4.2 SUMATORIAS
4.2.1 Sumatoria simple
Definición

Una *sucesión real* es toda función con dominio un subconjunto de los números naturales y con valores en $\Re$, simbólicamente, la sucesión "a" es $a : N \to \Re$ tal que $n \mapsto a(n) = a_n$

Observación.

Denotamos la sucesión "a" por $(a_n)_{n \in N}$, donde a_n es el término general de la sucesión

Ejemplo

Para la sucesión $\left((-1)^n 2^n\right)_{n \in n}$, los tres primeros términos son: $a_1 = (-1)^1 2^1 = -2$, $a_2 = (-1)^2 2^2 = 4$, $a_3 = (-1)^3 2^3 = -8$

Definición.

Sea $(a_n)_{n \in N}$ una sucesión, definimos la sumatoria de los n primeros términos de la sucesión, denotada $\sum_{i=1}^{n} a_i$, por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 & \text{si} \quad n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

Observación.

Usando la definición de sumatoria y las propiedades de los números reales podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n = \left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i + a_{n-1}\right) + a_n = \left(\left(\sum_{i=1}^{n-3} a_i + a_{n-2}\right) + a_{n-1}\right) + a_n = \dots\dots\dots\dots$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Ejemplo.

Desarrolle y calcule $\sum_{i=1}^{3} a_i$ considerando la sucesión $(2n+3)_{n \in N}$

Solución

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{3} (2i+3) = (2 \cdot 1 + 3) + (2 \cdot 2 + 3) + (2 \cdot 3 + 3) = 5 + 7 + 9 = 21$$

¿Si nos interesa $\sum_{i=1}^{75} a_i$?. Necesitamos un poco más de teoría

4.2.1.1 Propiedades de la sumatoria simple

Proposición.

Sean $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ dos sucesiones y $p \in \Re$, se cumple:

a) Si $a_n = p \;\; \forall\, n \in N$ entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} p = np$

b) Si $(c_n)_{n\in N}$ es una sucesión tal que $c_n = pa_n \;\; \forall\, n \in N$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} pa_i = p\sum_{i=1}^{n} a_i$$

c) Si $(d_i)_{n\in N}$ es una sucesión tal que $d_n = a_n + b_n \;\; \forall\, n \in N$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ (Propiedad telescópica)

e) $\sum_{i=j}^{n} a_i = \sum_{i=j+r}^{n+r} a_{i-r}$ (Propiedad del reloj)

Demostración.

Sólo demostraremos la propiedad b)

Sea $P(n): \sum_{i=1}^{n} pa_i = p\sum_{i=1}^{n} a_i$

Debemos demostrar: a) $P(1)$ V b) $[P(1), P(2), ..., P(k)]$ V $\Rightarrow P(k+1)$ V

a) $P(1)$ es V ya que $\sum_{i=1}^{1} pa_i = \sum_{i=1}^{1} c_i = c_1 = pa_1 = p\sum_{i=1}^{1} a_i$

b) Si $\sum_{i=1}^{r} pa_i = p\sum_{i=1}^{r} a_i$, $\forall$ r $\leq$ k debemos demostrar que $\sum_{i=1}^{k+1} pa_i = p\sum_{i=1}^{k+1} a_i$

Veámoslo

$$\sum_{i=1}^{k+1} pa_i = \sum_{i=1}^{k+1} c_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i + c_{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} pa_i + pa_{k+1}$$

$$= p\sum_{i=1}^{k} a_i + pa_{k+1}$$

$$= p\left[\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right]$$

$$= p\sum_{i=1}^{k+1} a_i$$

4.2.1.2 Algunas sumatorias importantes.

a) $1+2+3+4+.....+(n-1)+n = \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+3^2+4^2+...+(n-1)^2+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3+2^3+3^3+4^3+...+(n-1)^3+n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Observación.

