-Khwarizmi

Introducción

¿Qué tienen que ver una hipérbola, una tangencia, un punto de inflexión y una copa de vermut?

En este taller partiremos de tres problemas matemáticos que, aparentemente, no tienen mucho que ver entre sí. Sin embargo, la solución de cada uno nos proporcionará las herramientas necesarias para construir, mediante GeoGebra, tres objetos tridimensionales: una copa de vermut y dos botellines de cerveza.

Los tres problemas nos llevarán a trabajar con distintos conceptos del análisis y la geometría: el estudio de una función irracional asociada a una hipérbola, prestando especial atención a sus asíntotas oblicuas; la construcción de una curva que sea tangente a dos rectas paralelas en puntos determinados; y, finalmente, la unión de dos rectas mediante una curva que presente un punto de inflexión entre los puntos de conexión.

Una vez resueltos estos problemas, utilizaremos las soluciones obtenidas como tramos de las curvas que definirán el perfil vertical de nuestros objetos. Completaremos estos perfiles mediante segmentos, arcos de circunferencia y problemas de tangencia, para conseguir formas suaves y realistas. Puesto que los tres objetos son superficies de revolución, el paso siguiente será llevar nuestros diseños a la ventana 3D de GeoGebra.

Será entonces cuando entraremos en la parte más creativa: propiedades, colores, opacidad, iluminación y otros detalles nos permitirán transformar una construcción matemática en un objeto tridimensional que resulte lo más realista posible.

Durante el taller presentaremos los tres problemas y los tres objetos finales, pero construiremos uno de ellos paso a paso junto con los participantes, recorriendo todo el proceso: desde el problema matemático inicial hasta el modelo 3D terminado.

Documentos y archivos disponibles en: https://www.geogebra.org/m/awxteduh

A. Hipérbolas y Vermut.

PRIMERA PARTE: SECCIÓ PLANA

Considera la hipérbola de ecuación:

$$y^2 - 2x^2 = 1$$

(A1) Obtén la expresión analítica de las dos funciones cuyas gráficas forman la hipérbola anterior.

SOL: $f(x) = \sqrt{1+2x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{1+2x^2}$

De las dos funciones irracionales obtenidas, vamos a estudiar la función positiva.

(A2) Estudia su dominio y sus asíntotas.

SOL:

- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- *No tiene asíntotas verticales ni horizontales.*
- *Tiene dos asíntotas oblicuas:* $\begin{cases} y = -\sqrt{2}x \ por \ -\infty \\ y = \sqrt{2}x \ por \ +\infty \end{cases}$

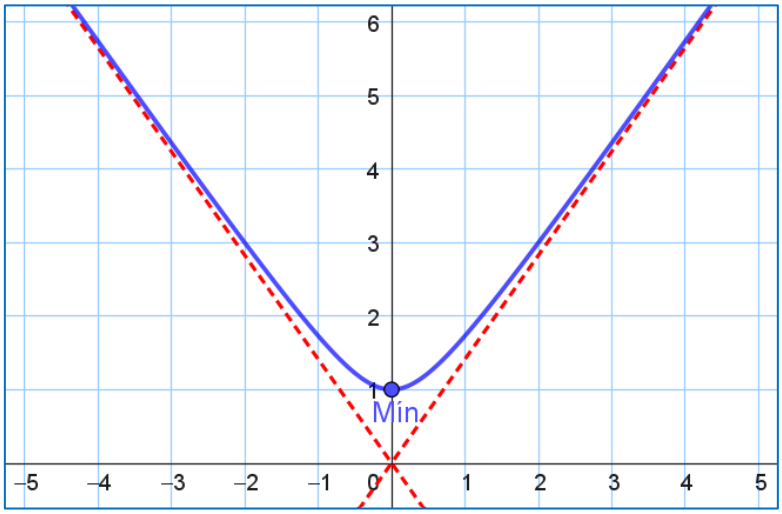
(A3) Estudia su monotonía y extremos relativos.

SOL:

- $f(x)$ *es decreciente en* $]-\infty, 0[$ *y en* $]0, +\infty[$
- $f(x)$ *tiene un mínimo relativo en el punto* $(0,1)$

(A4) Representa gráficamente la función con sus asíntotas

SOL:



Ahora vamos a representar en GeoGebra, la función junto con sus asíntotas, y va a ser la base de nuestra copa de vermut.

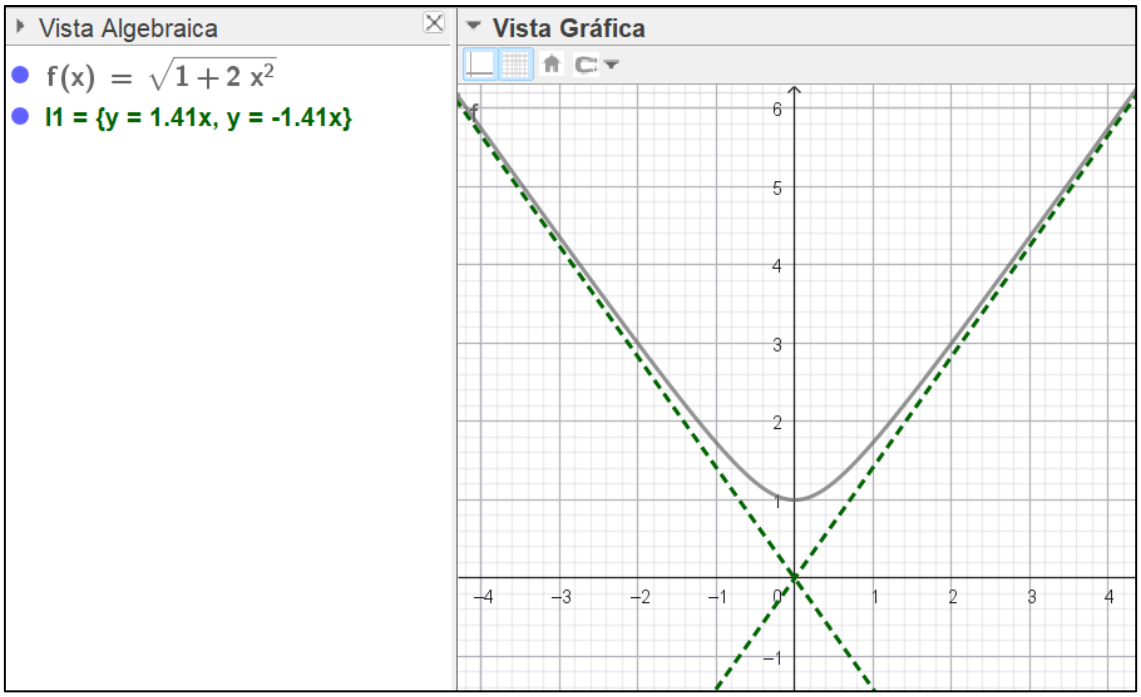
(A5) Representa la función $f(x) = \sqrt{1+2x^2}$. Para ello basta escribir en la barra de entrada:

```
f(x) = sqrt(1+2x²)
```

