11.109 Estructura hiperestàtica simple. Elasticitat-Plasticitat

L'estructura que es veu a la figura 11.246 està composta per tres barres O-1, O-2 i O-3. Estan subjectes i articulades en els punts 1, 2 i 3. Coincideixen en el punt O, igualment articulat, on es troba la força F gravitatòria que acciona l'estructura. Aquesta és hiperestàtica amb un grau d'hiperestaticitat, és a dir, l'estructura funcionaria igualment si alguna de les barres no existís. Tot el conjunt, barres i força, estan en el mateix pla vertical i és simètric en referència a una línia vertical que passa pel punt O.

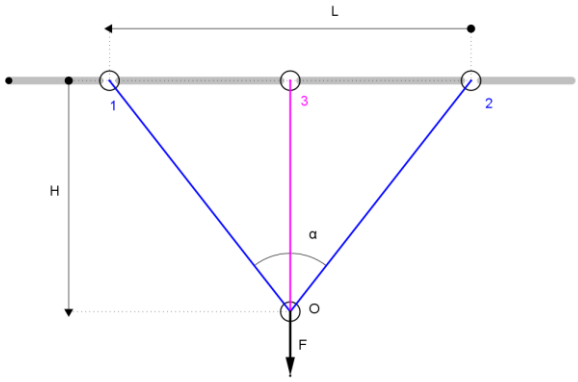


Fig. 11.246

Geomètricament, l'estructura queda definida per les magnituds L i H que es troben en punts lliscants. L'angle α i la longitud de les barres queden calculats i es troben a la casella de resultats previs. Les barres són metàl·liques, en forma de rodons, amb el mateix diàmetre, és a dir $\phi O1 = \phi O2 = \phi O3$, cosa que permet calcular les seccions $\Omega O1 = \Omega O2 = \Omega O3$. El comportament mecànic de les barres es troba en el diagrama de la figura 11.247. Es tracta d'un diagrama tensió-deformació simplificat de càlcul en el qual es troben les tensions σs en les ordenades, i en les abscisses, les deformacions que, perquè siguin visibles, venen multiplicades per una constant $k\varepsilon$ que es troba en forma de punt lliscant. El diagrama consta de dues parts: la primera parteix de l'origen i defineix la proporcionalitat entre tensions i deformacions i la segona indica una zona on es produeix deformació amb una tensió constant fyd (fig. 11.247). Com a punts singulars d'aquest diagrama tenim el punt εy, que defineix el límit d'elasticitat fyd, i εmax, que indica el punt en què el material col·lapsa i al qual la majoria de les normes donen el valor de $\varepsilon max = 0.01$.

Aquesta aplicació provocarà valors successivament incrementats d'F, de tal manera que, amb un criteri ***didàctic****, es comprovi quina és la reacció de l'estructura enfront d'aquests increments.*

Primerament s'ha de parlar de seguretat. Apareixen dos coeficients de seguretat, γf majorant la sol·licitació F i γs minorant la qualitat de l'acer, que queden definits pel seu límit elàstic, fy. Aquests coeficients de seguretat queden definits a les normes o instruccions. D'aquesta manera tindrem els valors de càlcul Fd per a la sol·licitació i fyd per a l'acer. Com que a conseqüència de la sol·licitació les barres es deformaran, serà imprescindible conèixer el valor del mòdul de deformació de l'acer E.

En provocar successius increments en el valor d'F, l'estructura passarà per diferents dominis que a continuació s'estudiaran.

Domini: Elàstic. Per a valors molt petits d'F, l'estructura també tindrà valors de deformació molt petits, és a dir, que el més probable és que ens situem en un domini elàstic (fig. 11.247). Però, en primer lloc, s'han de calcular les forces que actuen en cada barra. Atès que es tracta d'una estructura hiperestàtica, el càlcul de les forces que F o Fd provoquen a cadascuna de les barres no és immediat. En efecte, les condicions convencionals de l'equilibri no seran suficients per resoldre el problema, s'haurà de recórrer a les condicions de deformabilitat. Tot això

desembocarà en un sistema d'equacions que, en aquest cas, atès que l'estructura únicament té un grau d'hiperestaticidad, serà de dues equacions i dues incògnites.