Estas fórmulas que nos permiten sumar sin sumar, ya fueron demostradas por inducción, sin embargo, es necesario mostrar algún camino que nos lleve a deducirlas, como un ejemplo deduciremos la suma de los cuadrados de los primeros n naturales

Consideremos $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3$, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 = \sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+3i+1) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

Asumiendo conocida la suma de los primeros n naturales y considerando además que al comparar $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3$ con $\sum_{i=1}^{3} i^3$ se simplifica su diferencia, podemos despejar $\sum_{i=1}^{n} i^2$; así:

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 = \sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+3i+1) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\Rightarrow (n+1)^3 - 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\Rightarrow (n+1)^3 - 1 - n - 3\frac{n(n+1)}{2} = 3\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n(n+1)}{2}}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejemplos.

1) Calcule, usando las propiedades: $\sum_{i=1}^{10}(4i^2+2)$

Solución.

$$\sum_{i=1}^{10}(4i^2+2) = \sum_{i=1}^{10} 4i^2 + \sum_{i=1}^{10} 2 = 4\sum_{i=1}^{10} i^2 + 10\cdot 2 = 4\frac{10(10+1)(10\cdot 2+1)}{6} + 20 = 1.560$$

2) Determine la suma de los 20 primeros términos de la sucesión cuyos 5 primeros términos son: 1, 3, 5, 7, 9

Solución.

Sea $(a_n)_{n\in N}$ la sucesión tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, es inmediato deducir que $a_n = 2n-1$, de donde:

$$a_1 + a_2 + ... + a_{20} = \sum_{i=1}^{20} a_i = \sum_{i=1}^{20}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{20} i - 20\cdot 1 = 2\frac{20(20+1)}{2} - 20 = 401$$

3) Determine una fórmula para $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

Solución.

Para resolver este problema necesitamos descomponer la fracción racional $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ en fracciones parciales.

Informalmente introduciremos las acciones básicas relacionadas con este tema, el cual se presentará en un Capítulo posterior

En primer lugar notemos que la fracción racional dada tiene como denominador un polinomio de grado mayor que el polinomio del numerador y, además, que el numerador esta factorizado en polinomios lineales irreducibles; cada uno de estos factores lineales genera una fracción parcial del tipo $\frac{A}{ax+b}$, de tal manera que debemos encontrar el valor real de A.

Tenemos:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A(k+2)+B(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$\Rightarrow 1 = A(k+2)+B(k+1) \quad (*)$$

Si damos valores arbitrarios a k, sucesivamente, podemos determinar A y B

Si $k=-1$ entonces (*) queda: $1 = A$

Si $k=-2$ entonces (*) queda: $1 = -B$

Entonces: $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$, de donde

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

Si consideramos la sucesión $\left(\frac{1}{n+2} \right)_{n \in N}$, usando la propiedad telescópica

$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) = -(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2})$$

$$= \frac{n}{2(n+2)}$$

Demostremos que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$ se cumple en N

Sea $P(n):\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$

a) $P(1)$ es V ya que $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$, y por otro lado $\frac{1}{2(1+2)}=\frac{1}{6}$

b) Si se cumple que $\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{p}{2(p+2)}$ debemos demostrar que $\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{p+1}{2(p+3)}$. Veámoslo:

$$\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\sum_{k=p+1}^{p+1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{p}{2(p+2)}+\frac{1}{(p+2)(p+3)}$$

$$=\frac{p(p+3)+2}{2(p+2)(p+3)}=\frac{p^2+3p+2}{2(p+2)(p+3)}=\frac{p+1}{2(p+3)}$$

4) Calcule, usando fórmulas, la suma de todos los números impares entre 100 y 500
Solución.
Queremos los números impares desde 101 hasta 499. Si escribimos un número impar como $2k-1$ entonces la suma pedida es $\sum_{k=51}^{250}(2k-1)$; tenemos:

$$\sum_{k=51}^{250}(2k-1)=\sum_{k=51-50}^{250-50}\left[2(k+50)-1\right]=\sum_{k=1}^{200}(2k+99)=2\sum_{k=1}^{200}k+\sum_{k=1}^{200}99$$
$$=2\frac{200(201)}{2}+200(99)=60.000$$

5)Determine una fórmula para $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$ y demuestre la validez de ésta en N

Solución.