Y a continuación GeoGebra nos calculará las asíntotas con la orden:

```
Asíntota(f)
```

(Recuerda que en la traducción al español de GeoGebra es necesario utilizar los acentos en los comandos)



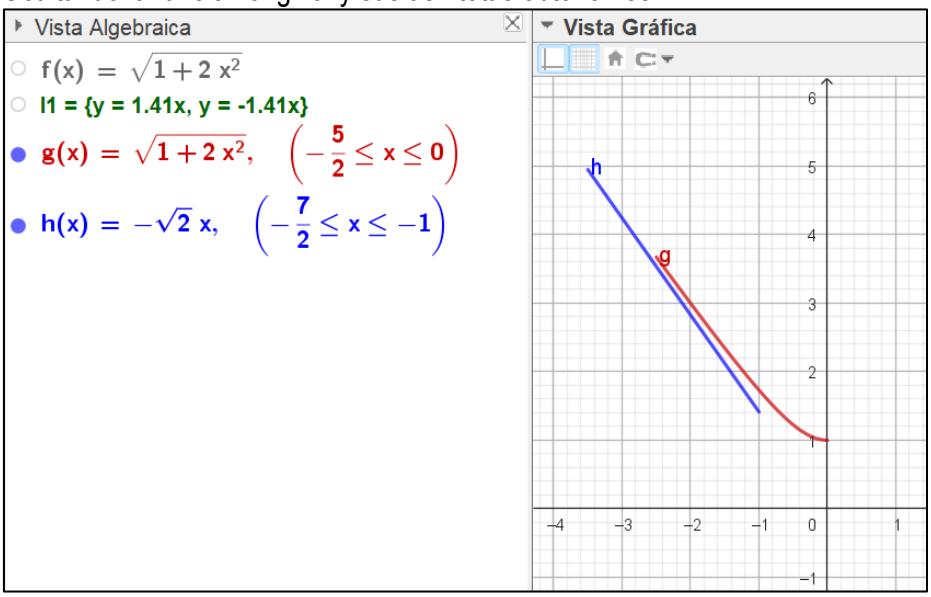
(A6) Vamos a dibujar solamente el tramo de la función que nos sirve para generar las superficies, con el comando:

Función (<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)

```
Función(f,-2.5,0)
```

```
Función(y=-sqrt(2)x,-3.5,-1)
```

Ocultando la función original y sus asíntotas obtenemos:



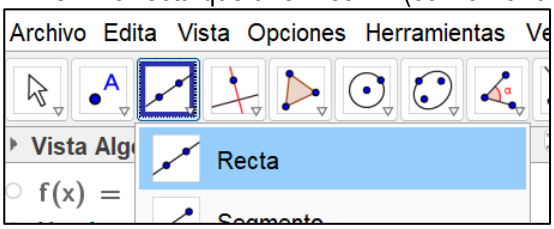
(A7) A continuación, vamos a representar algunos elementos de la sección vertical de la copa:

- Los puntos A y B en los que empieza y termina la función h

```
A = (-7 / 2, h(-7 / 2))
```

```
B = (-1, h(-1))
```

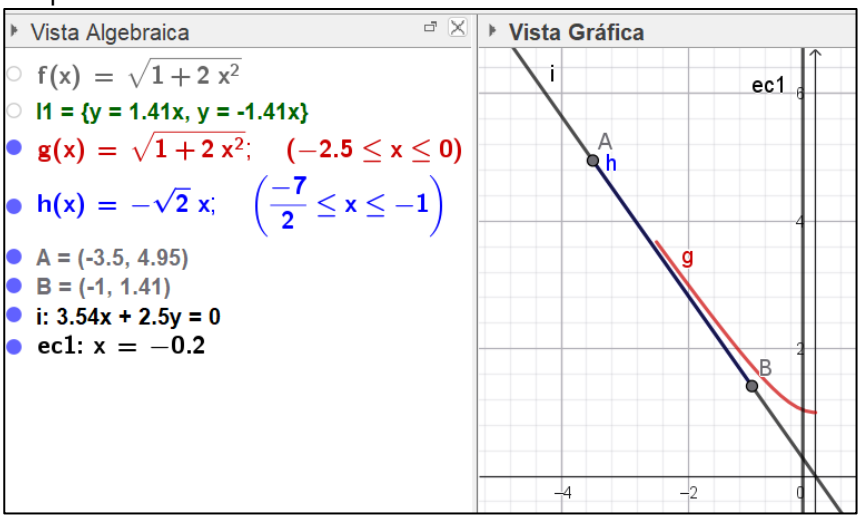
- La recta que une A con B (con la herramienta **Recta**).



- Una recta vertical:

```
x = -0.2
```

Obteniendo por el momento:



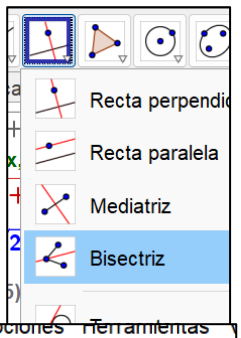
- Arco de circunferencia tangente a la **recta i** por el **punto B**, y tangente a la **recta ec1**. Para ellos, los siguientes pasos:

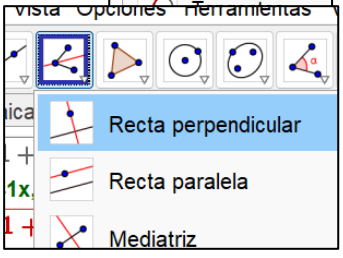
  - Bisectriz de las dos rectas.

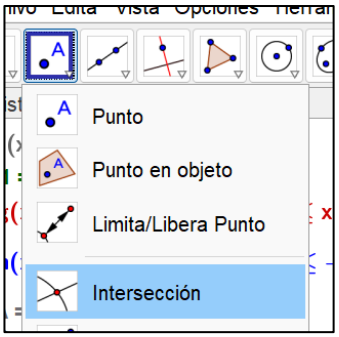
    *Nos genera las dos bisectrices, llamadas **recta j** y **recta k***

  - Perpendicular a la **recta i** por el **punto B**.

