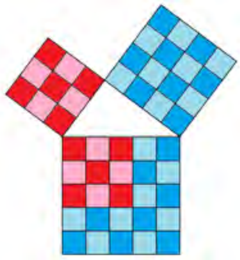
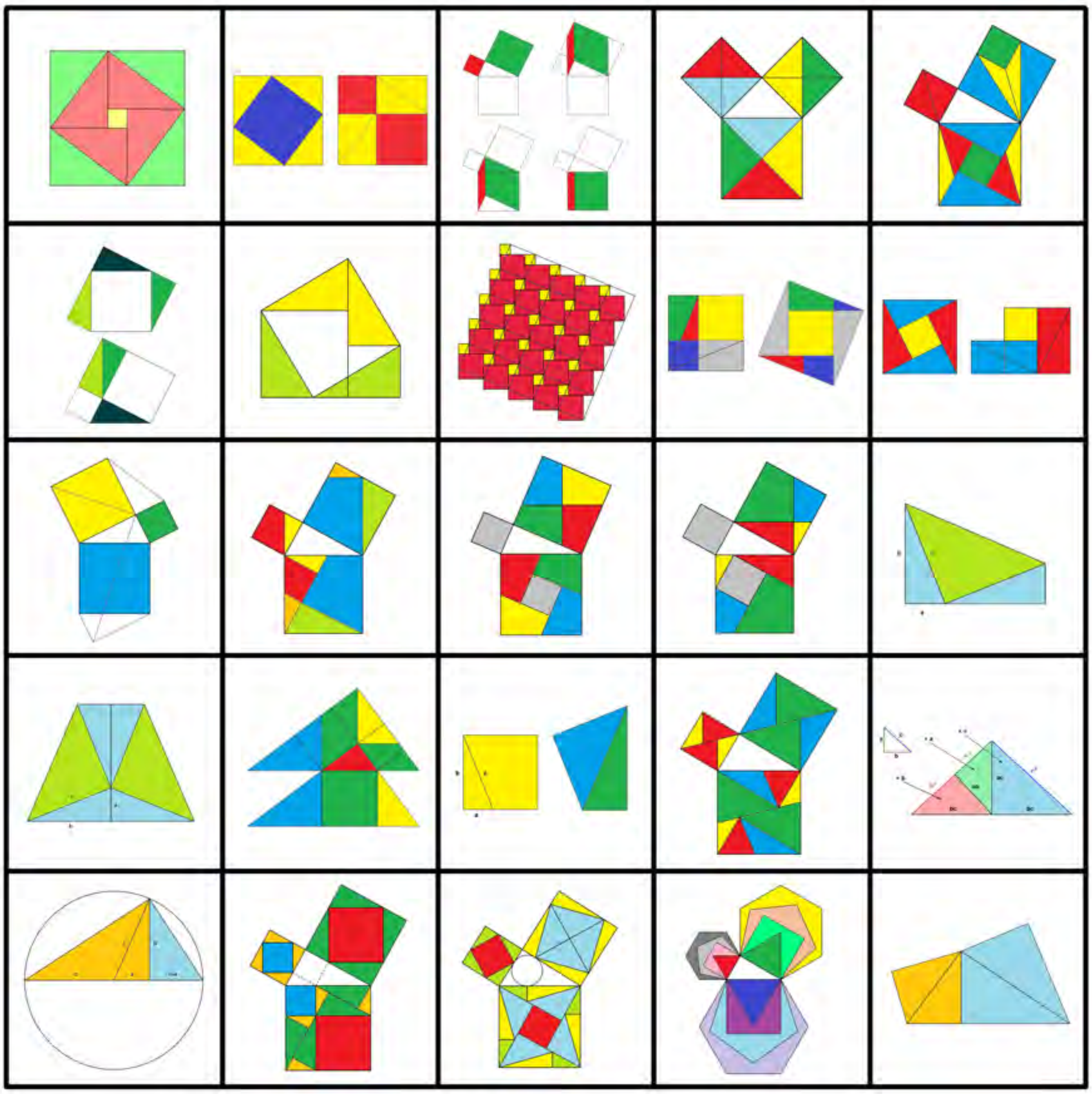
EL CUADRADO DE LA HIPOTENUSA





Alberto Ugarte Fernández

<u>EL CUADRADO DE LA HIPOTENUSA</u>

Autor: Alberto Ugarte Fernández

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

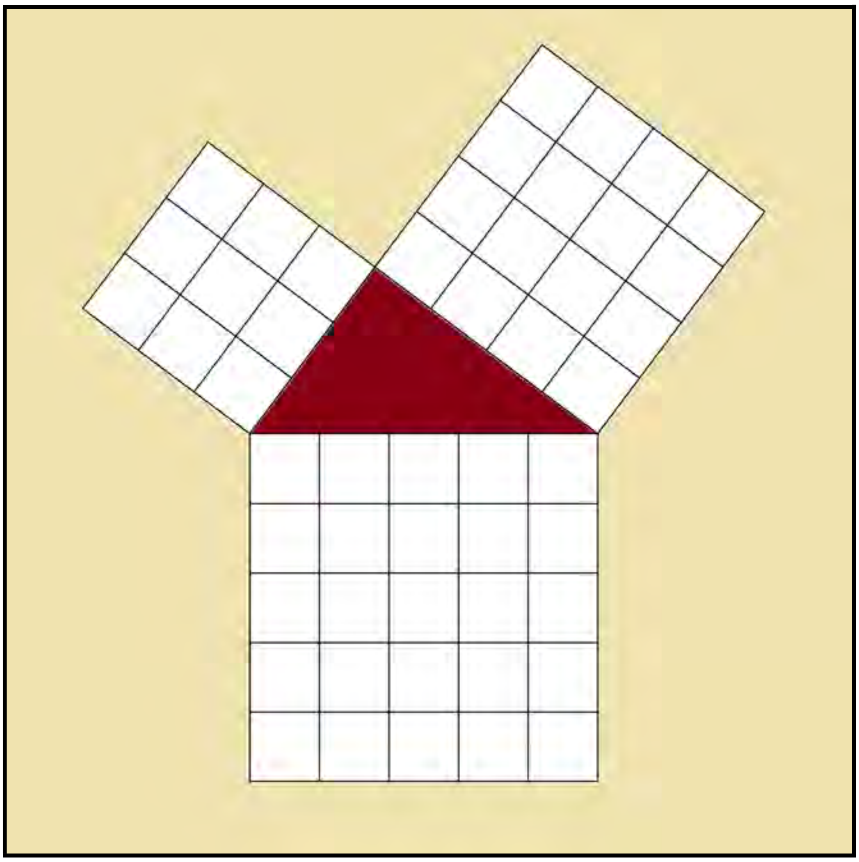
¿Qué tienen en común un filósofo como Platón, el polifacético Leonardo da Vinci, un corredor de bolsa llamado Henry Perigal o el presidente de los Estados Unidos James A. Gardfield?

La respuesta es que todos ellos han realizado una demostración del teorema más famoso de la historia, el de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras sigue siendo la relación matemática más conocida. Su historia se remonta hasta hace casi 4000 años, unos 1300 años antes del nacimiento de Pitágoras.

A lo largo de la historia ha habido multitud de demostraciones del teorema de Pitágoras. En el presente libro se incluyen 25 de ellas enmarcadas dentro de diferentes contextos históricos. La mayoría de las demostraciones son demostraciones geométricas en las cuales se comprueba que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de dicho triángulo. Estas demostraciones " sin palabras" suponen un ejercicio de pensamiento visual en el cual el lector debe comprender la demostración sin necesidad de ningún tipo de operación aritmética.

Al finalizar el libro, tras un recorrido de 4000 años a lo largo de la historia de la humanidad, completaremos "el cuadrado de la hipotenusa".

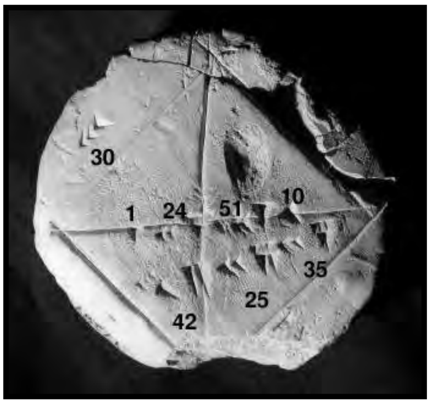


UN TEOREMA CON MÁS DE 4.000 AÑOS DE HISTORIA

La historia del teorema de Pitágoras comienza hace unos 4.000 años en la región que se extiende desde los ríos Tigris y Eufrates hasta las montañas del Líbano. Allí floreció una de las grandes civilizaciones de la antigüedad: Mesopotamia. En los últimos dos siglos los arqueólogos han encontrado alrededor de medio millón de tablillas grabadas sobre arcilla, de las cuales 300 tienen contenidos matemáticos.

Una de estas tablillas, conocida como la Plimpton 322 (1800-1600 a.C aproximadamente) muestra que en Mesopotamia los matemáticos eran capaces de producir ternas pitagóricas.

En otra tablilla la YBC 7289 (Yale University Babylonian Collection) se puede ver que los babilonios ya usaban el teorema de Pitágoras para calcular de forma muy precisa el valor de $\sqrt{2}$.



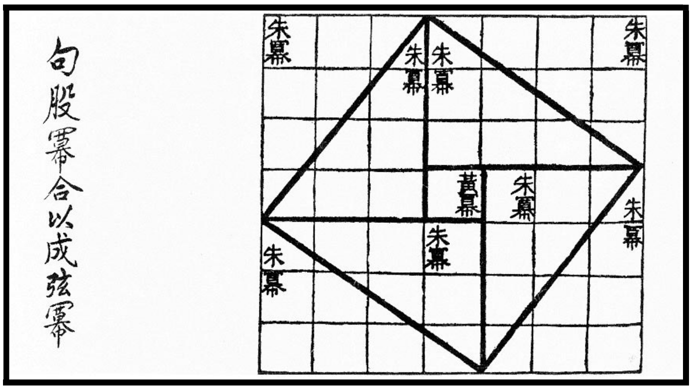
Otra de las más grandes civilizaciones de la antigüedad fue la de Egipto que floreció a lo largo del valle del Nilo durante unos tres mil años desde el 3150 a.C. hasta la época de la Grecia Clásica. La fuente principal de información de las matemáticas del antiguo Egipto es el papiro Rhind escrito hacia el año 1650 a. C. En él no se menciona ni el Teorema de Pitágoras ni las ternas pitagóricas Sin embargo los egipcios usaban el triángulo de lados 3, 4 y 5 -llamado triángulo egipcio- a modo de escuadra para trazar líneas perpendiculares. Todas las pirámides de Egipto, excepto la de Keops, incorporan, de una u otra forma, este triángulo en su construcción.

- **El teorema de Pitágoras en la India y China**

En la India, entre los siglos octavo y segundo a.C. se desarrollaron conocimientos relacionados con el Teorema de Pitágoras que se usaron en la construcción de templos y altares.

En China hay dos tratados clásicos de contenido matemáticos donde aparecen el Teorema de Pitágoras. En el Chou Pei Suan Ching (300 a.C. aproximadamente) aparece una demostración del teorema para el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. En el Chui Chang Suang Shu (250 a.C.) aparecen 24 problemas que se basan en el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, el famoso problema del bambú roto:

"Hay un bambú de 10 pies de altura, se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Calcular a qué altura se ha producido la rotura."



- **El teorema de Pitágoras en el mundo griego**

Pitágoras

En el siglo VI a.C el epicentro del desarrollo cultural pasó de Mesopotamia y Egipto a Grecia. Los griegos tomaron prestados muchos de los conocimientos egipcios sobre geometría. También aprendieron las matemáticas de Mesopotamia y de la India, regiones con las que mantenían frecuentes intercambios comerciales. Los griegos fueron los que crearon el concepto de proposición, axioma, teorema o demostración.

De la vida de Pitágoras se sabe muy poco. De acuerdo a la tradición Pitágoras nace alrededor del año 570 a.C. en la isla de Samos, en el mar Egeo. Samos estaba cerca de la ciudad de Mileto, donde vivió Tales, el famoso matemático y filósofo. Se supone que Tales aleccionó a Pitágoras en matemáticas y filosofía.

Posteriormente se cree que Pitágoras viajó a Babilonia, donde estudió y también enseñó matemáticas, astrología y astronomía. Cuando volvió a Samos reinaba el tirano Polícrates así que Pitágoras abandono de nuevo su isla natal. Se dice que viajó a Egipto donde siguió con sus estudios. Finalmente se estableció en Crotona, en el sur de Italia. Allí fundó una escuela que ejerció una enorme influencia en las siguientes generaciones de pensadores. Bajo la guía de su maestro, los pitagóricos estudiaron matemáticas, filosofía, astronomía y todas las demás disciplinas intelectuales existentes en esa época. Pero la suya era algo más que una escuela,era una comunidad en la que sus miembros debían respetar estrictamente una serie de prescripciones. Los pitagóricos juraban mantener todas sus deliberaciones en secreto.

Al final, los ciudadanos de Crotona se volvieron contra ellos y Pitágoras tuvo que marcharse a Metaponto, también en el sur de Italia, donde murió alrededor del año 500 a.C.

Pitágoras, o alguno de sus seguidores, fue quien estableció un teorema general que valiera para cualquier triángulo rectángulo. Anteriormente solo se conocía la validez de la relación para algunos casos particulares de triángulos rectángulos (como ,por ejemplo, el triángulo egipcio de lados 3, 4 y 5. "$5^2=3^3+4^2$"). O este mérito le concede la historia ya que no hay escrito alguno que pruebe este hecho.

Euclides

En el año 332 a.C Alejandro Magno fundó una nueva ciudad en el delta del Nilo en Egipto. Alejandría se convirtió pronto en el principal centro cultural y comercial del imperio helénico. Nueve años después Alejandro Magno falleció en oscuras circunstancias a la edad de 33 años. El imperio helénico se dividió en varios reinos independientes que fundaron sus dinastías. Egipto cayó bajo el dominio de la dinastía tolemaica. Tolomeo se convirtió en gobernante de Egipto y eligió Alejandría como su capital. Esta ciudad se mantuvo durante toda la dinastía tolemaica como una de las ciudades más importantes del Mediterráneo. Económicamente, como puerto de primer orden en las rutas mercantiles y culturalmente se convirtió en uno de los mayores núcleos científicos del mundo antiguo. Es aquí donde Tolomeo I fundó la famosa biblioteca que formaba parte del museo de Alejandría, donde trabajaron los principales sabios de la época.

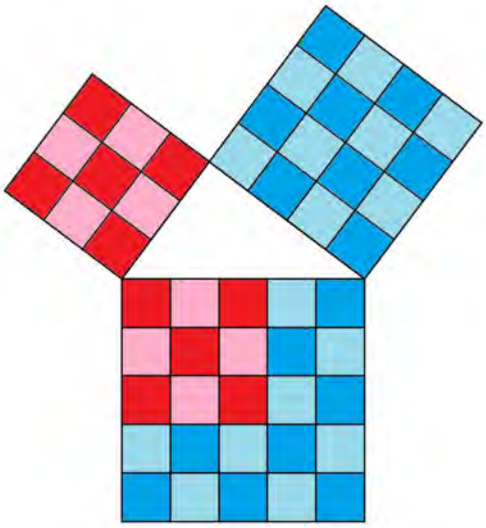
Es en esta coyuntura cuando Euclides entra en escena. Como de Pitágoras, poco se sabe de la vida de Euclides. Euclides vivió en Alejandría alrededor del año300 a.C y fue el líder de un equipo de matemáticos que trabajaban en dicha ciudad. Euclides escribió varios libros pero su obra más reconocida fue los Elementos. En ella se presenta, de manera formal, todo el conocimiento geométrico de la

época. Su importancia se debe a la forma en que se organizan los contenidos. Partiendo de una serie de definiciones Euclides demuestra, paso a paso, todas y cada una de los proposiciones que aparecen en los trece libros que componen la obra.
Entre todas estas proposiciones destaca una, la proposición 47 que aparece en el libro I:

"En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto".