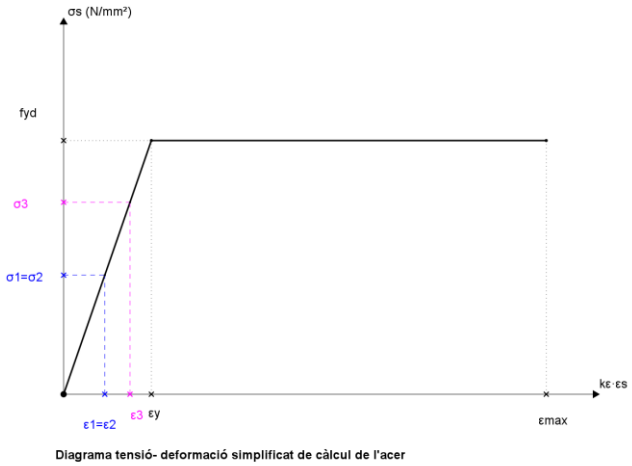
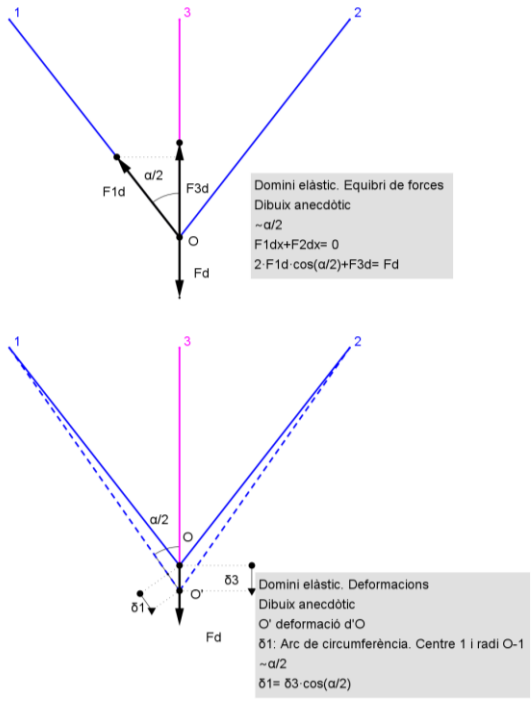


Fig. 11.247

La primera part de la figura 11.248 imposa l'equilibri de forces. Per la simetria de l'estructura, les components horitzontals de les forces F1dx i F2dx són iguals. Projectant les forces en l'eix vertical, tindrem:

$2 \cdot F1d \cdot \cos(\alpha/2) + F3d = Fd$

A la mateixa figura 11.248 es pot veure la relació entre deformacions, on: $\delta 1 = \delta 3 \cdot \cos(\alpha/2)$



Tenint en compte que la deformació longitudinal d'una barra és proporcional a la força que actua en el seu eix i a la seva longitud i inversament proporcional a la seva secció i al seu mòdul d'elasticitat, la segona equació queda de la forma:

$F1d \cdot LO1 = F3d \cdot LO3 \cdot \cos(\alpha/2)$

Ja disposem de dues equacions i de dues incògnites F1d i F3d. Resolent per F3d, resulta:

$F3d = Fd/((LO3/LO1) \cdot \cos^2(\alpha/2)+1)$

i de forma immediata, la primera equació ens dona el valor d'F1d. Dividint aquestes forces per la seva secció tindrem les tensions $\sigma 1 = \sigma 2$ i $\sigma 3$ i amb les tensions i el mòdul

Fig. 11.248

de deformació, multiplicades pel seu coeficient de visibilitat, les deformacions $\varepsilon 1 \cdot k\varepsilon = \varepsilon 2 \cdot k\varepsilon$ i $\varepsilon 3 \cdot k\varepsilon$. Aquests són els valors que es veuen a la figura 11.247, on tant les tensions com les deformacions es troben en la recta de proporcionalitat. Aquests resultats confirmen el domini elàstic. Si fem F= 0, l'estructura recupera la seva silueta original.