    *Nos genera la **recta l***







- Intersección de las **rectas l y k**

  Nos genera el ***punto C***

- Perpendicular a la **recta ec1** pasando por el **punto C**

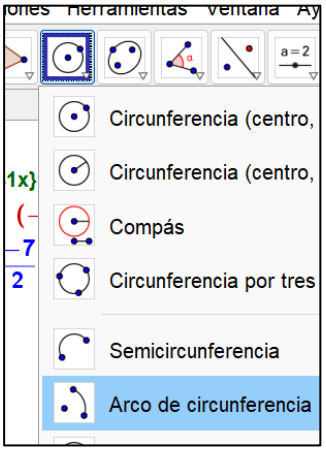
  Nos genera la ***recta m***

- Intersección de las **rectas ec1 y m**

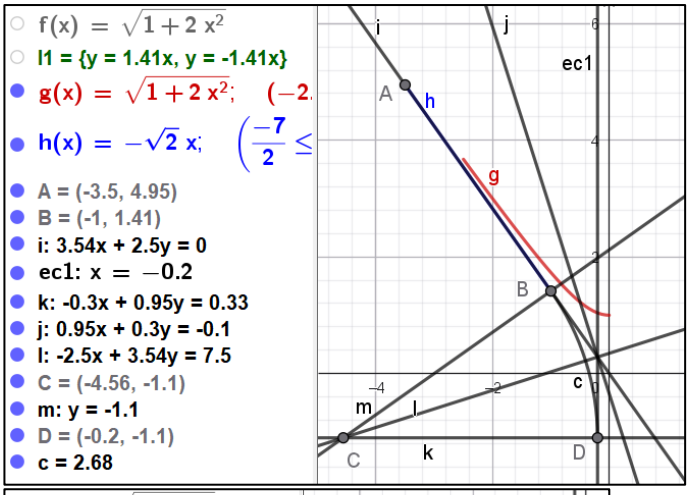
  Nos genera el ***punto D***

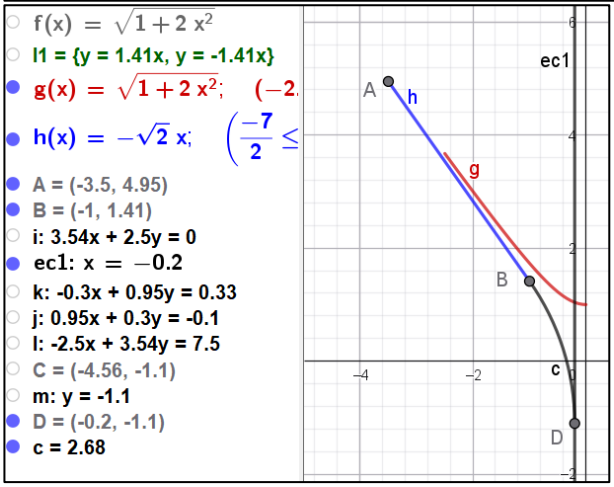
- Arco de circunferencia con centro en **el punto C**, uniendo **el punto D** con **el punto B**.

  Obteniendo así el ***arco c***.



Ocultamos los elementos auxiliares: **i, k, j, l, C, m**





(A8) Para terminar esta primera fase del ejercicio, haremos la base:

```
E = (-0.2, -4)
```

```
F = (-1.8, -4)
```

Y con el comando:
Rota(<Objeto>, <Ángulo de rotación (en sentido antihorario)>, <Punto origen>)

```
Rota(E, -pi/2, F)
```

Se genera el **punto E'**

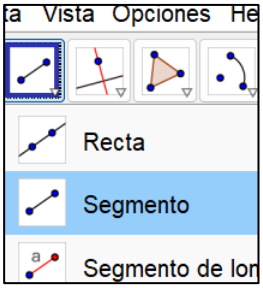
- Arco de circunferencia con centro en **el punto F**, uniendo **el punto E'** con **el punto E**. Obteniendo así el **arco d**.

```
G = (-2.6, -5.6)
```

```
H = (-2.6, -6)
```