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa
es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



25 DEMOSTRACIONES SIN PALABRAS

1. Chou Pei Suan Ching

El Chou Pei Suan Ching, o el *clásico de la Aritmética sobre el gnomon y los caminos circulares del Cielo*, es el tratado matemático chino más antiguo, escrito probablemente alrededor del siglo III a.C. En él se encuentra una demostración del teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. Del cuadrado mayor de lado 7 y área 49 se suprimen los cuatro triángulos rectángulos de las esquinas, cuyas áreas equivalen a las de dos rectángulos de lados 3 y 4. Lo que sobra, 49-24=25, es el área de un cuadrado de lado 5.

Este razonamiento se puede generalizar para un triángulo rectángulo cualquiera de catetos, a y b, e hipotenusa c.

$$c^2= (a+b)^2 -2ab =a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = a^2 + b^2 \quad \textit{(fig 1.1.)}$$

Usando un procedimiento similar con esta misma figura hallamos también otra demostración del teorema de Pitágoras:

$$c^2= (a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2 - 2ab +2ab = a^2 + b^2 \quad \textit{(fig 1.2.)}$$

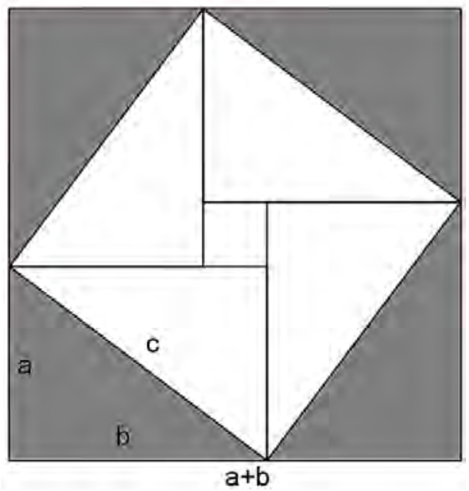


Figura 1.1

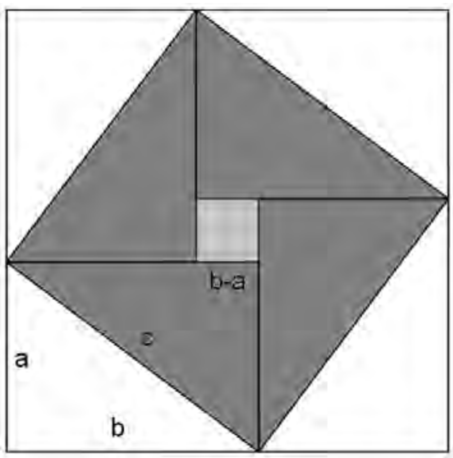
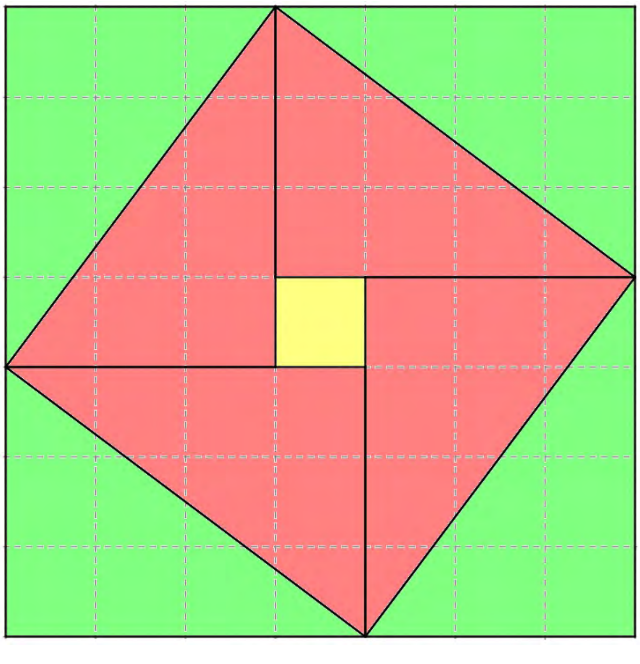


Figura 1.2



2. Chou Pei Suan Ching

Algunos historiadores sugieren que el propio Pitágoras pudo demostrar el teorema que lleva su nombre usando un método similar al que se describe a continuación. No hay ninguna evidencia de que así lo hiciera y este método gráfico es una simple adaptación del que se describe en el tratado chino “Chou Pei Suan Ching”. Esta demostración del teorema de Pitágoras es probablemente la más conocida y una de las más sencillas.

Los dos cuadrados de la figura 2.1 tienen el mismo área ya que sus lados tienen la misma longitud (a+b). El primer cuadrado está compuesto por cuatro triángulos rectángulos iguales y un cuadrado cuyo lado es la hipotenusa del triángulo rectángulo. El otro cuadrado está formado por los mismos cuatro triángulos rectángulos y dos cuadrados cuyos lados son los catetos del triángulo rectángulo. Si de ambos cuadrados eliminamos los cuatro triángulos rectángulos nos queda que el área del cuadrado cuya lado es la hipotenusa, es decir, hipotenusa al cuadrado, es igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados cuyos lados son los catetos, es decir, cateto al cuadrado más cateto al cuadrado.

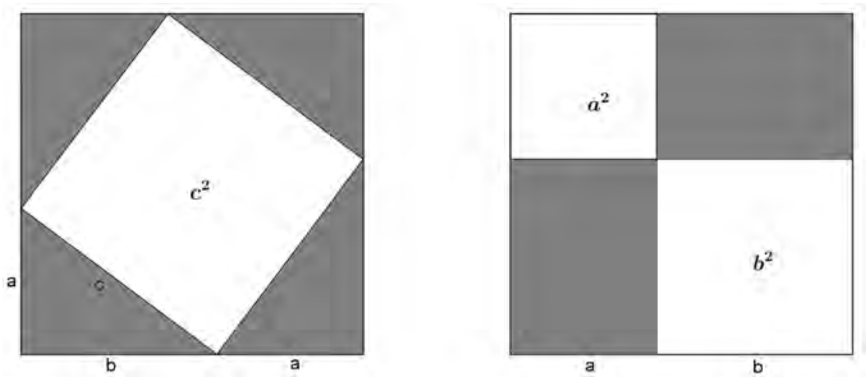
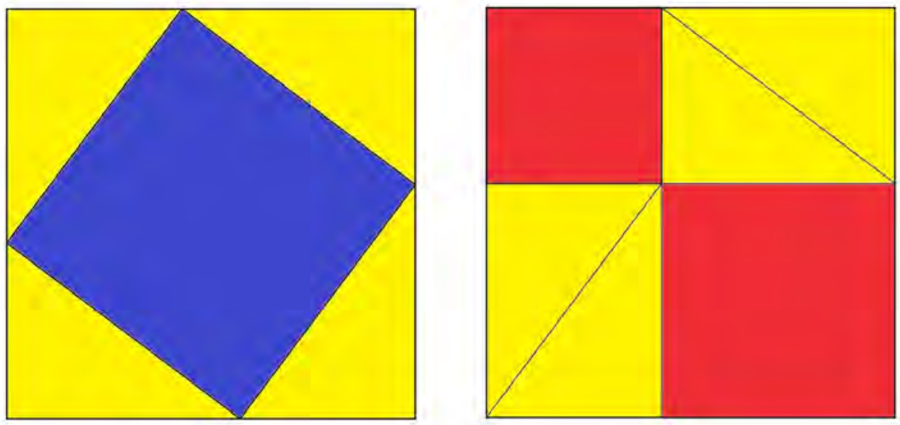


Figura 2.1



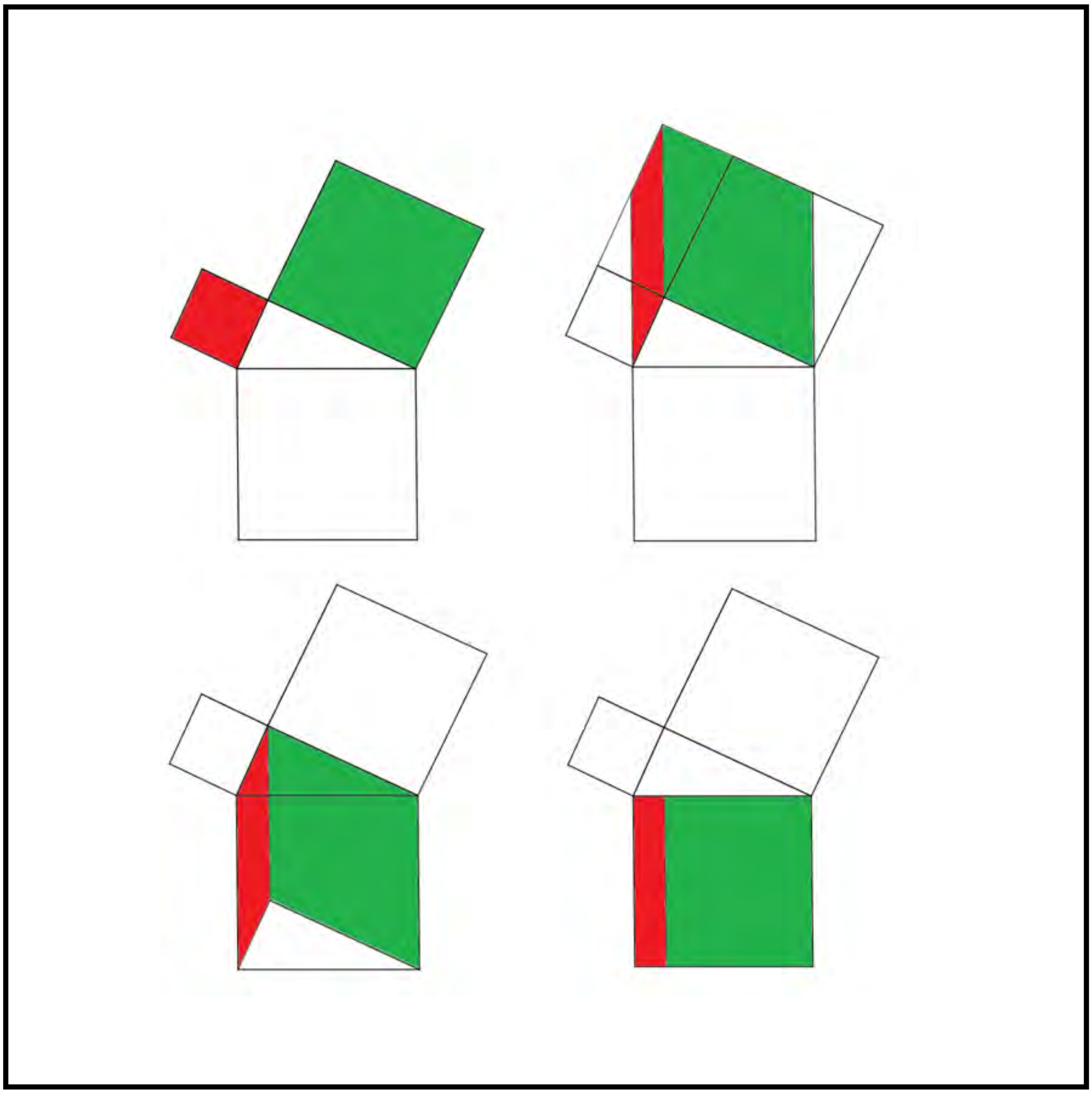
3. Euclides

Euclides fue un matemático griego que vivió en Alejandría alrededor del año 300 a.C. Su obra "los Elementos" es el tratado de Matemáticas que mayor influencia ha tenido a lo largo de la historia. En ella se presenta todo el conocimiento geométrico de la época. Se divide en trece capítulos, llamados "libros". Los seis primeros estudian la geometría del plano y los tres siguientes la teoría de números. El décimo libro trata sobre los irracionales y los tres últimos sobre la geometría del espacio. Cada libro está dividido en apartados: definiciones, postulados, nociones comunes y proposiciones.

En el libro I proposición 47 Euclides enuncia y demuestra el teorema de Pitágoras:

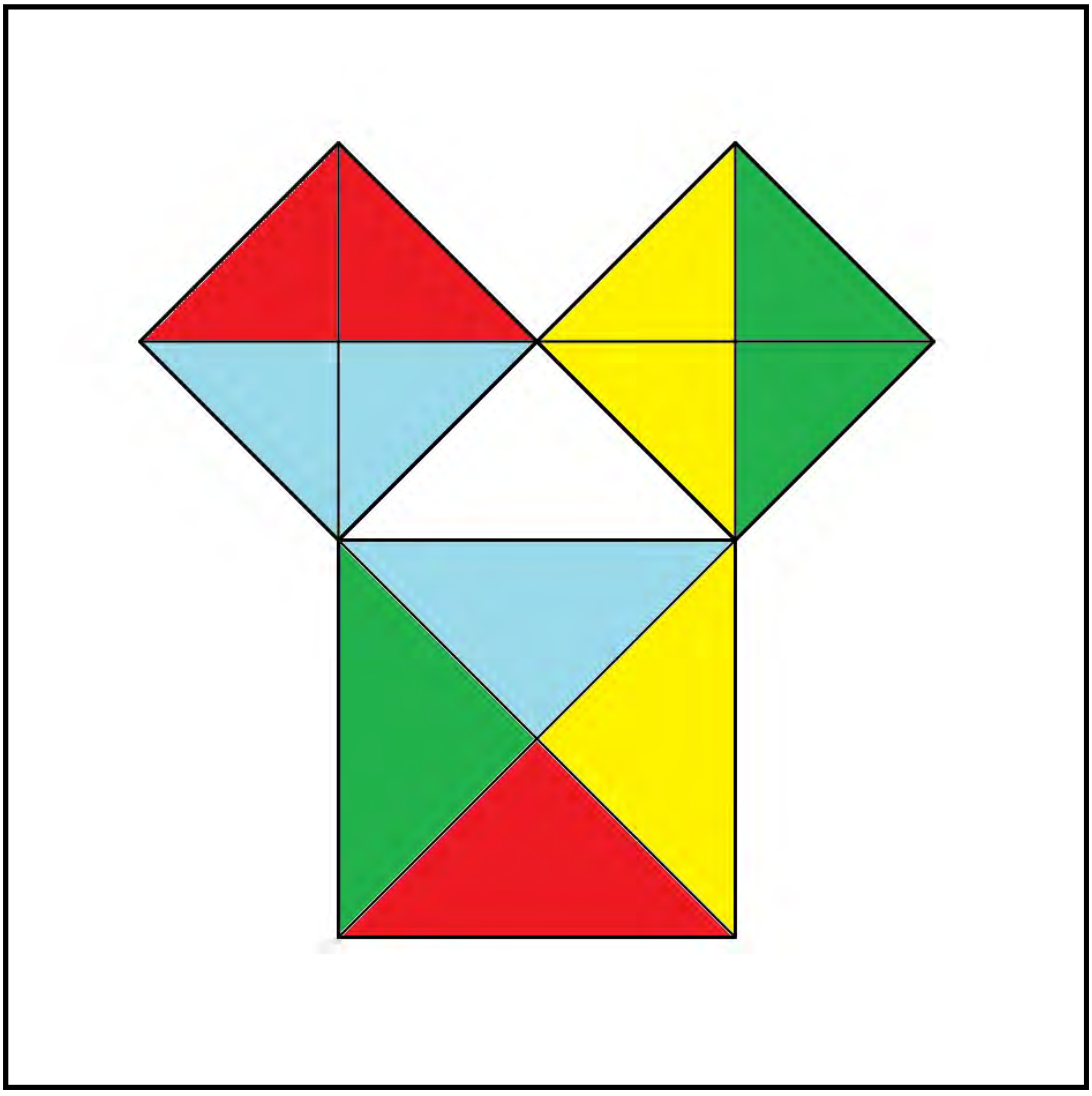
"En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto".

La demostración de Euclides del teorema de Pitágoras se basa en la proposición I.36 (los paralelogramos que tienen la misma base y altura tienen el mismo área). Así Euclides transforma los cuadrados sobre los catetos en paralelogramos de igual área que recoloca posteriormente en el cuadrado de la hipotenusa.