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k=-1+2-3+4-5.........-(2n-1)+2n$$
$$=-(1+3+5+....+(2n-1))+(2+4+6+.....+2n)$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+\sum_{k=1}^{n}2k=\sum_{k=1}^{n}(-2k+1+2k)=\sum_{k=1}^{n}1=n$$

Veamos ahora la inducción pedida

Sea $P(n): \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$

a) Como $\sum_{k=1}^{2\cdot 1} (-1)^k k = -1 + 2 = 1$ entonces se cumple $P(1)$

b) Si $P(r)$ se cumple, es decir, si $\sum_{k=1}^{2r} (-1)^k k = r$, debemos demostrar que

$P(r+1)$ también se cumple, es decir, debemos demostrar que $\sum_{k=1}^{2(r+1)} (-1)^k k = r+1$

$$\sum_{k=1}^{2(r+1)} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{2r+2} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{2r} (-1)^k k - (2r+1) + (2r+2) = r - (2r+1) + (2r+2) = r+1$$

4.2.2 SUMATORIA DOBLE

4.2.2.1 Definición de sumatoria doble

Supongamos el siguiente arreglo rectangular de números:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & .. & .. & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & .. & .. & a_{2m} \\ .. & & & & & & \\ .. & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & .. & .. & .. & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Si sumamos los términos de la primera fila obtenemos: $\sum_{j=1}^{m} a_{1j}$

Si sumamos los términos de la segunda fila obtenemos: $\sum_{j=1}^{m} a_{2j}$

.

Si sumamos los términos de la n-ésima fila obtenemos: $\sum_{j=1}^{m} a_{nj}$

Ahora, si sumamos estas sumas obtenemos: $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} a_{ij})$

Por otro lado

Si sumamos los términos de la primera columna obtenemos: $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}$

Si sumamos los términos de la segunda columna obtenemos: $\sum_{i=1}^{n} a_{i2}$

.

Si sumamos los términos de la m-ésima columna obtenemos: $\sum_{i=1}^{n} a_{im}$

Ahora, si sumamos estas sumas obtenemos: $\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij})$

Naturalmente que estas sumas dobles son iguales (forman la suma de todos los términos del arreglo) por lo que podemos afirmar que (aceptando como definición)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

4.2.2.2 Propiedades de la sumatoria doble

Se cumple:

a) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k = nmk \, , k \in \Re$

b) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ka_{ij} = k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, , k \in \Re$

c) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j) = n\sum_{j=1}^{m} b_j + m\sum_{i=1}^{n} a_i$

d) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j)$

Observación.

Si aplicamos la suma iterada a la sumatoria doble podemos mostrar las propiedades, por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[ma_i + \sum_{j=1}^{m} b_j\right] = m\sum_{i=1}^{n} a_i + n\sum_{j=1}^{m} b_j$$

Ejemplo.

Calcule $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(2i+j)$

Solución.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(2i+j)=3\sum_{j=1}^{4}j+4\sum_{i=1}^{3}2i=3\frac{4(4+1)}{2}+4\cdot 2\frac{3(3+1)}{2}=78$$

4.2.3 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Si se sabe que $\sum_{i=1}^{6}(2x_i-3)=18$; $\sum_{i=1}^{5}(x_i-6)^2=182$ y $x_6=8$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{6}x_i^2$ Resp. 186

2) Sabiendo que $\sum_{i=1}^{n}a_i=2n^2+3n$ encuentre el valor de $\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i-5}{3}$ y a_3
Resp. 20 ; 13

3) Determine el valor de $\sum_{i=5}^{15}i(i-3)$

4) Si se sabe que $\sum_{i=1}^{7}x_i^2=196$; $\sum_{i=1}^{10}(2x_i-3)^2=1130$; $x_8=x_9=-3$ $x_{10}=5$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{7}x_i$