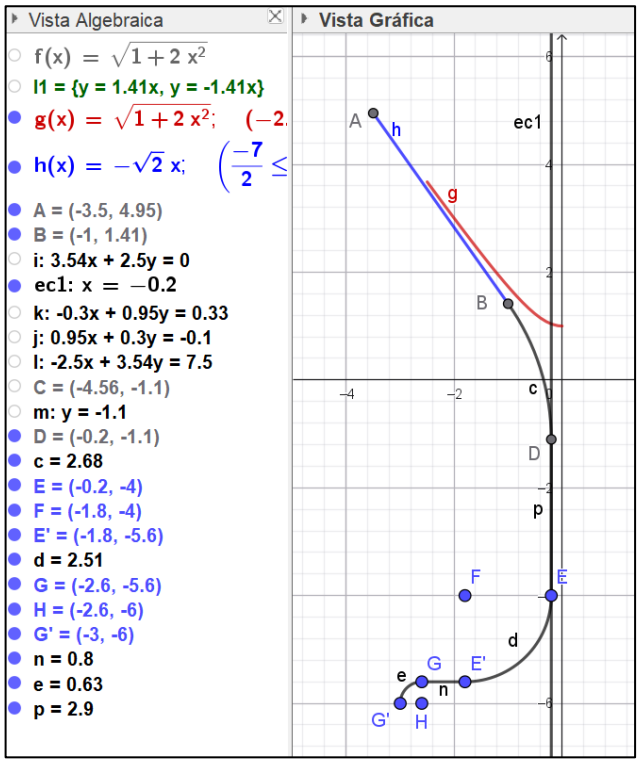
```
Rota (G, pi/2, H)
```

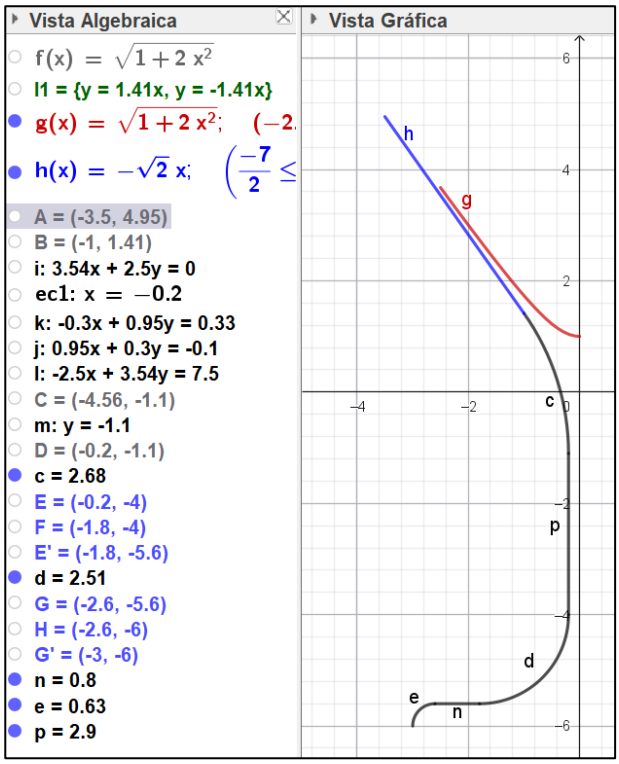
*Se genera el **punto E'***



- Segmento que une el **punto E'** con el **punto G**.
- Arco de circunferencia con centro en **el punto H**, uniendo **el punto G** con **el punto G'**.
- Segmento que une el **punto D** con el **punto E**.

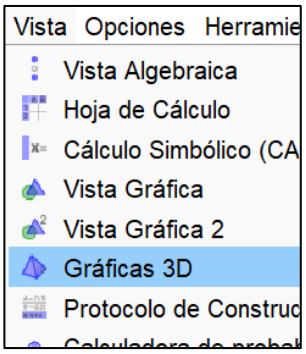
Ocultando los elementos auxiliares





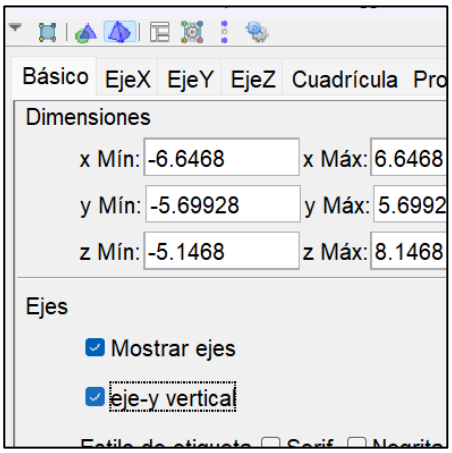
A. Hipérbolas y Vermut.

SEGUNDA PARTE: VOLUMEN



(A9) Podemos partir del archivo:
ejercicioA_paso_intermedio.ggb

En primer lugar, hay que hacer visible la **Vista Gráficas 3D.**



Después, en la configuración de la Vista Gráfica, elegiremos la opción:

☑ **eje-y vertical**

Utilizaremos el comando:

Superficie(<Curva>, <Ángulo de rotación (en sentido antihorario)>, <Recta>)

Con las diferentes curvas, arcos, y segmentos que hemos creado:

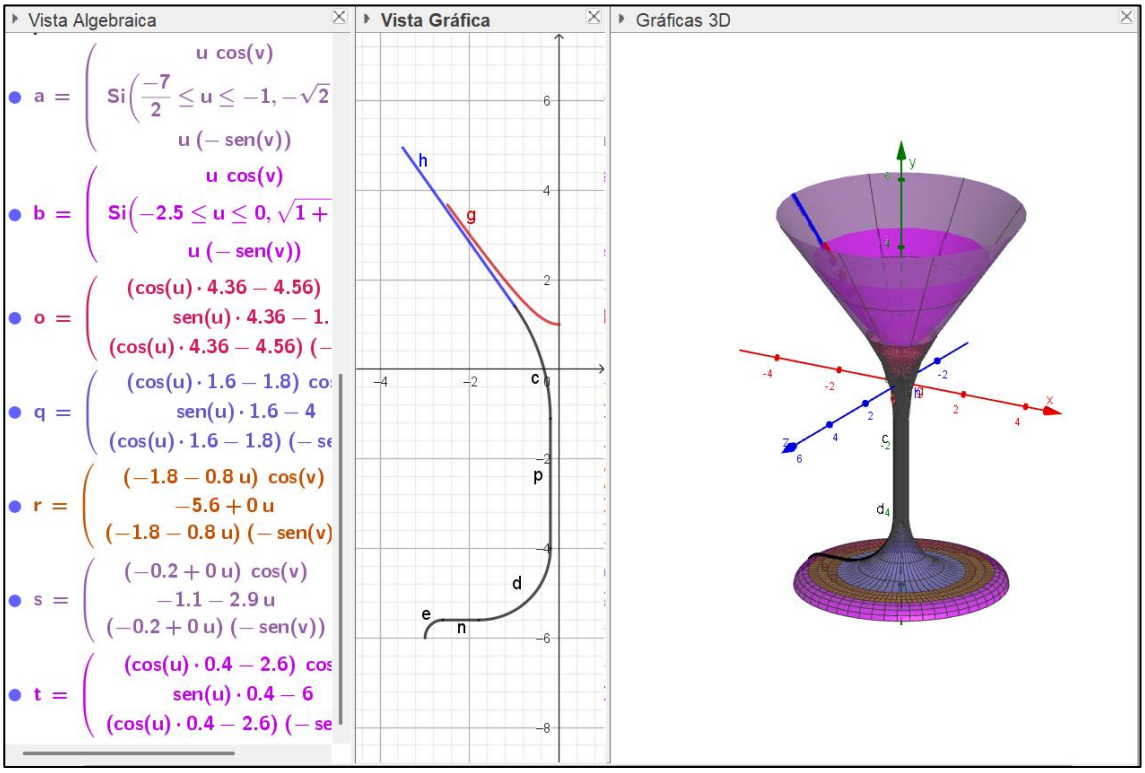
```
Superficie( g, 2pi, EjeY)
```

```
Superficie( h, 2pi, EjeY)
```

```
Superficie( c, 2pi, EjeY)
```

… continuamos con: d, n, e, p

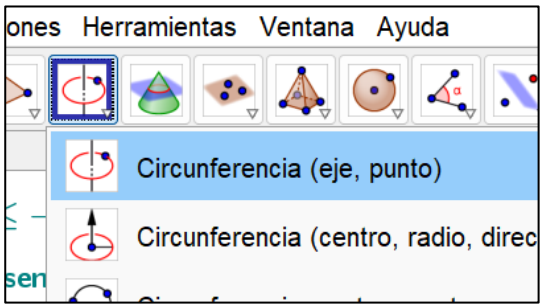
Y obtenemos el siguiente resultado:



(A10) Solamente nos falta generar una superficie, la superficie horizontal del líquido en la copa.