4. Platón

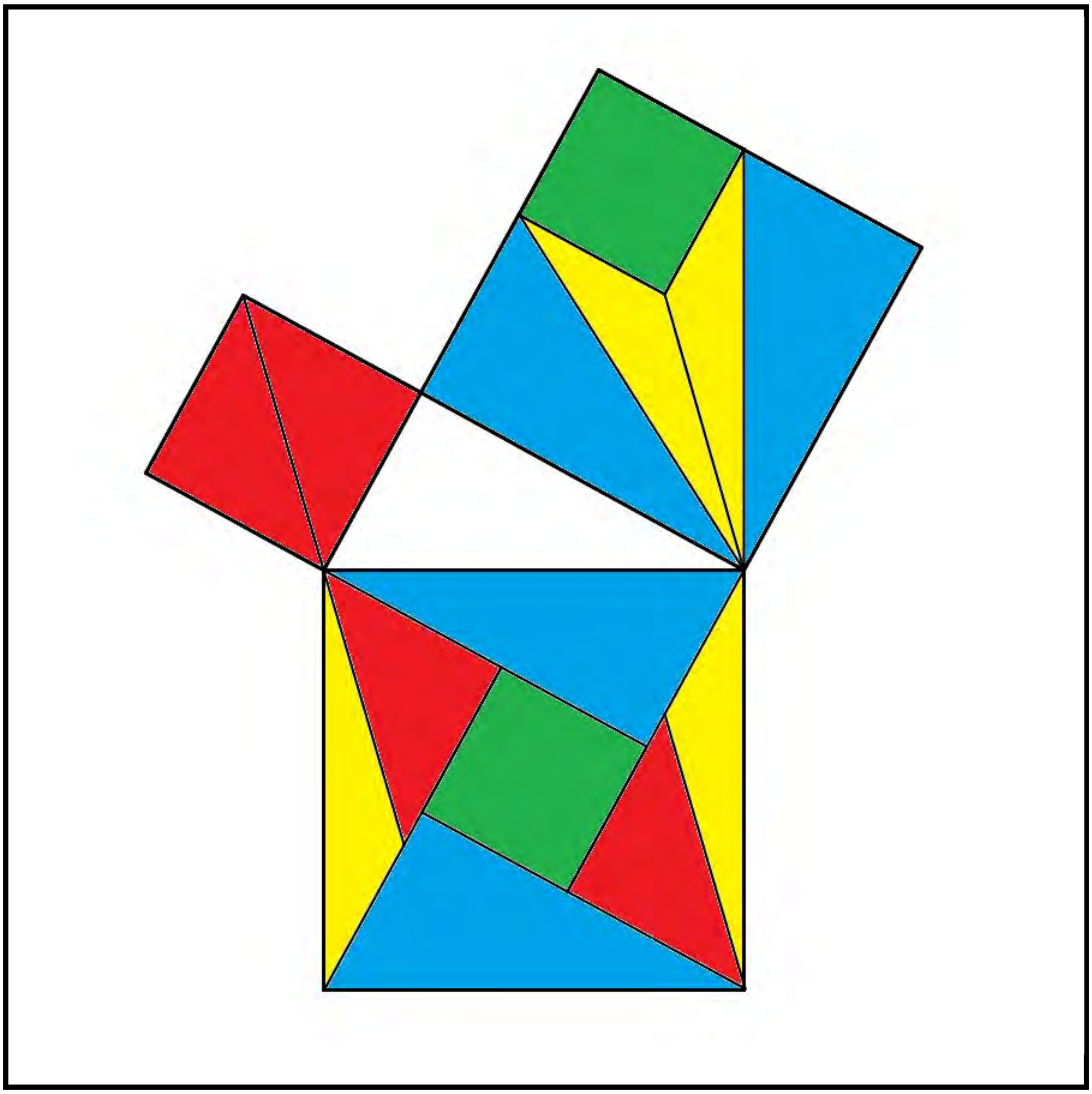
El filósofo Platón (429-347 a.C.) describe en su dialogo “El Menón” la siguiente demostración del teorema de Pitágoras para el caso particular de un triángulo rectángulo isósceles. En relación al problema de la duplicación del cuadrado Sócrates y un esclavo mantienen una conversación en la que mediante una serie de preguntas y respuestas entre ambos se resuelve el problema.



5. Liu Hiu

El matemático chino Liu Hiu (220-280) publicó en el año 263 el libro "Jiuzhang Suanshu" o "Los nueve capítulos del arte matemático", el libro chino de matemáticas más famoso y sobre el que trabajaron las generaciones posteriores. El libro había sido escrito en torno al inicio de nuestra era. Liu Hiu incluyó en él comentarios de gran importancia, como, por ejemplo, una aproximación del número pi a 3,14159 y la sugerencia de que 3,14 es una muy buena representación de esta constante.

También aparece una demostración del teorema de Pitágoras en forma de puzzle. En este puzzle el cuadrado del cateto menor se divide en dos mitades y el mayor en cinco piezas que se obtienen a partir del traslado del triángulo rectángulo original a dos vértices opuestos del cuadrado.



6 y 7. Thabit ibn Qurra

El sabio árabe Thabit ibn Qurra (826-901) escribió sobre medicina, filosofía, matemáticas, astrología y astronomía. También tradujo al árabe muchas de las obras de los matemáticos griegos más notables.

Las dos demostraciones de Thabit Ibn Qurra son la respuesta a la carta de un amigo que, conociendo la demostración del teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo isósceles -el diálogo “Menón ” de Platón- le solicita la prueba para el caso general. Thabit Ibn Qurra atiende su petición y le envía las dos siguientes pruebas del teorema (figuras 6.1 y 7.1)

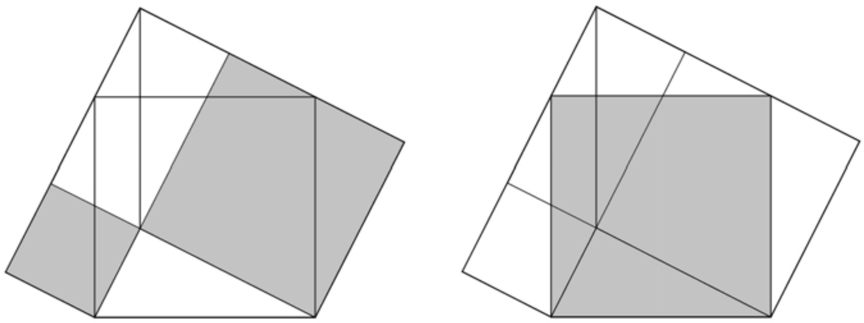


Figura 6.1

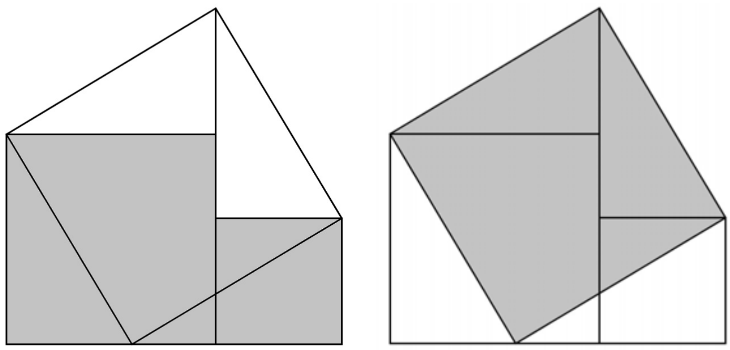
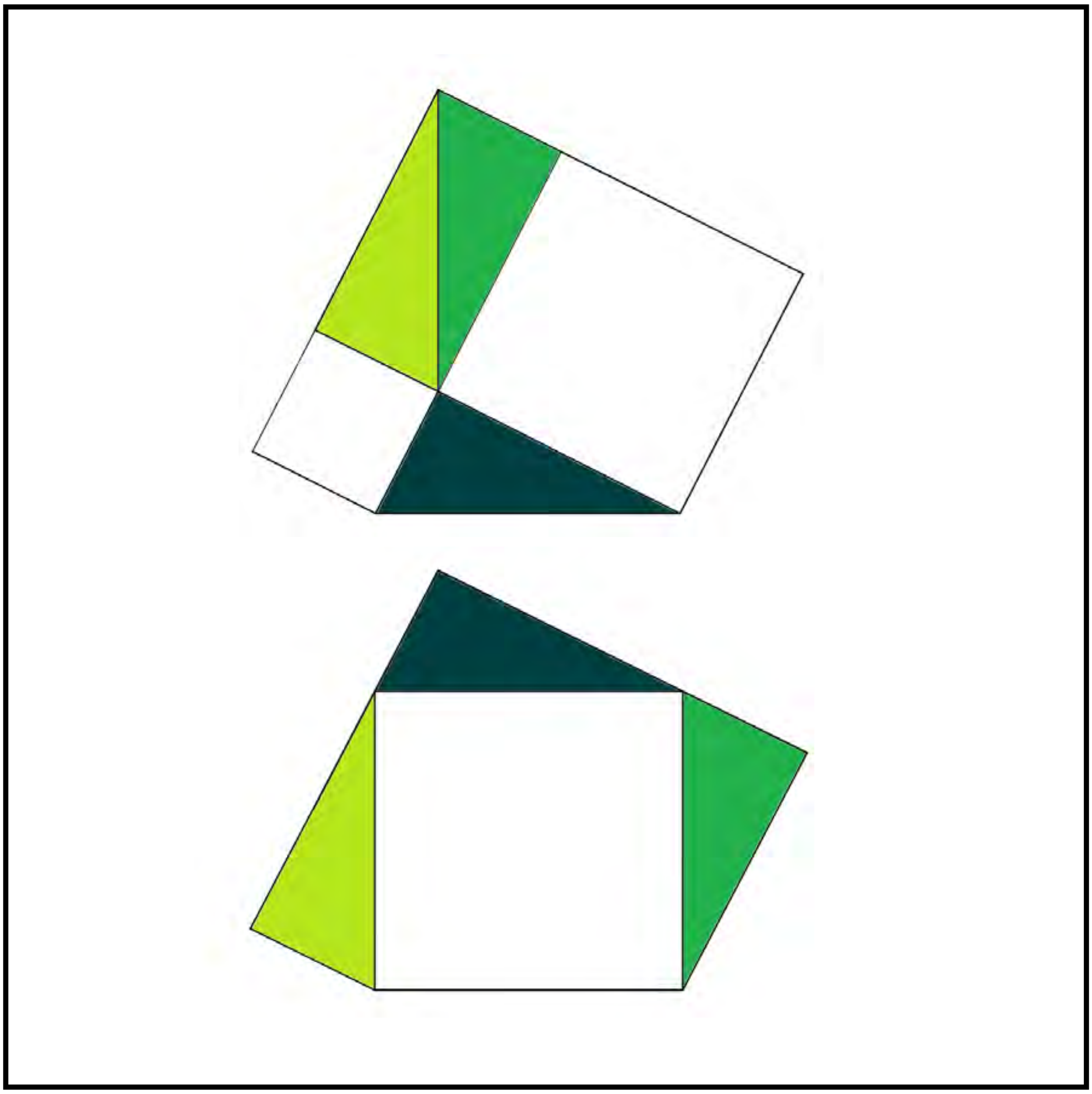
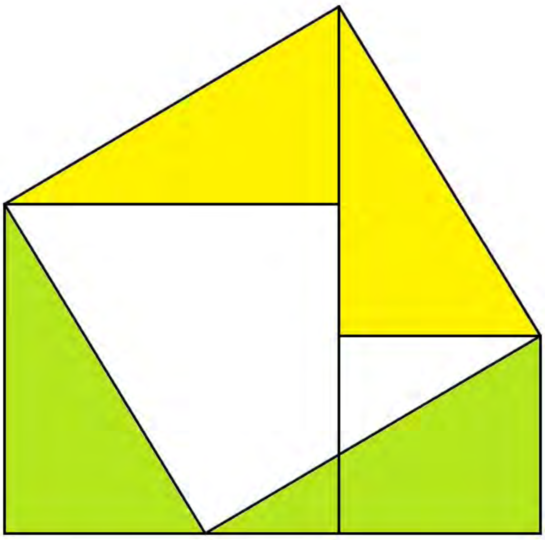


Figura 7.1





8. Al-Nayrizi

Al-Nayrizi de Arabia (865-922) fue un matemático y astrónomo árabe. A él se atribuye esta bella demostración del teorema de Pitágoras.

El mosaico del fondo formado por los cuadrados de los catetos y el mosaico formado por los cuadrados de la hipotenusa cubren la misma superficie.

En la figura 8.1 se observa la misma demostración en forma de puzzle pitagórico.

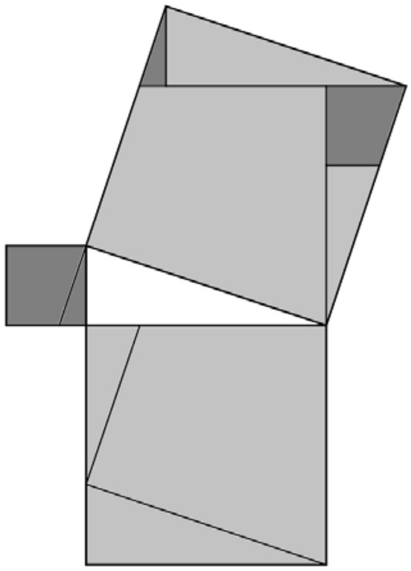
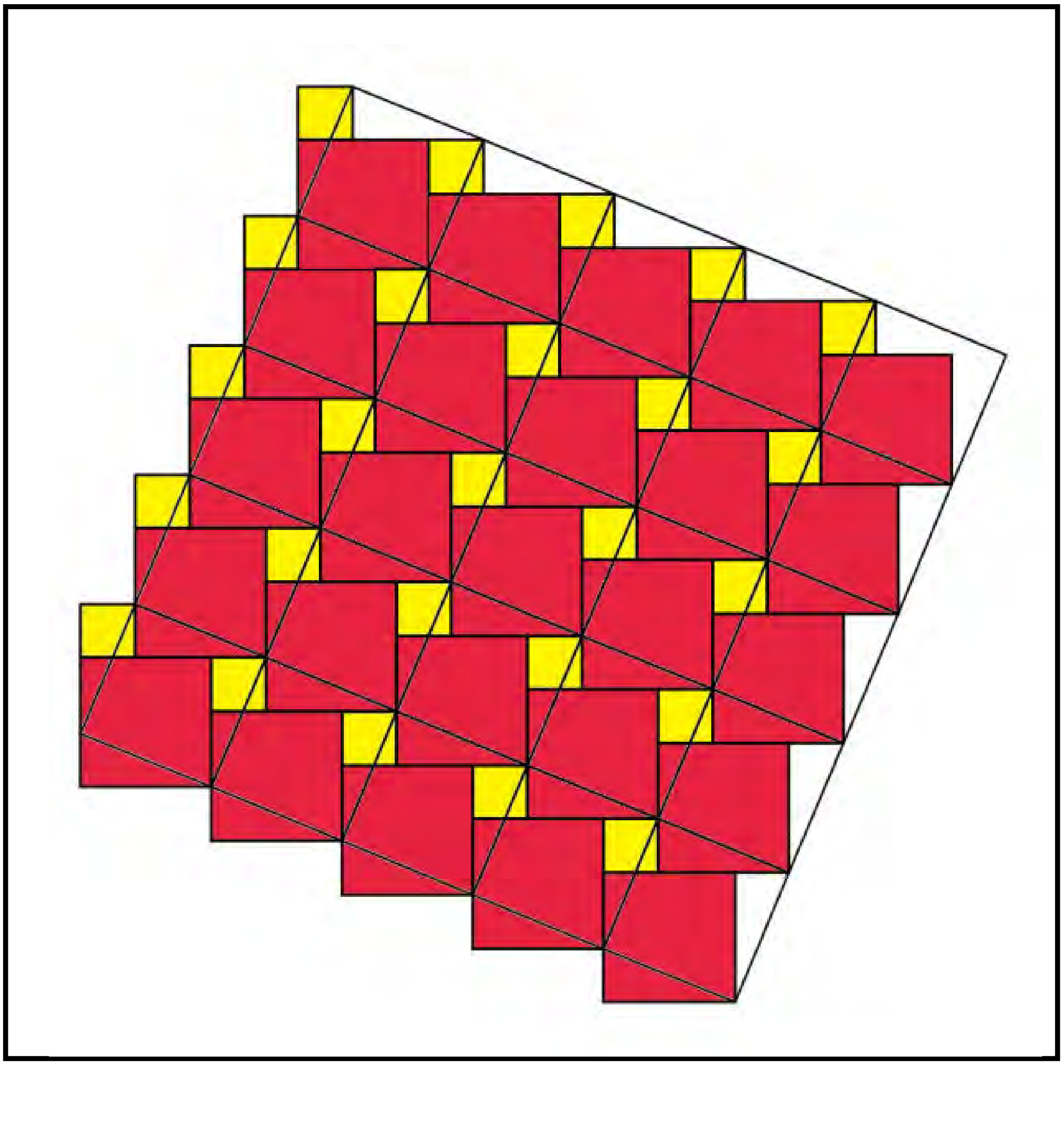


Figura 8.1



9. Abu al Wafa

Abu al Wafa (940-998) fue un matemático y astrónomo persa. A él se debe la siguiente demostración del teorema de Pitágoras. Si al cuadrado de la izquierda cuyo lado es b, cateto mayor de un triángulo rectángulo, se le añade otro cuadrado cuyo lado es a, cateto menor del mismo triángulo, podemos formar el cuadrado de la derecha que tendría como lado c, la hipotenusa del triángulo rectángulo (ver Figura 9.1).