Domini: Elastoplàstic. Si la força F augmenta, hi haurà un moment en què la barra O-3, que és la més afectada, tindrà una deformació $\varepsilon 3$ que superarà el tram de proporcionalitat i se situarà en el tram plàstic, però la seva tensió $\sigma 3$ no podrà superar el valor màxim del material, en aquest cas, fyd. No obstant això, les barres O-1 i O-2 encara es troben en domini elàstic. En aquesta situació es diu que l'estructura es troba en domini elastoplàstic (fig. 11.249). Es dona una circumstància molt interessant: atès que la força que actua a la barra O-3, Fd3 és

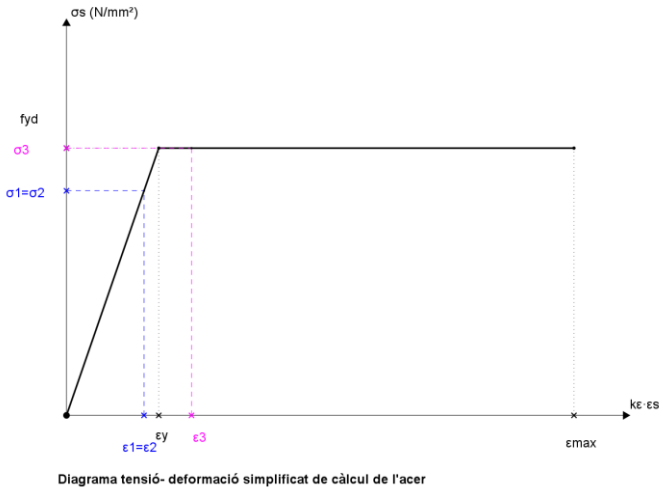


Diagrama tensió- deformació simplificat de càlcul de l'acer

Fig. 11.249

coneguda, l'estructura es troba isostaticitada, és a dir, ja no és necessari plantejar-se un sistema de equacions sinó que és suficient establir l'equilibri de forces en el nus O. La hiperestaticitat s'ha perdut pel fet que només havia un grau d'hiperestaticitat. A la figura 11.250 s'estableix l'equilibri de forces de la següent manera:

$2 \cdot F1d \cdot \cos(\alpha/2) + fyd \cdot \Omega O3 = Fd$

del que es pot aclarir el valor de F1d, tenint present que el valor de la força F3d és $F3d = fyd \cdot \Omega O3$.

Si en aquest domini es fa F= 0, l'estructura no recupera la seva silueta original. Les barres O-1 i O2 estan en domini elàstic i intenten recuperar la longitud inicial però la barra O-3, que es troba en domini plàstic, ho impedeix. Les barres O-1 i O-2 quedaran igualment traccionades però la barra O-3 quedarà comprimida (no es contempla el guerxament de la barra). Tindrem:

$2 \cdot Fid \cdot \cos(\alpha/2) - fyd \cdot \Omega O3 = 0$

que permetrà calcular el valor de F1d en aquestes circumstàncies. Les barres estan accionades sense una força exterior que ho produeix (és similar al que passa en el formigó pretesat).