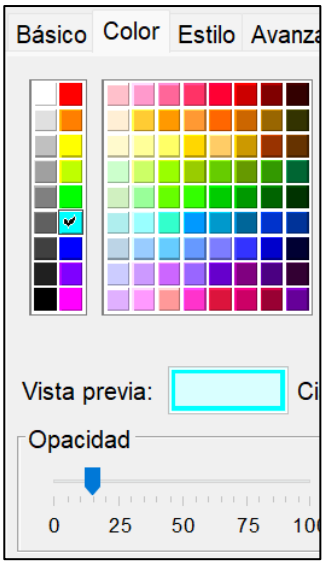
Como se trata del interior de una circunferencia, utilizaremos la herramienta **Circunferencia (eje, punto)**

Eligiendo como eje el eje OY, y como punto un punto cualquiera de la circunferencia, por ejemplo el **punto** $(-2.5, g(-2.5))$

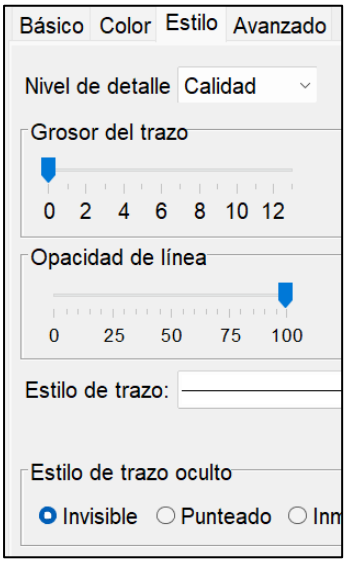


De esta manera se genera la **cónica c1**.

(A11) A continuación, trataremos de dar a las superficies un aspecto lo más realista posible.

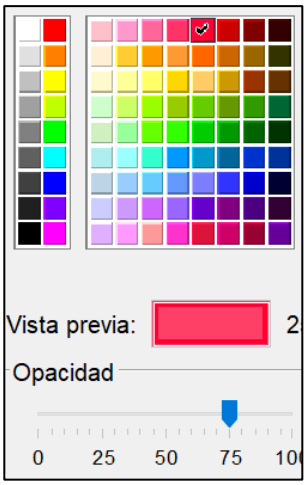


Seleccionando todas las superficies que forman la copa (todas menos las **Superficies b y c_1**) primero seleccionaremos el color y la opacidad.

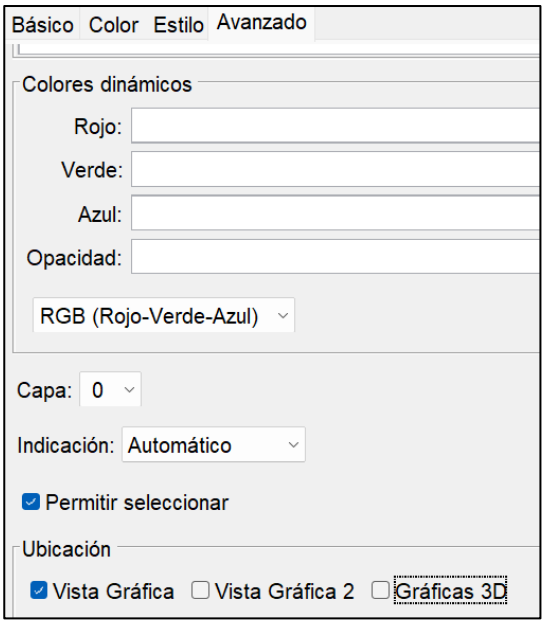


Después para eliminar las líneas de superficie seleccionamos Grosor del trazo, y el Estilo de trazo oculto: Invisible.

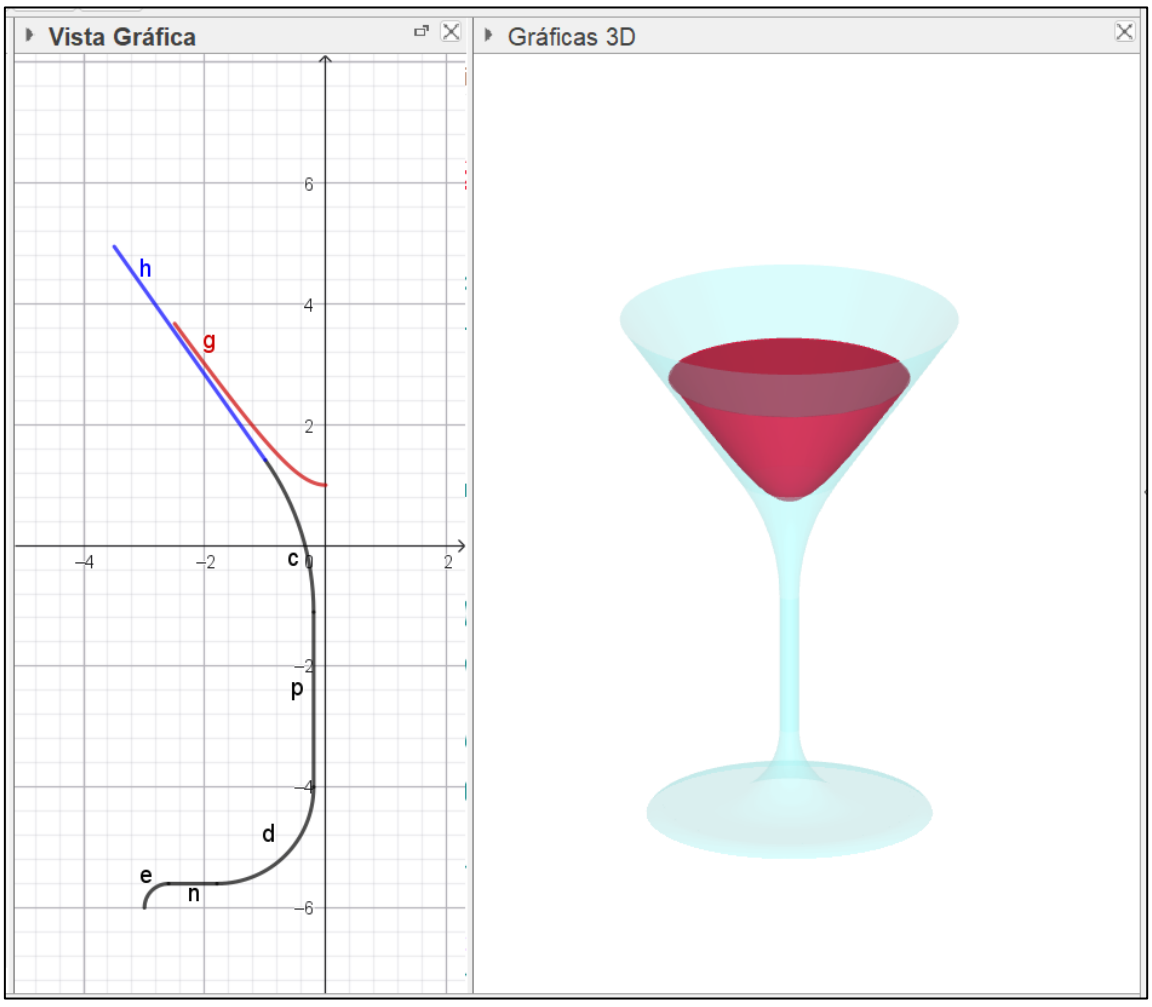
Seleccionamos ahora las superficies que representan el líquido en la copa (**Superficies b y c_1**) definiendo de igual manera que anteriormente el color, la opacidad, eliminando las líneas de superficie …