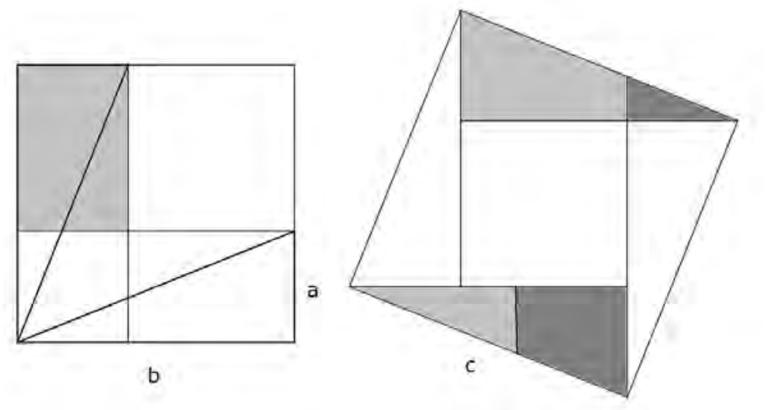
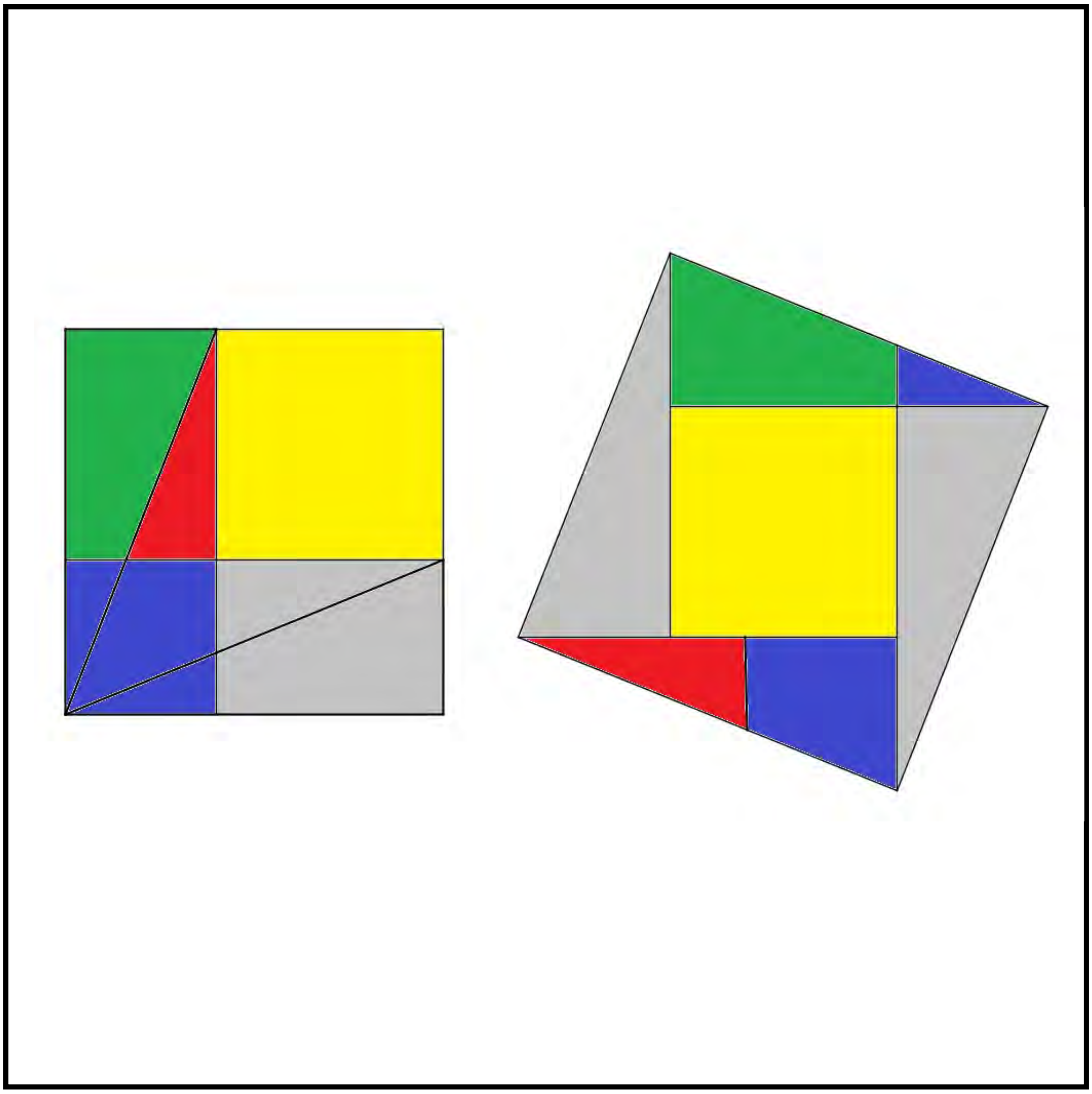


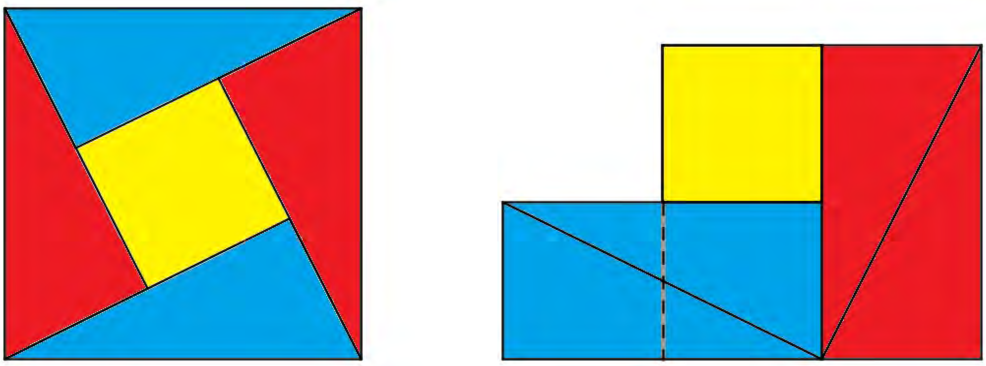
Figura 9.1



10. Bhaskara

Bhaskara (1114-1185) fue un matemático y astrónomo hindú. En su obra “Bijaganita” dio una demostración del teorema de Pitágoras.

El cuadrado de la hipotenusa se divide en cuatro triángulos rectángulos iguales al dado y un cuadrado de lado igual a la diferencia de los catetos. Estas piezas se reordenan para formar una figura que es la unión de los cuadrados de los catetos.



11. Leonardo da Vinci

El polifacético Leonardo da Vinci (1452-1519) también aportó su demostración del teorema de Pitágoras.

Leonardo construye la figura 11.1 en la que se puede observar dos pares de cuadriláteros idénticos. Si eliminamos de ambos pares de cuadriláteros los dos triángulos rectángulos concluimos que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

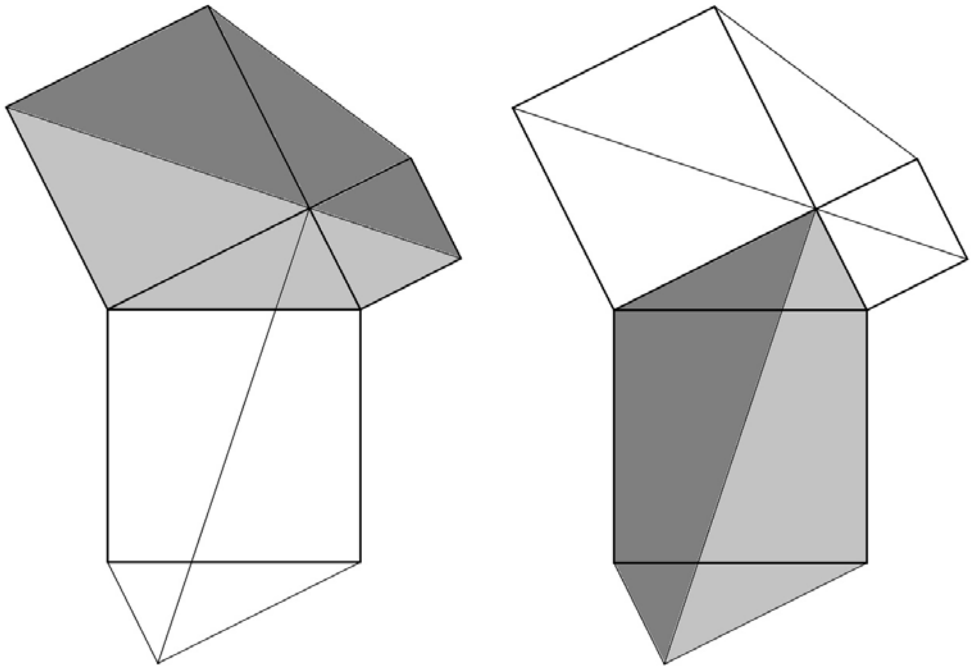
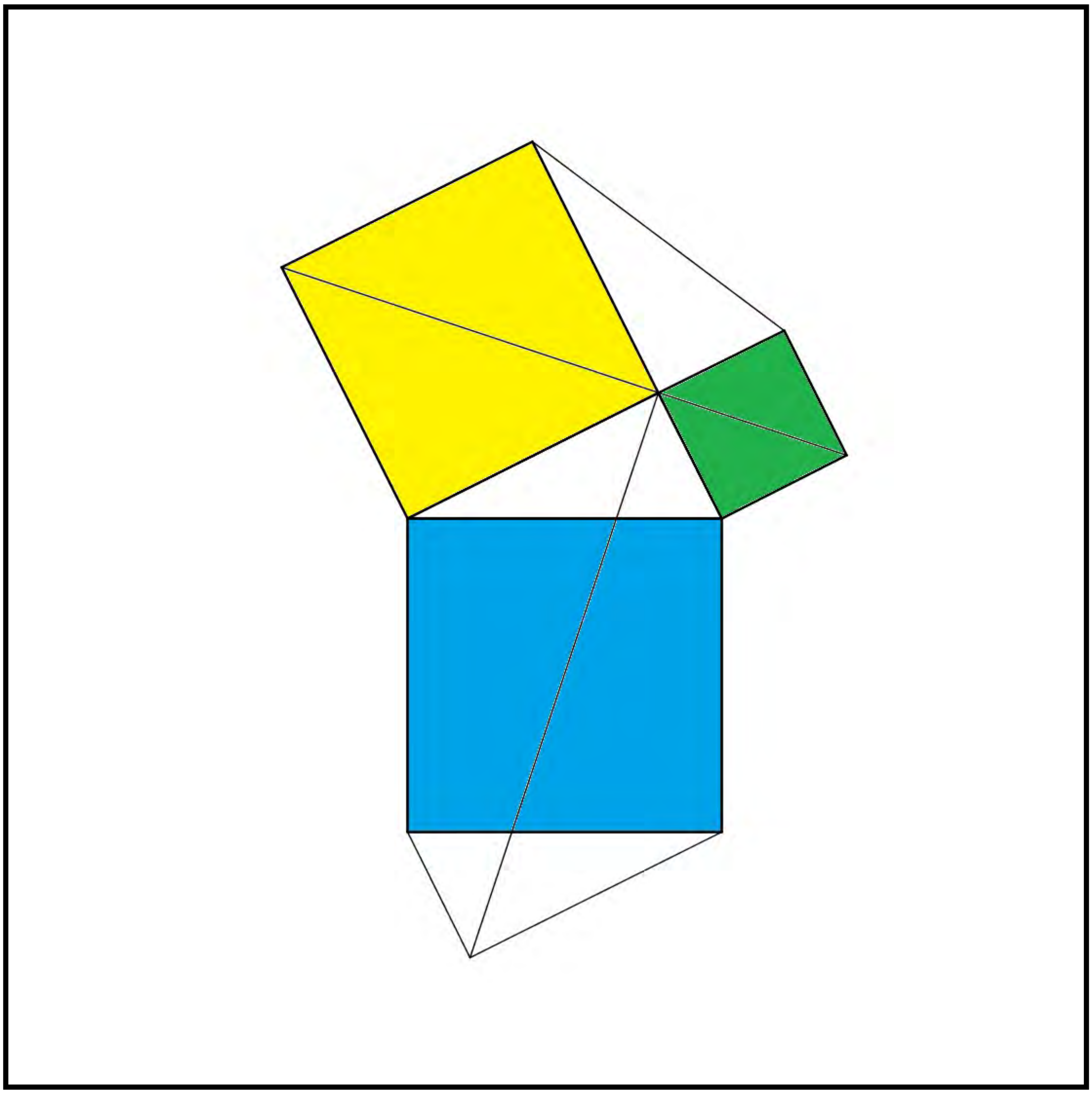


Figura 11.1



12. Jacques Ozanam

Jacques Ozanam (1640-1718) fue un matemático francés. Su obra más conocida “Recreations mathématiques et physiques” contiene dos demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras que él mismo califica como casi idénticas (figuras 12.1 y 12.2).