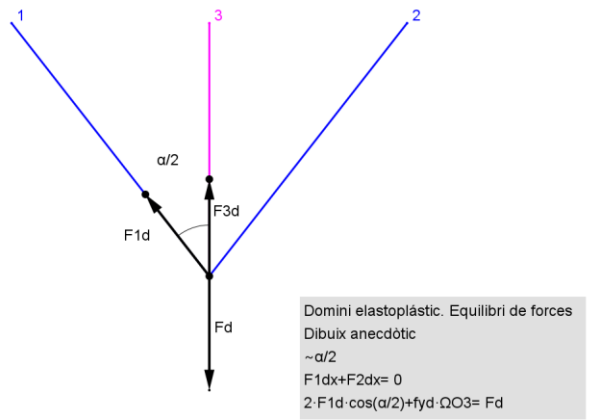
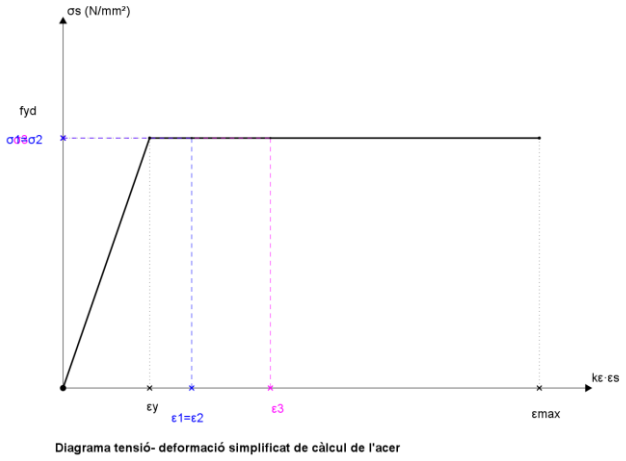


Fig. 11.250

Domini: Plàstic. Si el valor d'F segueix augmentant, es donaran unes deformacions en les tres barres que se situaran en el tram horitzontal del diagrama tensió-deformació de l'acer (fig. 11.251). Es tindrà que:

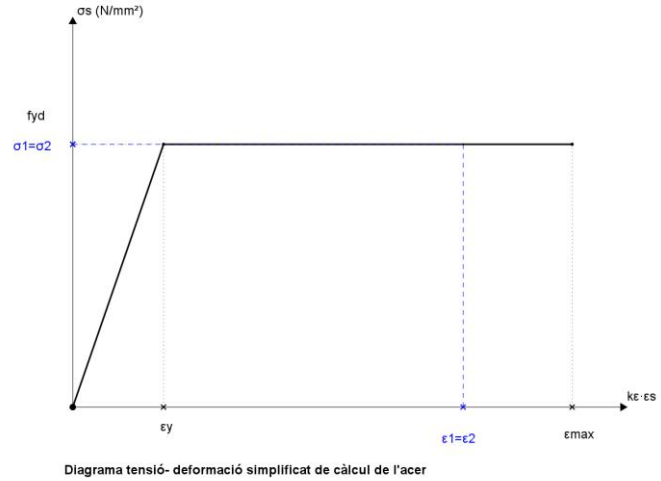


Fid= F2d= F3d= fyd·Ω

sent Ω la secció de qualsevol de les tres barres. Si no es dona l'equilibri de forces, l'estructura col·lapsa. Al contrari que en els dos dominis anteriors si la càrrega s'anul·la, l'estructura no experimenta cap moviment.

Fig. 11.251

Trencament de la barra O-3. Com es comprova, en qualsevol domini i qualsevol geometria, la barra O-3 és la més compromesa (quan les tres barres tenen la mateixa secció). Serà la primera en trencar-se, és a dir, sortirà del final del tram horitzontal del diagrama tensió-deformació superant la deformació màxima εmax (fig. 11.252). L'estructura estarà suportada únicament per les barres O-1 i O-2 tal que:



F1d= fyd·ΩO1

Fig. 11.252

Si no es dona l'equilibri de forces, l'estructura col·lapsa. Finalment, per a valors superiors d'F i si el valor d'ε1= ε2 supera al valor d'εmax, l'estructura també col·lapsa.

Es tindrà present que el valor d'α variarà. De forma poc significativa en domini elàstic, però probablement significativa en domini elastoplàstic i plàstic. Com que el valor d'F varia al llarg de l'aplicació, pot ser necessari variar l'escala de forces (punt lliscant). També pot ser interesant donar com a valor de visibilitat de les deformacions el valor kε =1000.