(A12) Finalmente, eliminaremos de la vista gráfica 3D todas las curvas y segmentos que hemos utilizado para generar las superficies. Para ello, las debemos seleccionar, y en la configuración de
Propiedades – Avanzado – Ubicación, desactivaremos la vista Gráfica 3D



Obteniendo como resultado final:



B. Máximos, mínimos, puntos de inflexión y Alhambra 1925.

El problema inicial consiste en unir dos rectas paralelas por dos puntos en concreto, mediante una curva tangente a ambas.

(B1) Considera las rectas $r_1 \equiv y = -4$ $r_2 \equiv y = 28$,
y los puntos $A = (-1, -4)$ y $B = (3,28)$.
Obtened una función que una A con B cuya gráfica sea tangente a r_1 por A y tangente a r_2 en B.

Por supuesto, hay muchas soluciones al problema. Para simplificarlo y acotar el tipo de solución, indicaremos que se trata de una función polinómica de tercer grado.
De manera que:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Longrightarrow \begin{cases} f(-1) = -4 \\ f(3) = 28 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases}$$

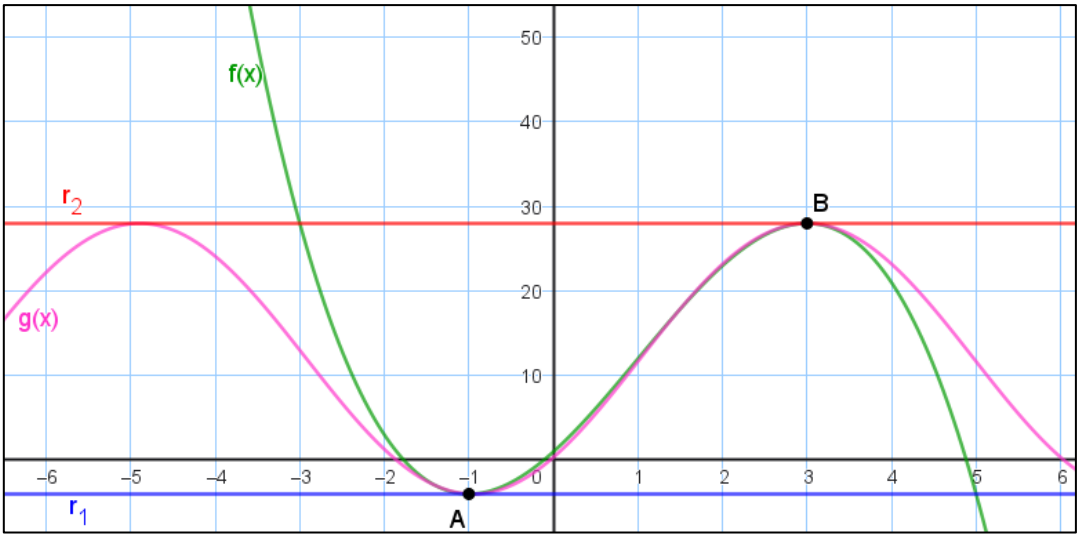
$$\Longrightarrow f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$$

El problema está planteado de esta manera para aplicar que la derivada de una función en un extremo relativo siempre se anula. También se puede modificar la información, indicando que la función buscada tiene un punto de inflexión en el punto medio, incluso podemos pedir que se demuestre que, en una función polinómica de tercer grado con dos extremos relativos distintos, el punto medio entre ambos es exactamente el punto de inflexión de la función.

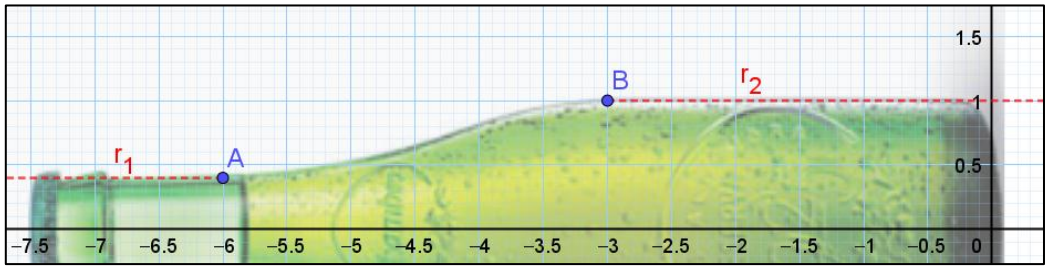
Si lo que queremos aplicar son transformaciones de funciones canónicas, podríamos encontrar una función trigonométrica, transformando la función $g_0(x) = sinx$:

$$\Longrightarrow g(x) = 12 + 16 \cdot cos\left((x-3) \cdot \frac{5}{2\pi}\right)$$

Si representamos gráficamente ambas soluciones, obtenemos lo siguiente:

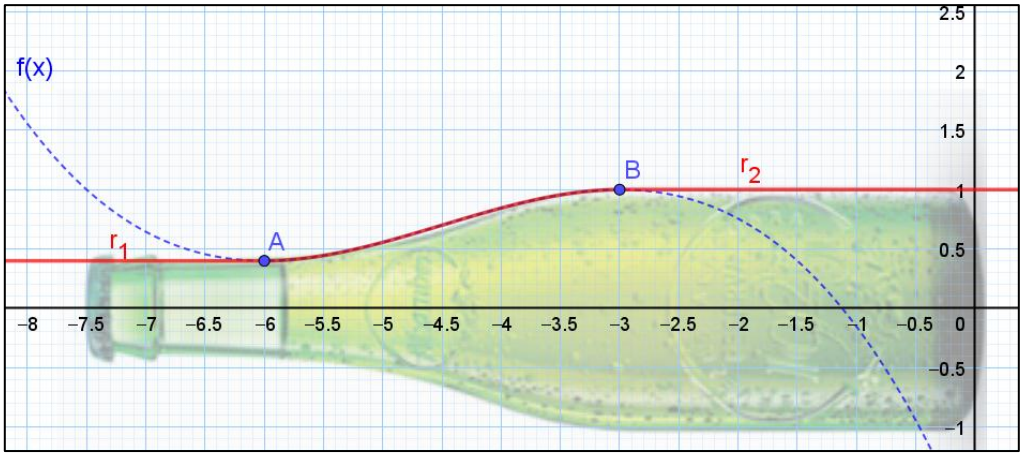


Este problema nos lo encontramos al modelizar una botella:

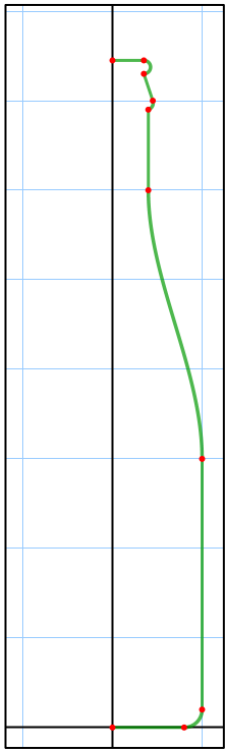


Obteniendo como solución la función:

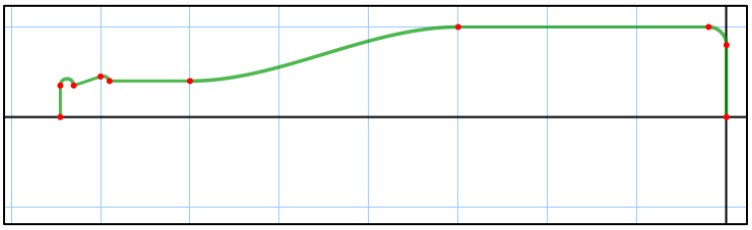
$$f(x) = \frac{-2}{45}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{5}x - 2$$



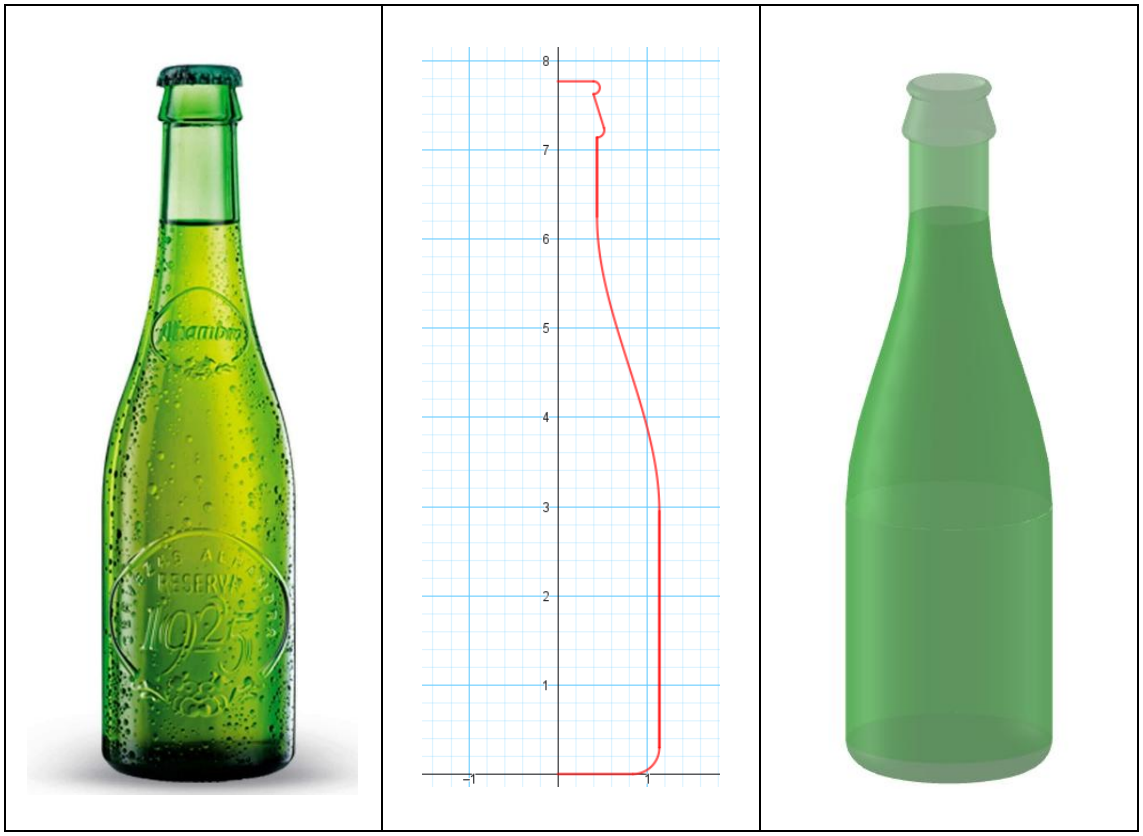
(B2) A partir del archivo *ejerciciob_paso_intermedio.ggb*, siguiendo los pasos del Ejercicio A, genera la superficie de revolución que modeliza la botella de Alhambra 1925. Antes de comenzar tendremos que hacer una rotación de todos los segmentos, arcos y curvas para poner la botella en vertical, con el comando rota:



Rota(<Objeto>, <Ángulo de rotación (en sentido antihorario)>, <Punto origen>)



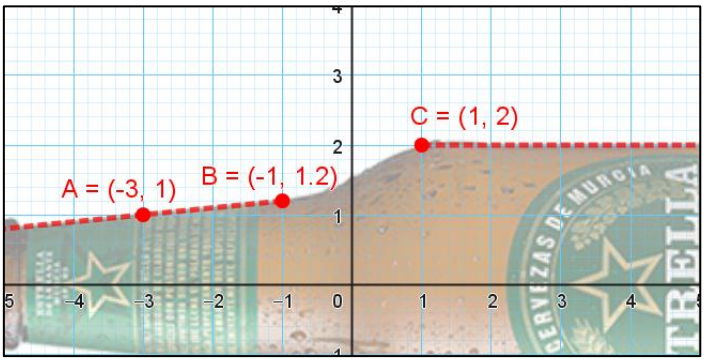
Obteniendo como resultado final:



C. Interpretación geométrica de la derivada y Estrella de Levante

En este caso, el problema inicial consiste en unir una recta de pendiente positiva con una recta horizontal, por dos puntos fijos con una curva que tenga un punto de inflexión entre ellos.