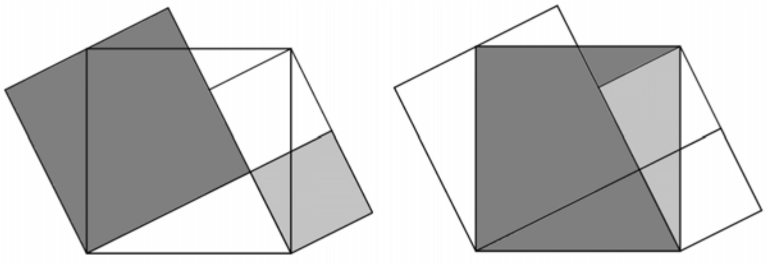


Figura 12.1

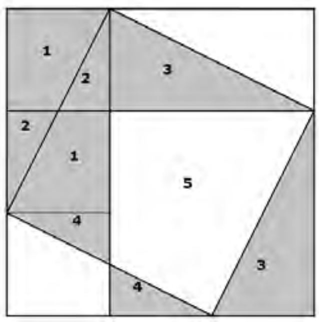
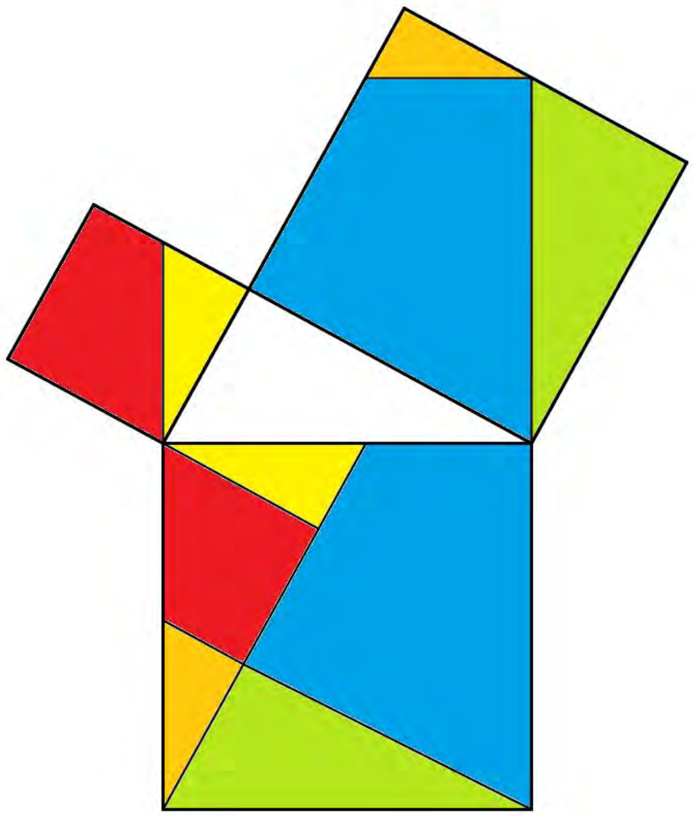


Figura 12.2



13. Perigal

Henry Perigal (1801-1898) fue un corredor de bolsa británico y gran aficionado a las matemáticas y la astronomía. En 1830 realizó una sencilla demostración del teorema de Pitágoras. Por el centro del cuadrado construido sobre el cateto mayor traza dos segmentos, uno paralelo y otro perpendicular a la hipotenusa dividiendo al cuadrado en cuatro piezas idénticas. Tan satisfecho quedó Perigal de su disección que encargó que se hiciera una inscripción con ella en su tumba.

En 1874 Perigal publicó un artículo "On geometric dissections and transformations" (Messenger of Mathematics, Vol. I ,pp. 103-105) que incluía esta disección (figura 13.1) y otra muy similar (figura 13.2) que tituló "Dos cuadrados transformados en uno".

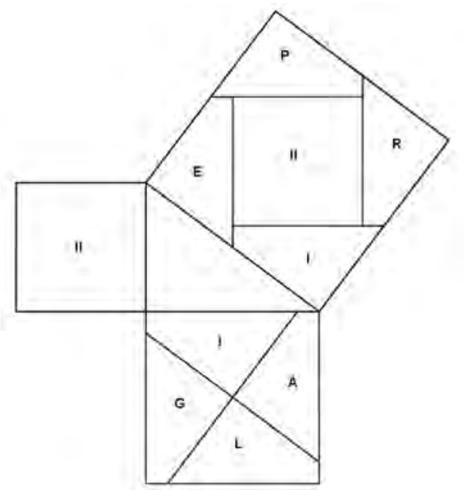


Figura 13.1

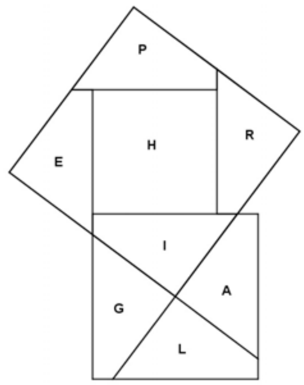
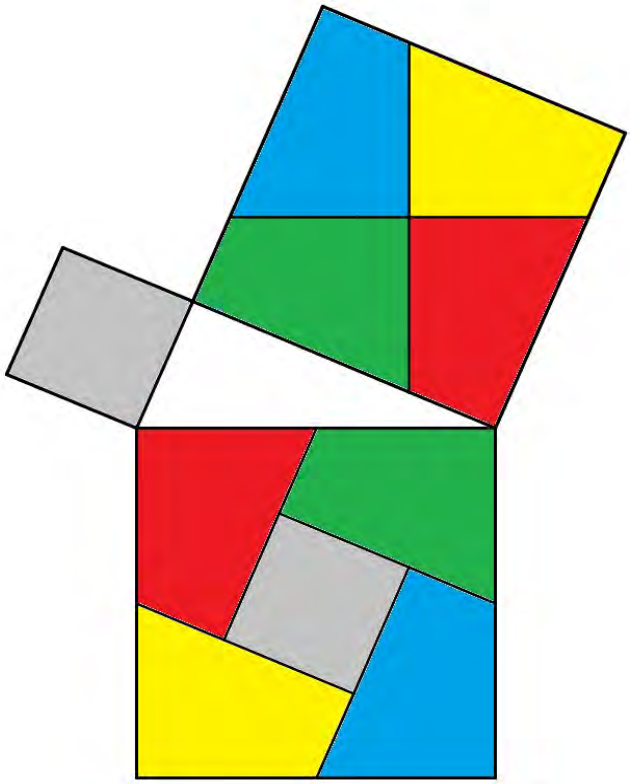


Figura 13.2



14. Perigal (generalización)

Partiendo de la demostración de Perigal podemos trazar otras semejantes ya que no es necesario que los segmentos trazados en el cuadrado del cateto mayor pasen por el centro de éste.

En los cuatro ejemplos que se presentan se han hecho pasar los segmentos trazados por dos de los vértices del cuadrado (figura 14.1).

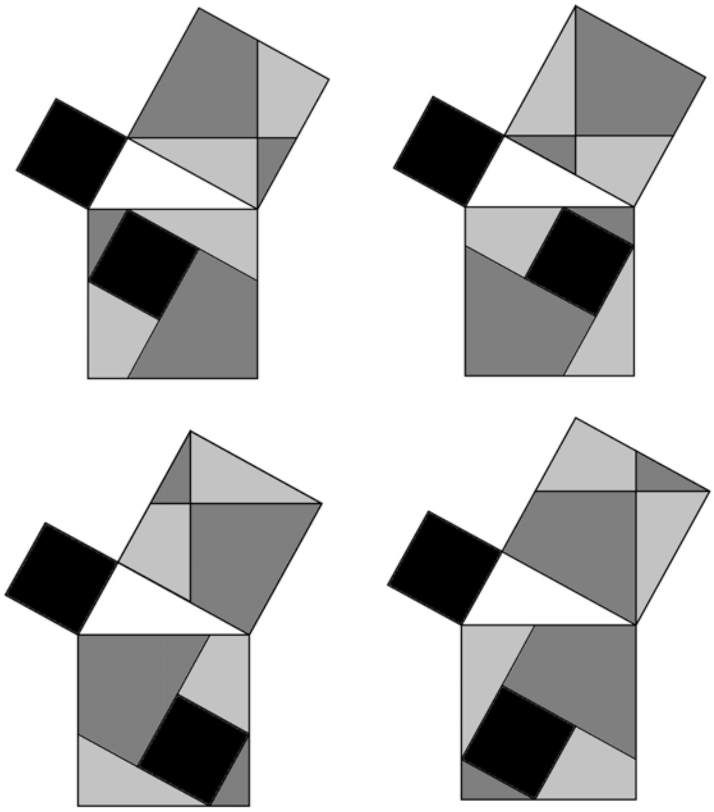
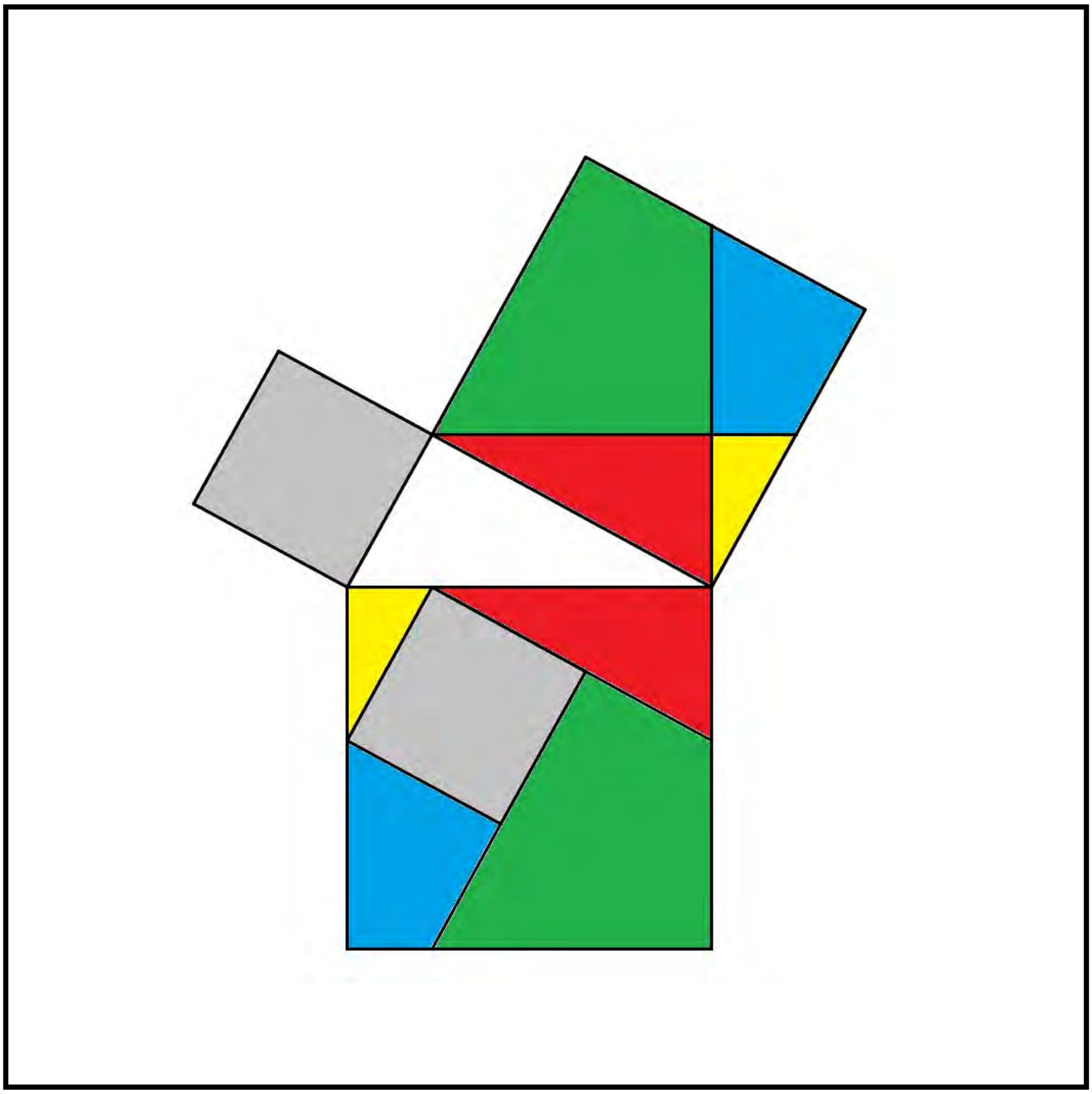


Figura 14.1



15. James A. Gardfield

James Abram Gardfield (1831-1881), antes de convertirse en el vigésimo presidente de Estados Unidos, también realizó su particular demostración del teorema de Pitágoras.

Basta calcular el área del trapecio de la figura de dos formas distintas.

Por un lado:

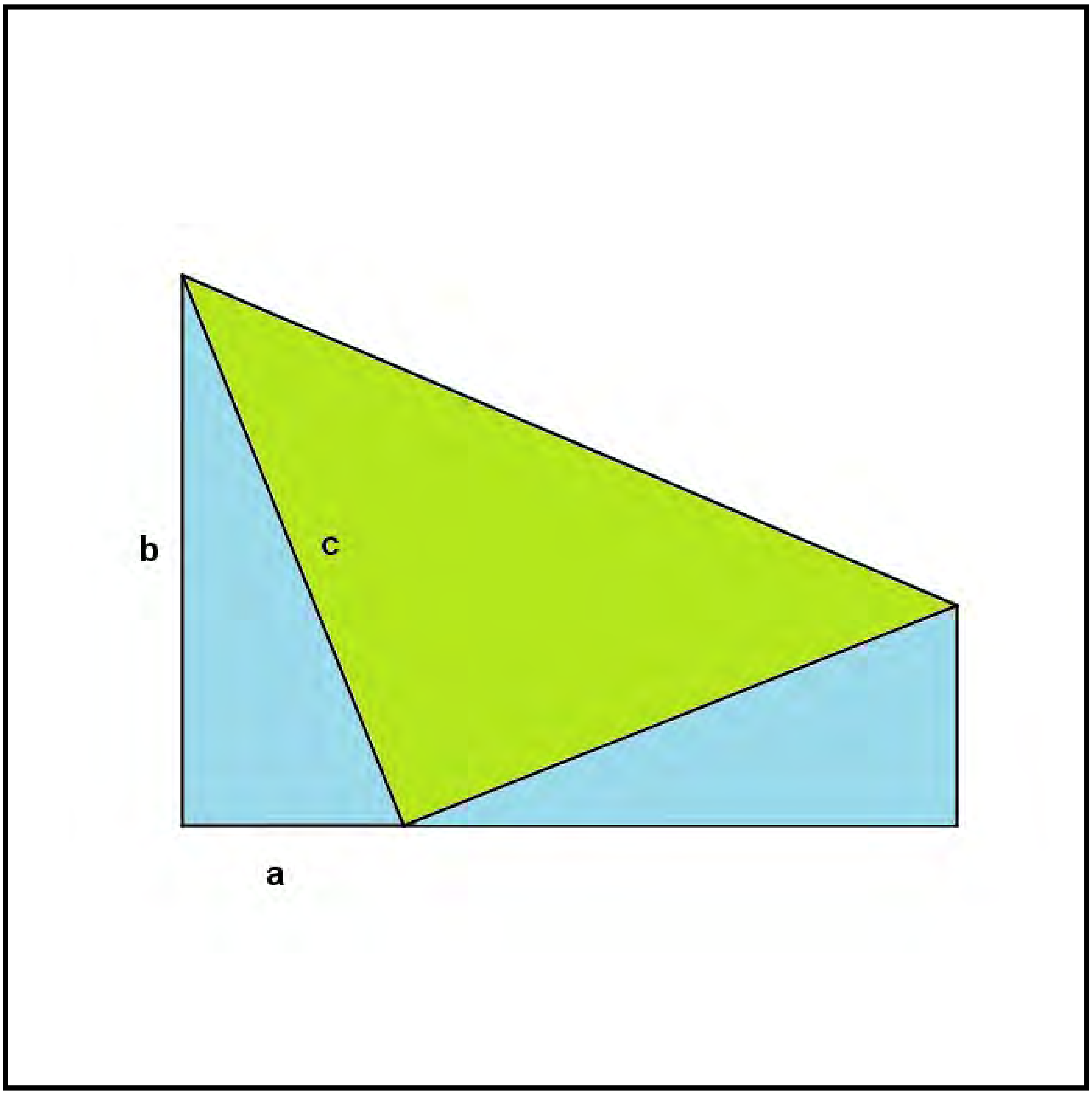
Área del trapecio = $\frac{(a+b)\cdot(a+b)}{2} = \frac{a^2+b^2+2ab}{2}$

Por otro:

Área del trapecio = Área triángulo$_1$ + Área triángulo$_2$ + Área triángulo$_3$ = $\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}$

Igualando ambas expresiones:

$$a^2+b^2=c^2$$



b
c
a

16. Jamie de Lemos

Jamie de Lemos era una estudiante de instituto en Framingham, Massachusetts, cuando presentó su demostración del teorema de Pitágoras en la revista Mathematics Teacher 88 (enero 1995, p.79).