5) Si $\sum_{i=1}^{6}(2x_i-1)^2=4$; $\sum_{i=1}^{7}(x_i+1)(x_i-1)=129$ y $x_7=-4$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{7}(2x_i-5)\sum_{i=1}^{6}(2x_i+3)^2$

6) Encuentre una fórmula que permita sumar los n primeros términos de la sucesión:

a) $(2n-1)_{n\in N}$ Resp. n^2
b) $(6n^3)_{n\in N}$ Resp. $n(n+1)(2n+1)$

7) Calcule:

a) $3+6+...+198$ Resp. 6.633

b) $-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-.....-99^2+100^2$

c) $2+4+6+8+....+200$ Resp. 10.100

d) $1+3+5+7+9+....+199$ Ressp. 10.000

e) $-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-.....-99^2+100^2$

8) Calcule:

a) $\sum_{i=1}^{100}\left[\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right]$ Resp. $\frac{2.575}{5.151}$

b) $\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{k}{k+1}-\frac{k-1}{k}\right]$ Resp. $\frac{100}{101}$

c) $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)Ln(k+1)-kLnk\right]$ Resp. $(n+1)Ln(n+1)$

9) Usando descomposición en fracciones parciales y propiedad telescópica, determine una fórmula para:

a) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ Resp. $\frac{n}{n+1}$

b) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i+3)(2i+1)}$ Resp. $\frac{n}{3(2n+3)}$

c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)}$ Resp. $\frac{3}{4}-\frac{4n+3}{2(n+1)(n+2)}$

d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k(k+1)2^k}$ Resp. $1-\frac{1}{(n+1)2^n}$

e) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}$ Resp. $\frac{7}{36}-\frac{1}{6(n+1)}+\frac{1}{6(n+2)}+\frac{1}{6(n+3)}$

10) Resuelva la ecuación $x^2\sum_{i=1}^{5}(2i^2+i+1)-\sum_{i=1}^{4}(i+3i^2)=x\sum_{i=1}^{3}(2i^2+8i)$

11) Determine el valor de las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^{6}(3i-5)$ b) $\sum_{i=1}^{5}\frac{(i+3)}{i}$ c) $\sum_{i=1}^{6}(i-3)(2i+5)$ d) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=2}^{6}(i-2)(j+2)$

e) $\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=1}^{3}(2i-3i)(\frac{i+2}{j})$

12) Si se sabe que $\sum_{i=1}^{5}x_i^2 = 30$; $\sum_{i=1}^{5}x_i = 18$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{5}(x_i - 2)^2$

Resp. -22

13) Sí $\sum_{i=1}^{6}(a_i - 3)^2 = \sum_{i=1}^{6}(a_i + 2)^2$ y $\frac{\sum_{i=1}^{6}a_i^2}{\sum_{i=1}^{6}a_i} = 10$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{6}a_i(a_i - 3)$

Resp. 21

14) Dado $\sum_{i=1}^{10}(2x_i - 3)^2 = 1130$; $\sum_{i=1}^{7}x_i^2 = 196$; $x_8 = 3$; $x_9 = 3$; $x_{10} = -5$. ¿Cuál es el valor de $\sum_{i=1}^{7}x_i$? Resp. -11

15) Sí $\sum_{i=1}^{4}x_i = 12$; $\sum_{i=1}^{4}x_i(2 - 3x_i) = -306$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{4}(x_i + 2)^2$

Resp. 174

16) Dado $\sum_{i=1}^{8}x_i^2 = 25$ y $\sum_{i=1}^{8}x_1 = 12$, determine el valor "k" si $\sum_{i=1}^{8}(4x_i - 2k)^2 = 4.000$

Resp. $k = 0$, $k = 6$

17) Calcular el valor de la constante “c”, si se sabe que: $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5}(2x_i - 3y_j + c) = 6.000$

, $\sum_{i=1}^{6}x_i = 18$; $\sum_{j=1}^{5}y_j = 22$. Resp. 207,2