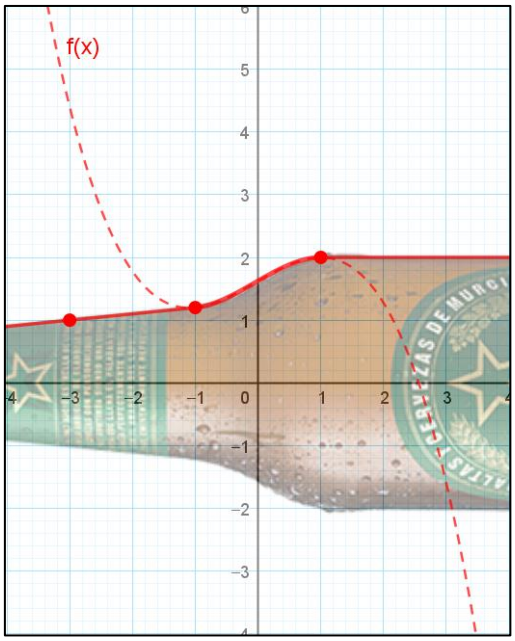
(C1) Considera los puntos $A = (-3,1)$, $B = (-1,1.2)$ y $C = (1,2)$.
Obtened una curva tangente al segmento $\overline{AB}$ en el punto B, y tangente a la recta horizontal que pasa por el punto C en dicho punto.



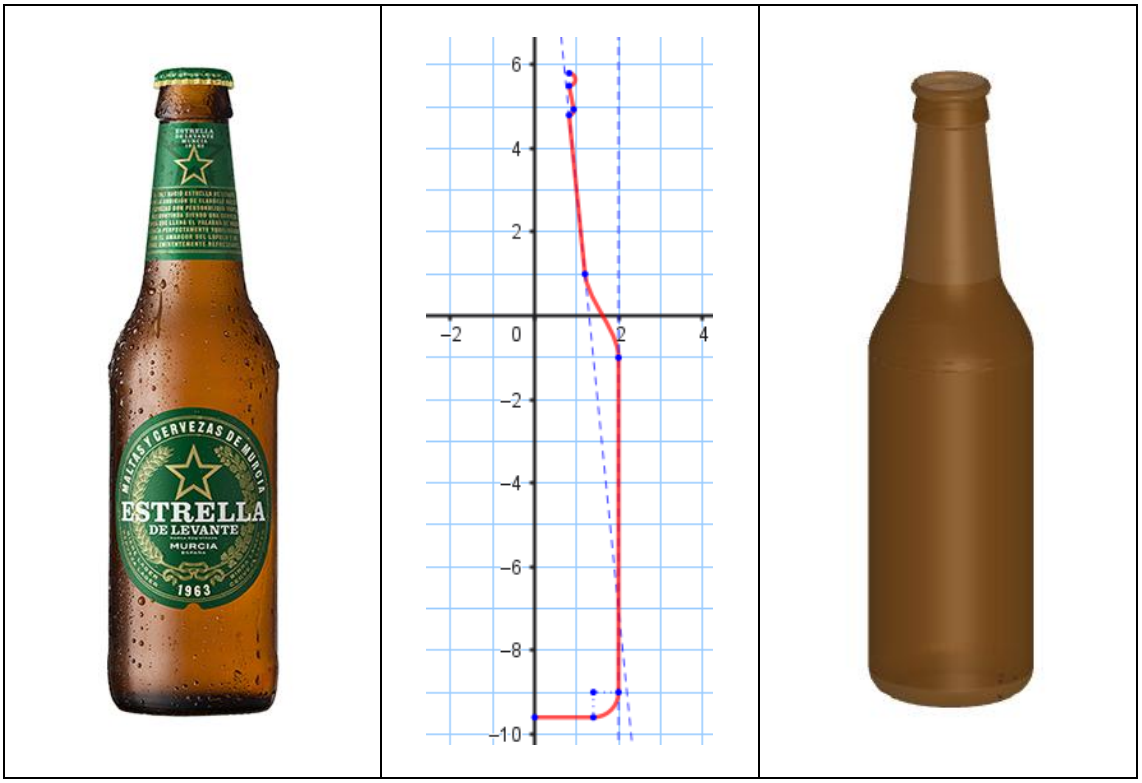
Al igual que en el problema B, para simplificarlo y acotar el tipo de solución, indicaremos que se trata de una función polinómica de tercer grado. De manera que:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Longrightarrow \begin{cases} f(-1) = 1.2 \\ f(1) = 2 \\ f'(-1) = 0.1 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{-7}{40}x^3 - \frac{1}{40}x^2 + \frac{23}{40}x + \frac{13}{8}$$



(C2) A partir del archivo *ejercicioC_paso_intermedio.ggb* podemos construir al igual que en el problema B, una modelización de la botella con características geométricas que presenta el botellín de Estrella de Levante.
Como resultado final obtendremos:



Conclusión

Este taller pretende mostrar cómo GeoGebra puede convertirse en mucho más que una herramienta para representar funciones o realizar construcciones geométricas. A través de problemas matemáticos aparentemente independientes, hemos ido construyendo las piezas necesarias para llegar a un objetivo común: modelizar objetos reales mediante matemáticas y GeoGebra.

El proceso permite conectar contenidos que habitualmente se trabajan de forma separada —funciones, asíntotas, derivadas, tangencias, puntos de inflexión, geometría y superficies de revolución— dentro de una misma actividad, en la que cada concepto adquiere sentido porque responde a una necesidad concreta de la construcción.

Esta propuesta puede trasladarse fácilmente al aula de Bachillerato, especialmente como actividad de aplicación, proyecto de modelización o situación de aprendizaje. Los estudiantes pueden enfrentarse a los problemas matemáticos, analizar diferentes estrategias, comprobar sus resultados con GeoGebra y, finalmente, transformar sus soluciones en un modelo tridimensional.

De esta manera, el uso de GeoGebra permite recorrer el camino del problema matemático al modelo, y del modelo matemático a un objeto que podemos visualizar, interpretar y manipular. Porque, al fin y al cabo, ¿qué mejor manera de terminar un taller de matemáticas que habiendo conseguido una copa de vermut y un par de cervezas... sin salir de GeoGebra?