La demostración es muy similar a la realizada por Garfield. Por un lado calcula el área del trapecio usando su fórmula:

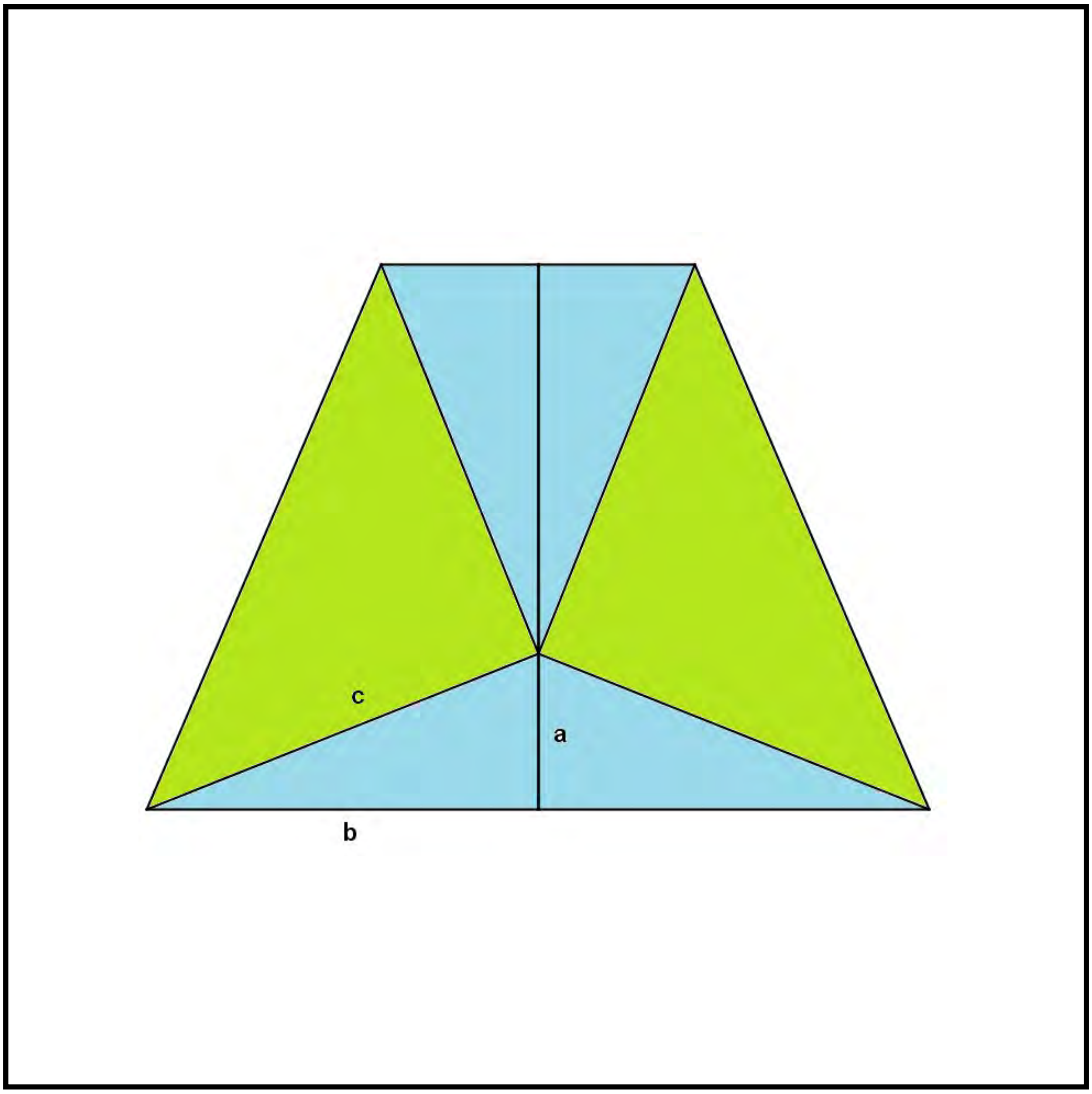
$$\text{Área del trapecio} = \frac{(2a+2b)\cdot(a+b)}{2} = a^2 + b^2 + 2ab$$

Por otro calcula el área del trapecio como la suma de las áreas de los seis triángulos que lo forman:

$$\text{Área del trapecio} = 4\cdot\frac{ab}{2} + 2\cdot\frac{c^2}{2} = 2ab + c^2$$

Igualando ambas expresiones:

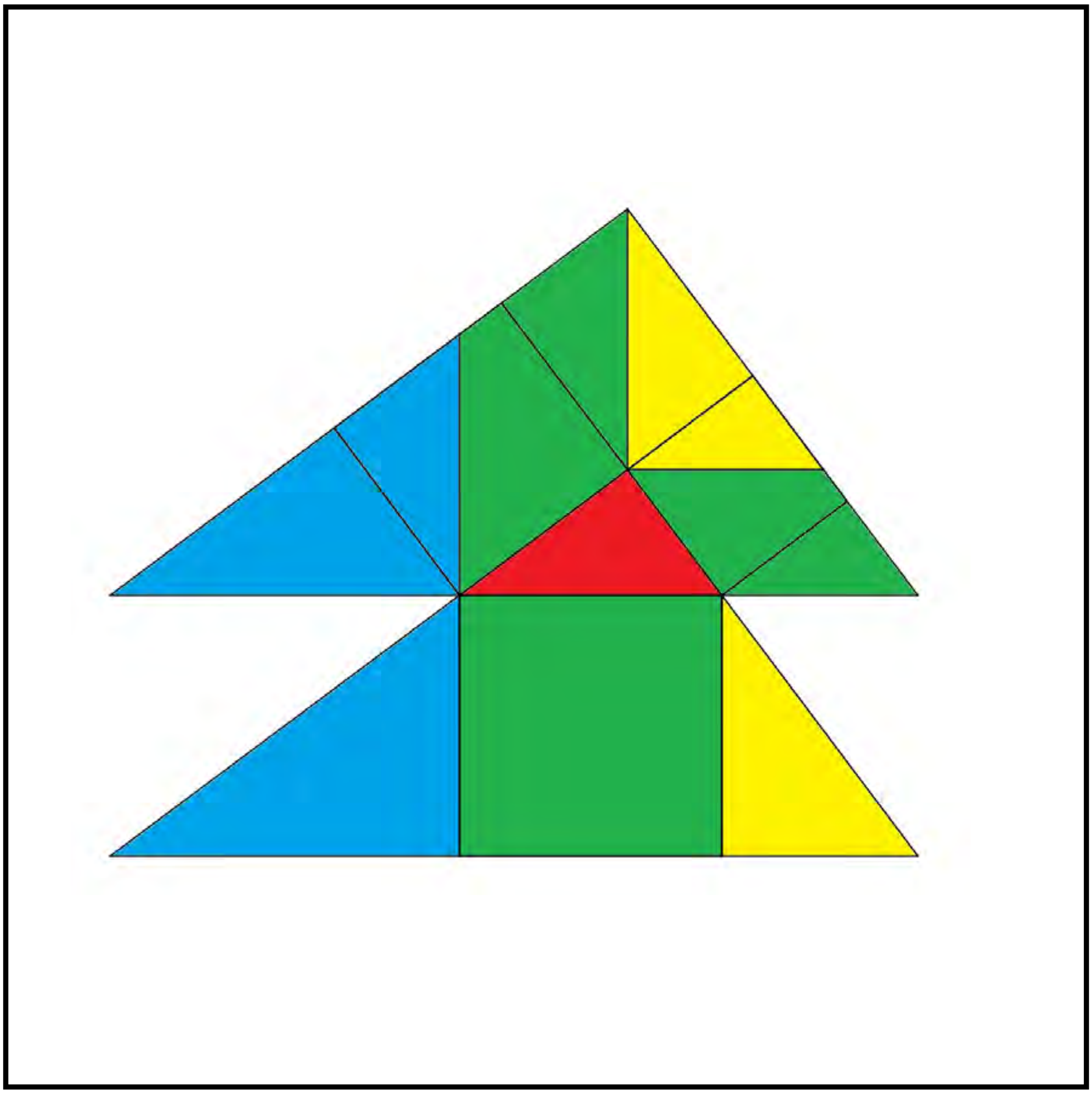
$$a^2 + b^2 = c^2$$


c
a
b

17. The Pythagorean Proposition

Elisha Scott Loomis (1852-1940) fue profesor de Matemáticas. Durante muchos años se dedicó a recopilar las múltiples demostraciones del teorema de Pitágoras que se han dado a lo largo de la historia. En 1927 publicó "The Pythagorean Proposition" un libro que recoge y clasifica 371 demostraciones de dicho teorema. El texto de E.S. Loomis fue corregido, ampliado y reeditado en 1940. El libro concluye con la frase: " … y el final no ha llegado todavía".

La siguiente demostración aparece en dicho libro (demostración geométrica 64).



18. W. J. Dobbs

Esta demostración fue publicada por W.J. Dobbs en The Mathematical Gazette, 7 (1913-1914), p.168.

Se construye un cuadrado sobre el cateto mayor del triángulo rectángulo. El triángulo se rota 90º alrededor de uno de sus vértices. La figura resultante tiene el mismo área que el cuadrado y se puede dividir en dos triángulos rectángulos.

Por un lado:

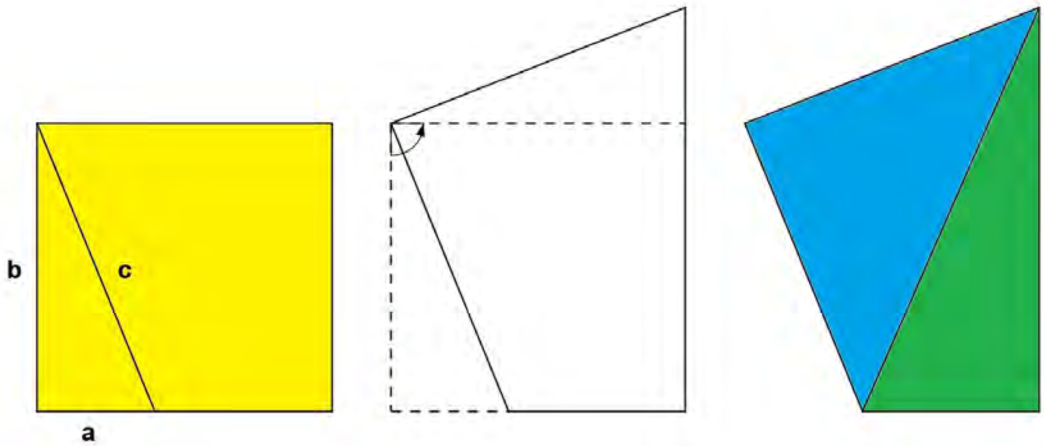
Área del cuadrado = b^2

Por otro lado:

Área figura resultante= $\frac{c^2}{2}+\frac{(b-a)\cdot(a+b)}{2}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}$

Igualando ambos expresiones y simplificando:

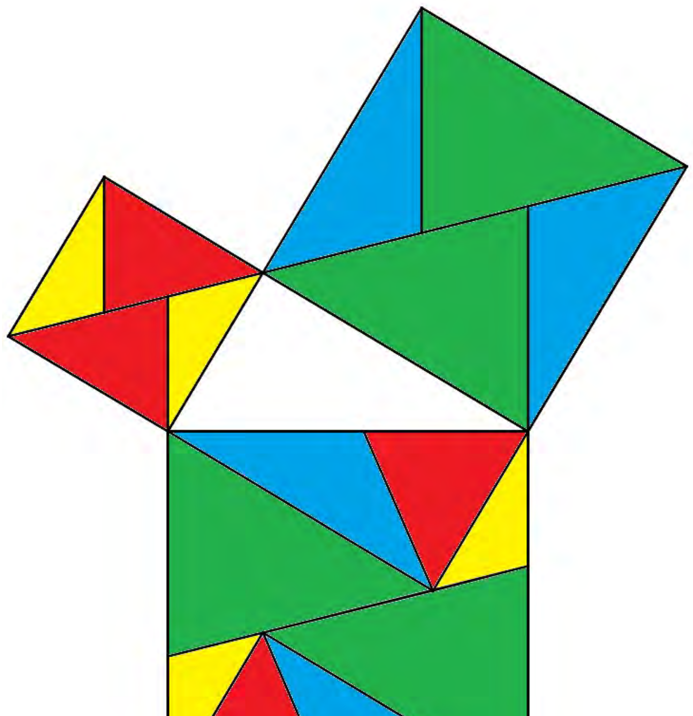
$$a^2+b^2=c^2$$


b
c
a

19. J.E. Böttcher

Johannes Eduard Böttcher (1847-1919) fue un físico alemán que dedicó gran parte de su trabajo de investigación a las matemáticas puras. En 1886 publicó un artículo en el que proponía el siguiente puzzle pitagórico.

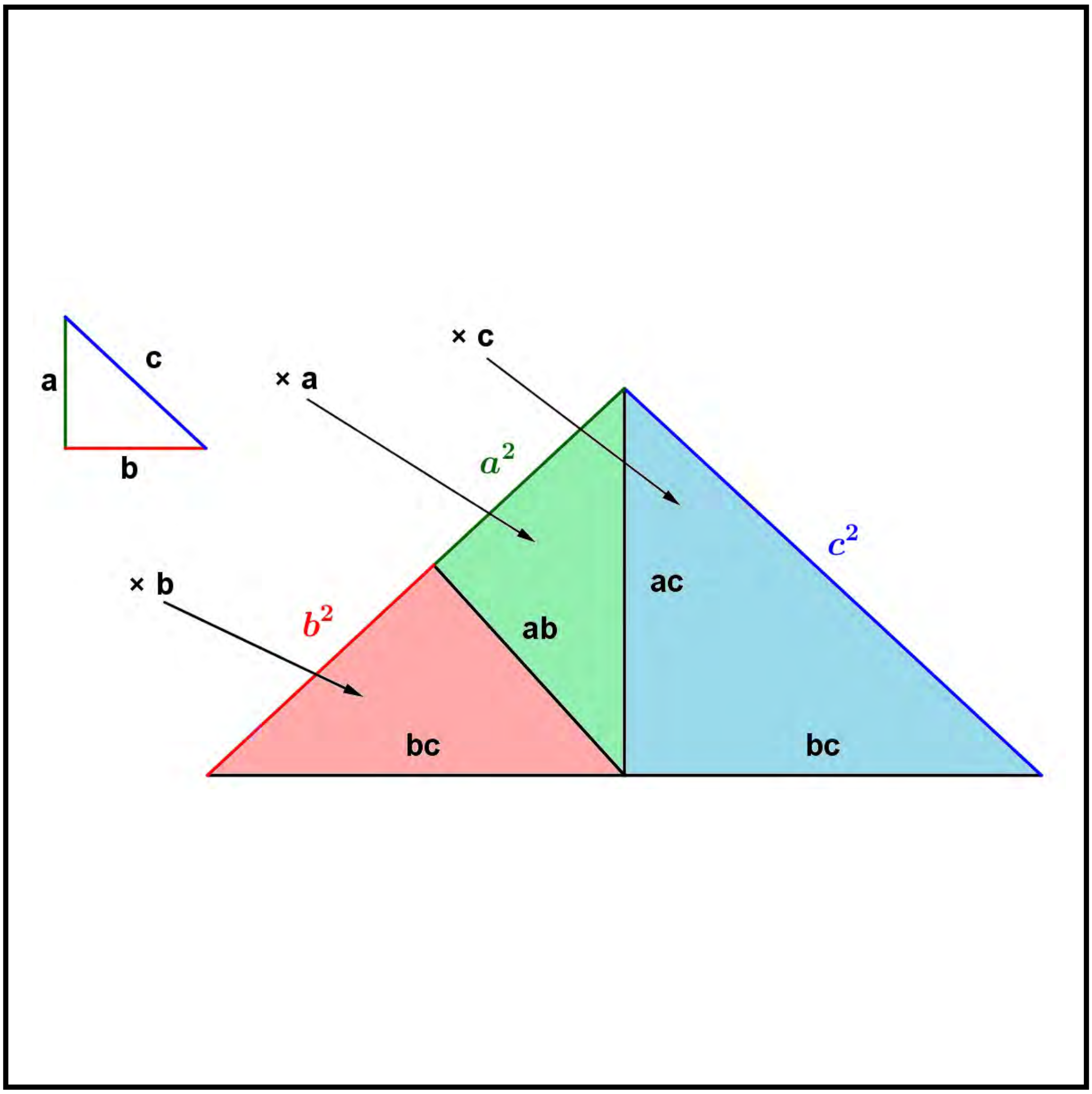
El puzzle consiste en dividir cada uno de los cuadrados de los catetos en cuatro triángulos iguales dos a dos y con ellos completar el cuadrado de la hipotenusa. En los tres cuadrados se puede observar una curiosa simetría central.



20. Frank Burk

Frank Burk (1942-2007) fue profesor de matemáticas en la facultad de la California State University en Chico, California.

En 1996 publicó en The College Mathematics Journal una elegante demostración del teorema de Pitágoras basada en la semejanza de triángulos. Para ello multiplica los lados del triángulo rectángulo -a, b y c- por a, b y c respectivamente, formando así tres triángulos rectángulos semejantes al original. Después une los tres nuevos triángulos para formar un nuevo triángulo isósceles que prueba el teorema de Pitágoras.



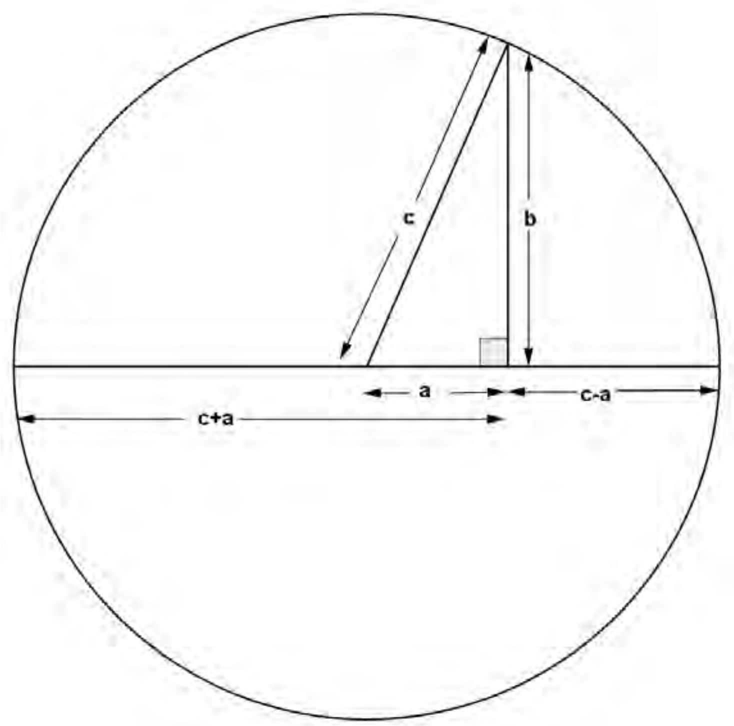
a
b
c
× c
× a
× b
a^2
b^2
c^2
ac
ab
bc
bc

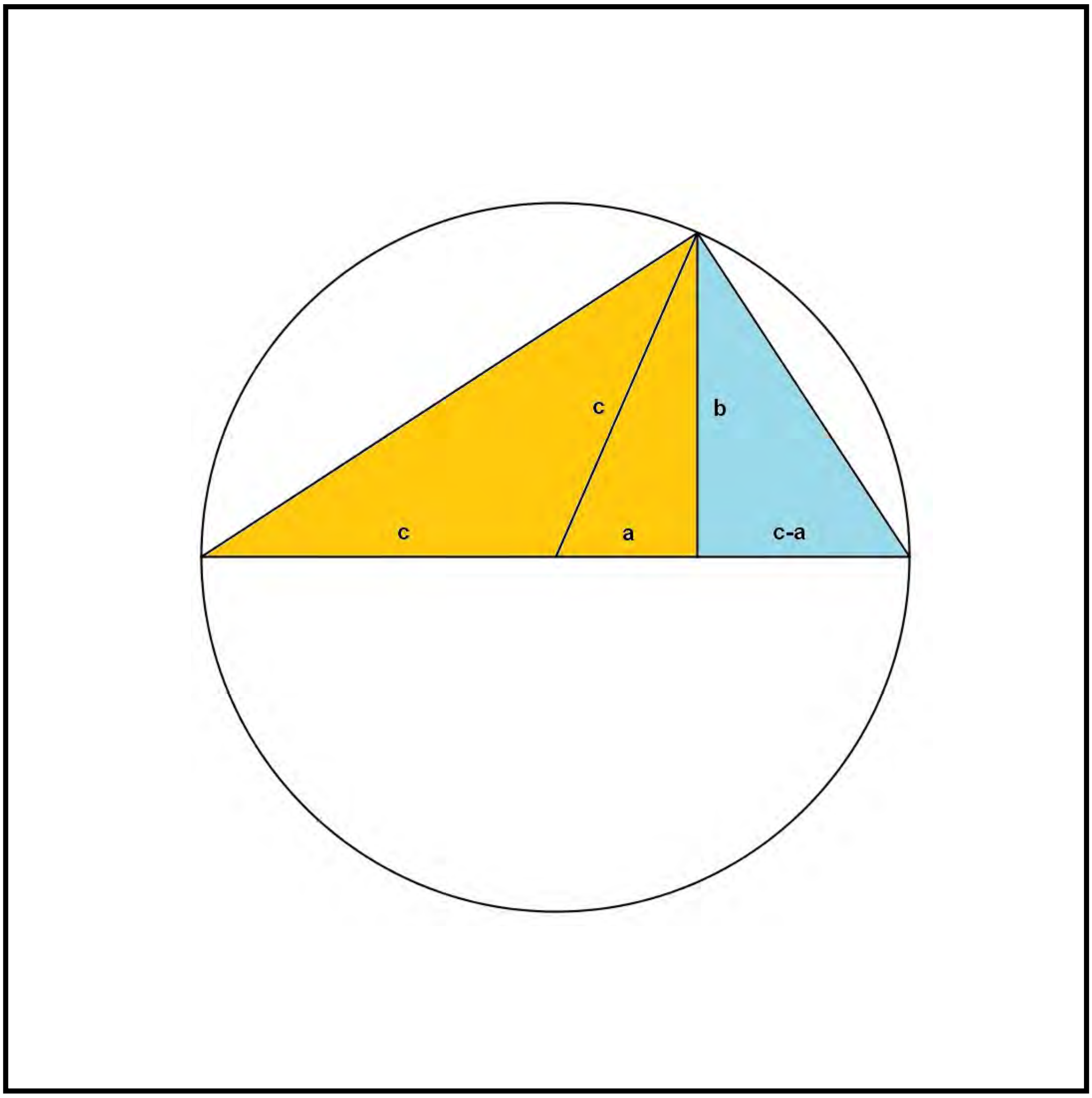
21. Michael Hardy

Michael Hardy, profesor de la Universidad de Minnesota, Minneapolis, publicó en noviembre de 1986 en la revista “College Mathematics Journal” la siguiente demostración del teorema de Pitágoras. Tituló la demostración: “Behold! The Pythagorean Theorem via Mean Proportions” (¡Aquí está! El Teorema de Pitágoras a través de las medias proporcionales).

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

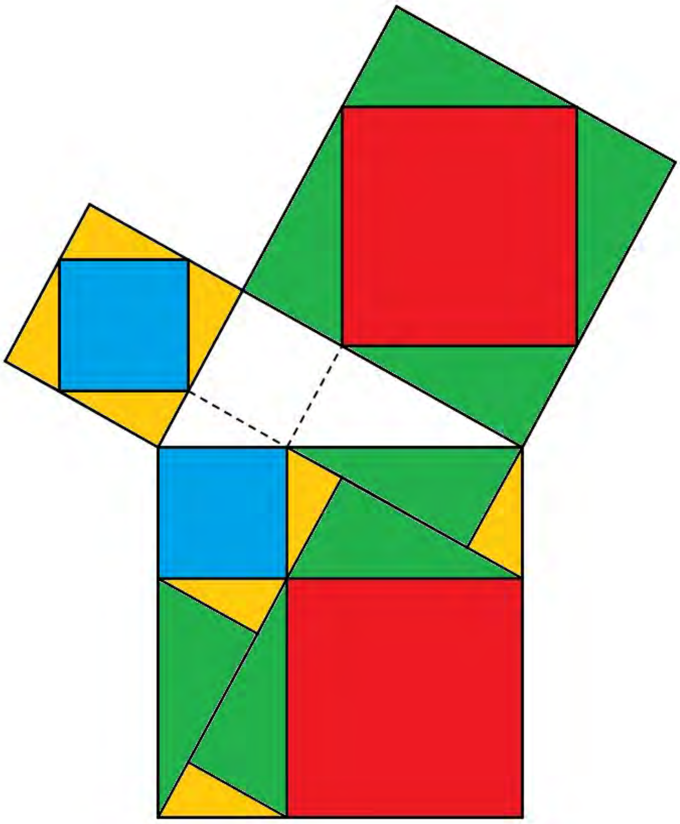
$$a^2 + b^2 = c^2$$




c
b
c
a
c-a

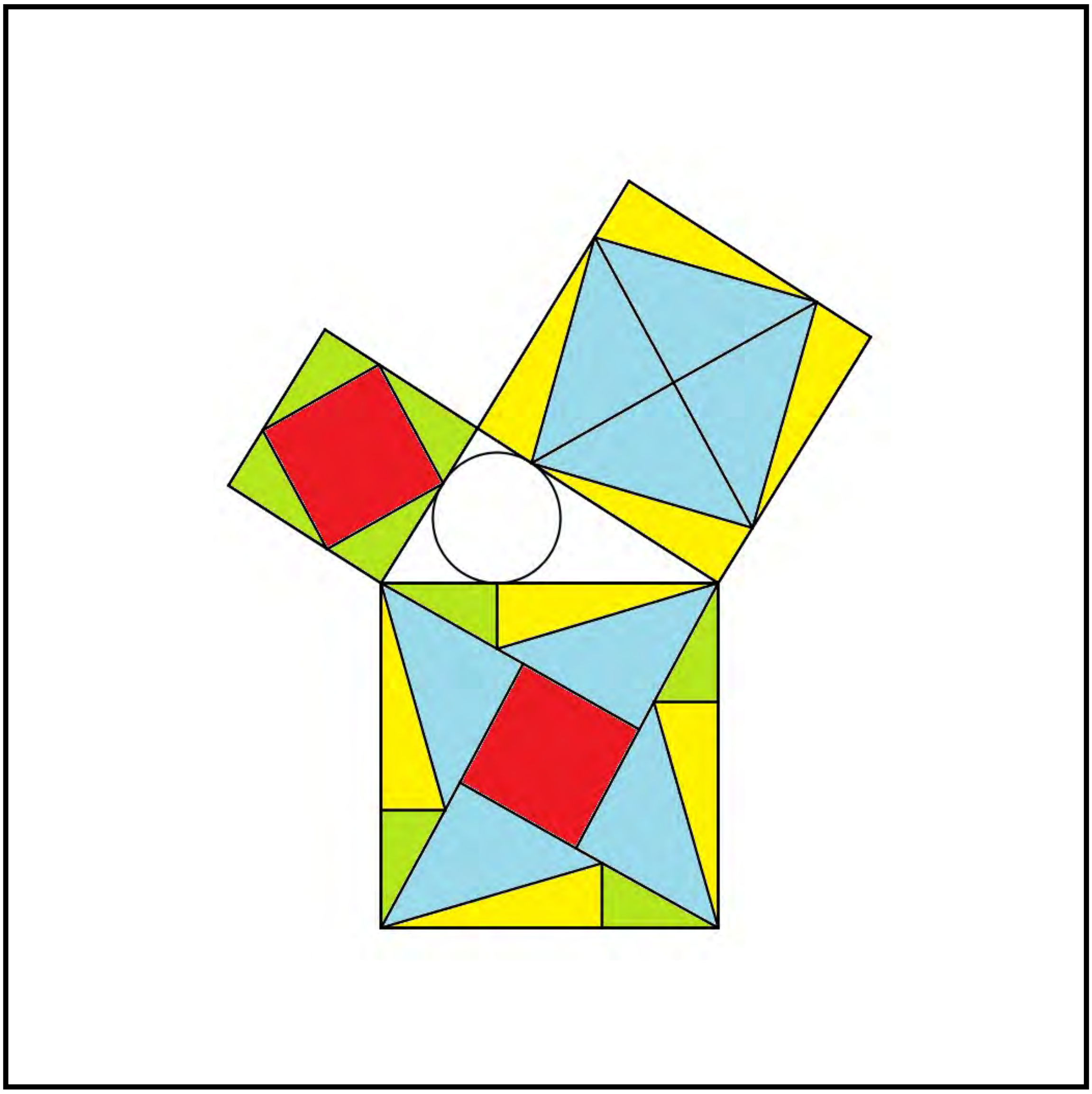
22. J. Adams

Esta demostración aparece en el libro “The Pythagorean Proposition” (prueba geométrica nº 27). Según Loomis le fue enviada por J. Adams en 1933 desde La Haya, Holanda. Loomis remarca que en esta disección todas las líneas son paralelas o perpendiculares a los lados del triángulo.



23. A.G. Samosvat

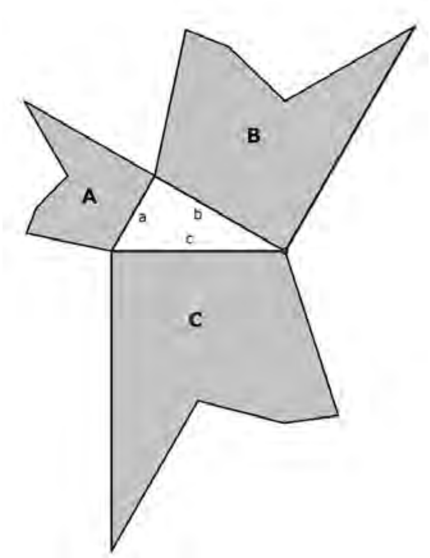
La siguiente demostración aparece en la página web “the Pythagorean Theorem and its many proofs ” (http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/). La excelente página creada por Alexander Bogomolny contiene 112 demostraciones del teorema. En ella se indica que esta demostración, que aparece en la posición 104, se debe a Alexander G. Samosvat y es un claro ejemplo de demostración sin palabras.



24. Euclides

En el libro VI de "Los Elementos" de Euclides aparece una generalización del teorema de Pitágoras. Se trata de la proposición VI.31:

"En los triángulos rectángulos, la figura construida a partir del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto" (figura 24.1).



C = A + B

Figura 24.1

En particular la proposición VI.31 se puede aplicar a polígonos regulares y a círculos o semicírculos (figuras 24.2 y 24.3).

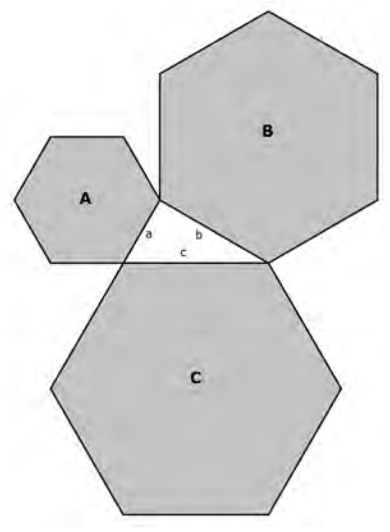


Figura 24.2

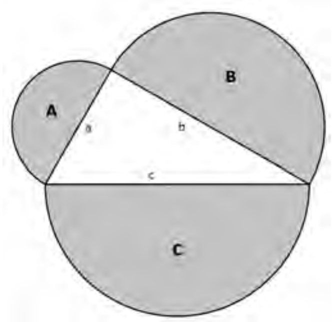
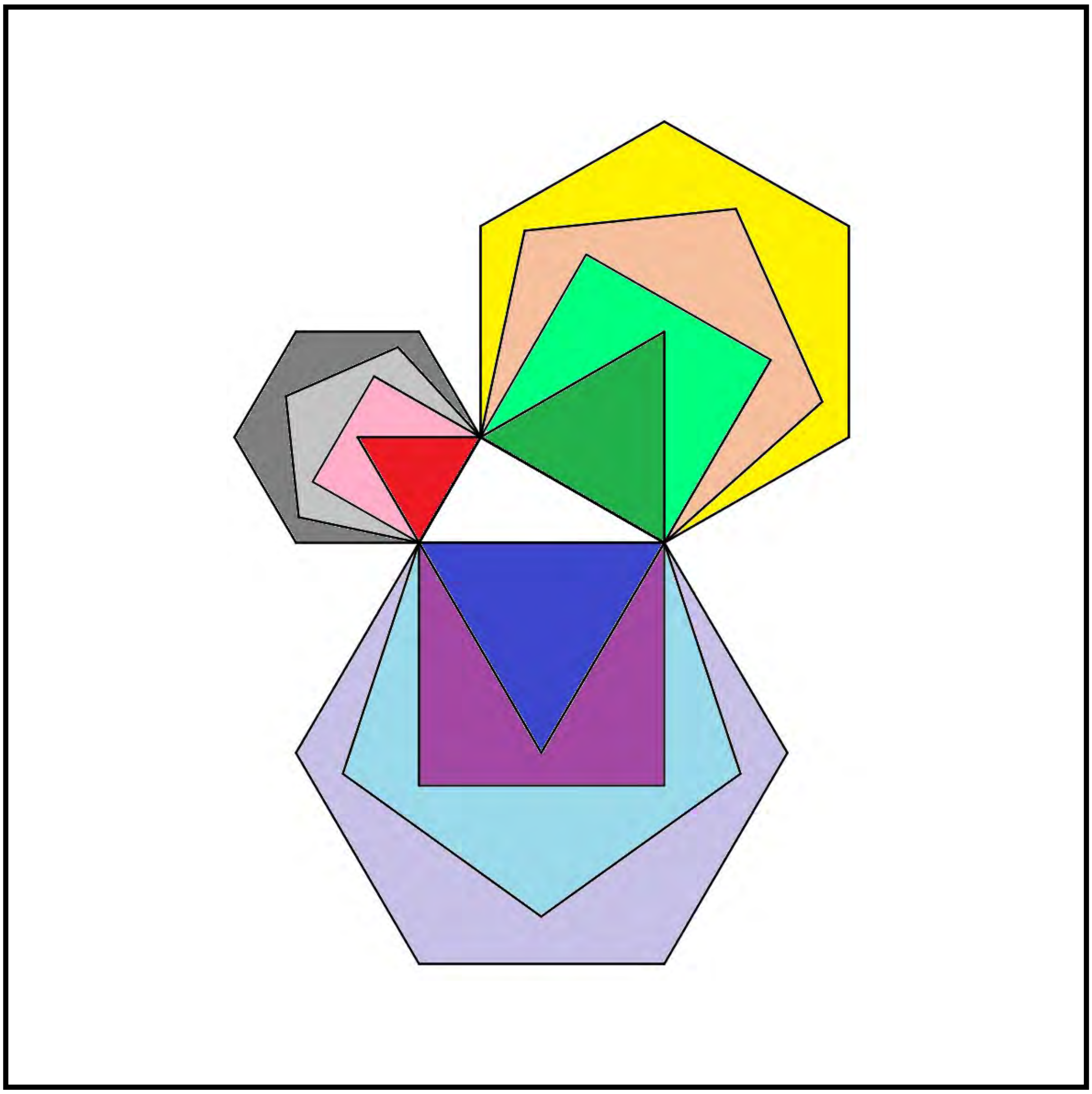


Figura 24.3



25. Stanley Jashemski

En el libro “The Pythagorean Proposition” se atribuye la siguiente demostración a Stanley Jashemski en 1934, cuando Stanley era un estudiante de 19 años de Youngstown Ohio.

Los triángulos ABC, ADC y CDB son semejantes y además el área del triángulo ADC más el área del triángulo CDB es igual al área del triángulo ABC.

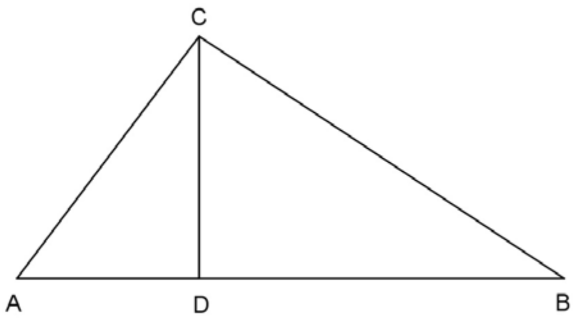
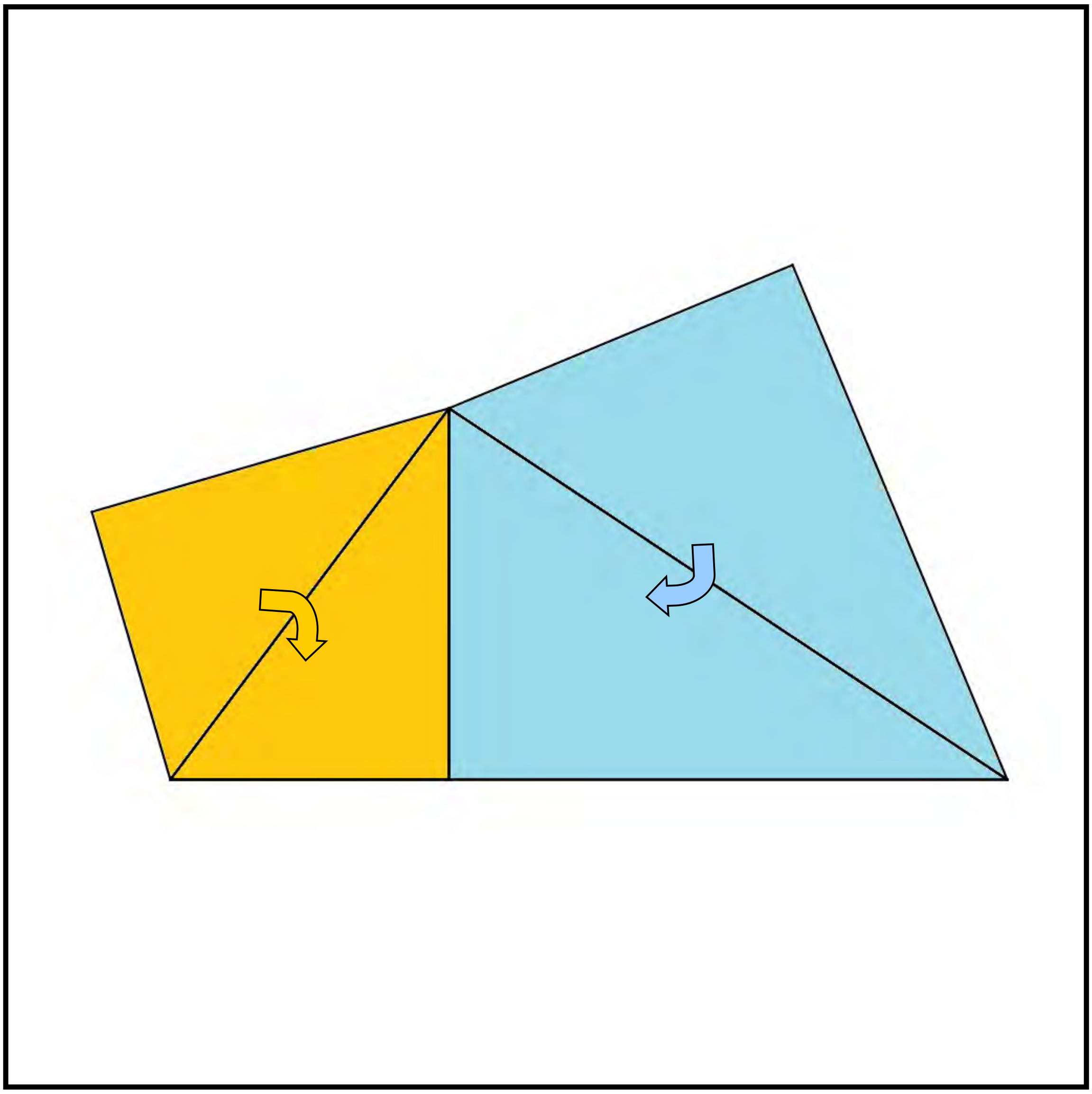
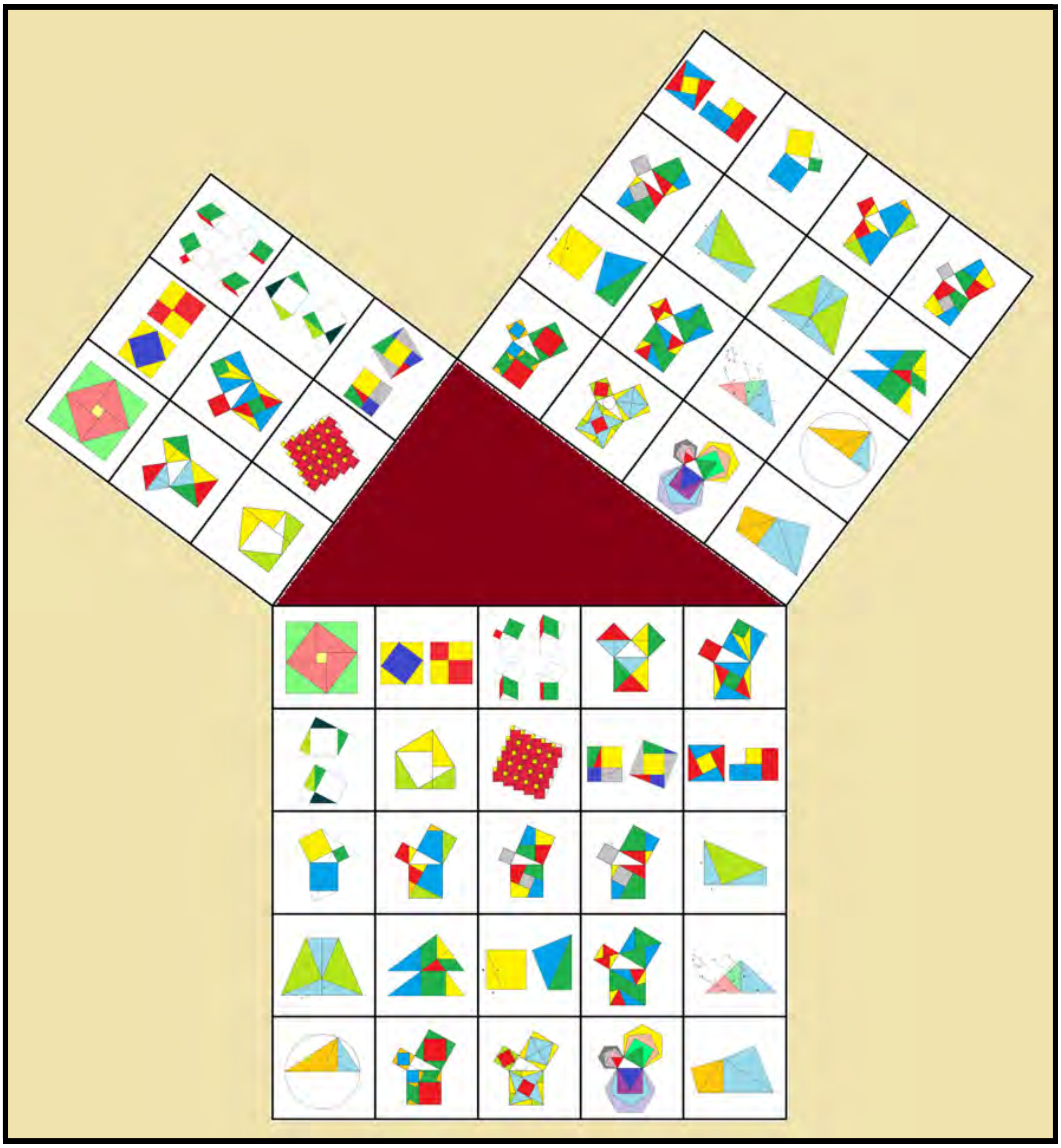


Figura 25.1

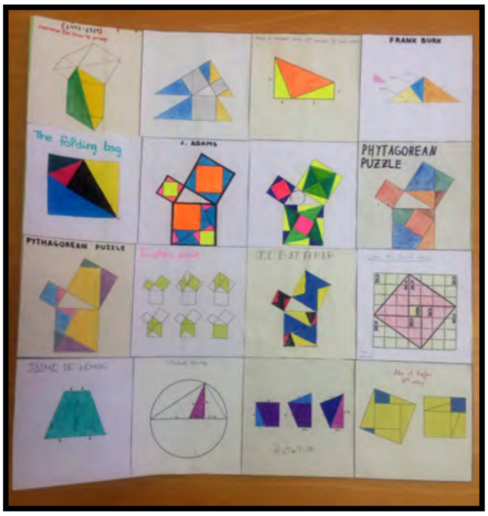


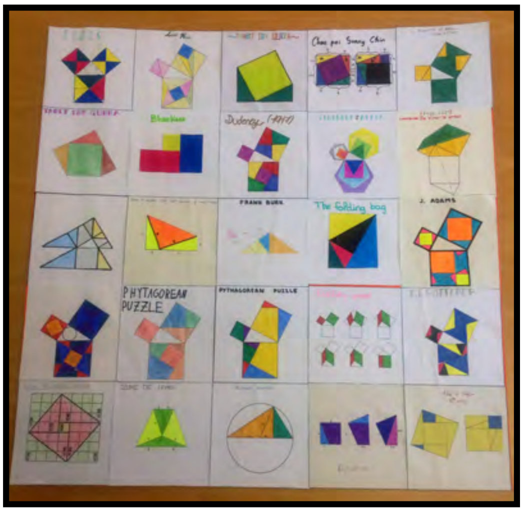
EL CUADRADO DE LA HIPOTENUSA



EL PROYECTO

Este libro se basa en un proyecto realizado con alumnos de 3º de ESO (14-15 años) durante el curso 2014-2015. Cada alumno debía explicar una demostración diferente del Teorema de Pitágoras y dibujar dos ilustraciones (15 x 15 cm) de dicha demostración. Posteriormente se colocaba cada una de las ilustraciones sobre un triángulo rectángulo formando un mural gigante en clase (una ilustración en uno de los catetos y la otra en la hipotenusa). Al finalizar la exposición de las 25 demostraciones y tras un recorrido por 4000 años de la historia de la humanidad se terminó de construir el mural que era, a su vez, una comprobación del Teorema de Pitágoras de un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5.





BIBLIOGRAFÍA:

- **The Pythagorean Theorem**
  A 4,000-year history
  Autor: Eli Maor
  Editorial: 2007, Princeton University Press

- **The Pythagorean Proposition**
  Autor: Elisha Loomis
  Editorial: 1968, National Council of Teachers of Mathematics

- **La secta de los números**
  Autor: Claudi Alsina
  Editorial: 2010, RBA Coleccionables S.A.

- **The Pythagorean Theorem**
  The Story of Its Power and Beauty
  Autor: Alfred S. Posamentier
  Editorial:2010, Prometheus Books

- **The Pythagorean Theorem**
  Crown Jewel of Mathematics
  Autor: John C. Sparks
  Editorial: 2008, John C. Sparks

- **Proofs without words**
  Autor: Roger B. Nelsen
  Editorial: 1993, The Mathematical Association of America

- **Proofs without words II**
  Autor: Roger B. Nelsen
  Editorial: 2000, The Mathematical Association of America

- **Proofs without words III**
  Autor: Roger B. Nelsen
  Editorial: 2015, The Mathematical Association of America

- **El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años.**
  Artículo de: Pedro Miguel González Urbaneja
  Revista SIGMA Nº 32 Noviembre 2008, pp. 103-130