TEOREMA DI GULDINO

Enunciato :

Il volume, generato da una superficie piana che ruota attorno

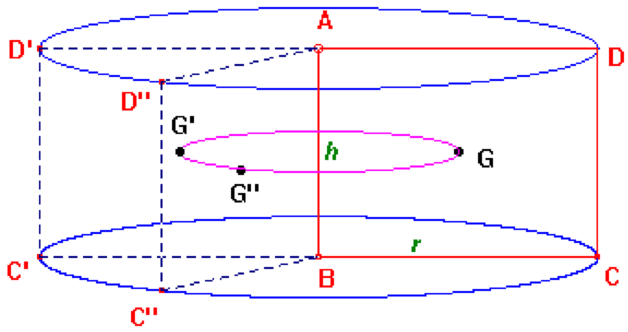
ad un asse che non la attraversa,

è dato dal prodotto

dell'area della figura

per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro.

Come arrivare alla formula del teorema di Guldino



Consideriamo ora un ***cilindro circolare retto***, ottenuto per **rotazione di un rettangolo ABCD attorno al lato AB.** Sia ***h*** **l'altezza del cilindro** (=AB) e ***r*** **il raggio di base** (=BC).

Indichiamo poi con G il baricentro del rettangolo, supposto omogeneo; G dista *r*/2 da AB.

Per il volume del cilindro si ha allora:

$$V = \pi r^2 h = \left(2\pi \frac{r}{2}\right)(rh) = \left(2\pi \frac{r}{2}\right) A$$

dove *A* è l'area del rettangolo.

Si può cioè concludere che il volume è dato **dall'area del rettangolo** per **la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro del rettangolo stesso**

Riprendiamo ora in esame il procedimento utilizzato per calcolare il volume di un solido di rotazione come somma dei volumi di infiniti cilindri generati da rettangoli che ruotano.

Detta y_{Gi} l'ordinata del baricentro del generico rettangolo (che si trova a metà della sua altezza), possiamo scrivere la seguente formula approssimata per il volume del solido di rotazione:

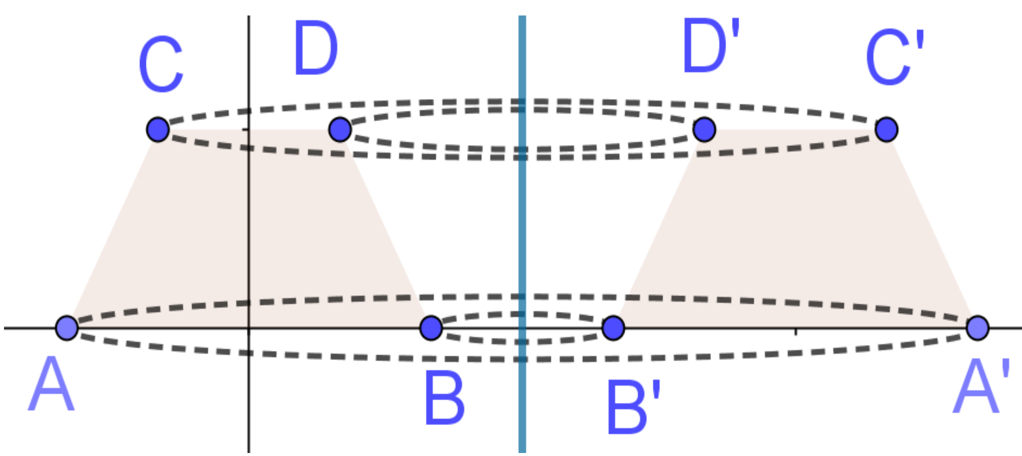
$$V=\sum_{i=1}^{n} V_i=\sum_{i=1}^{n} 2\pi\, y_{Gi} A_i=2\pi A \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{Gi} A_i}{A}=2\pi A\, y_G$$

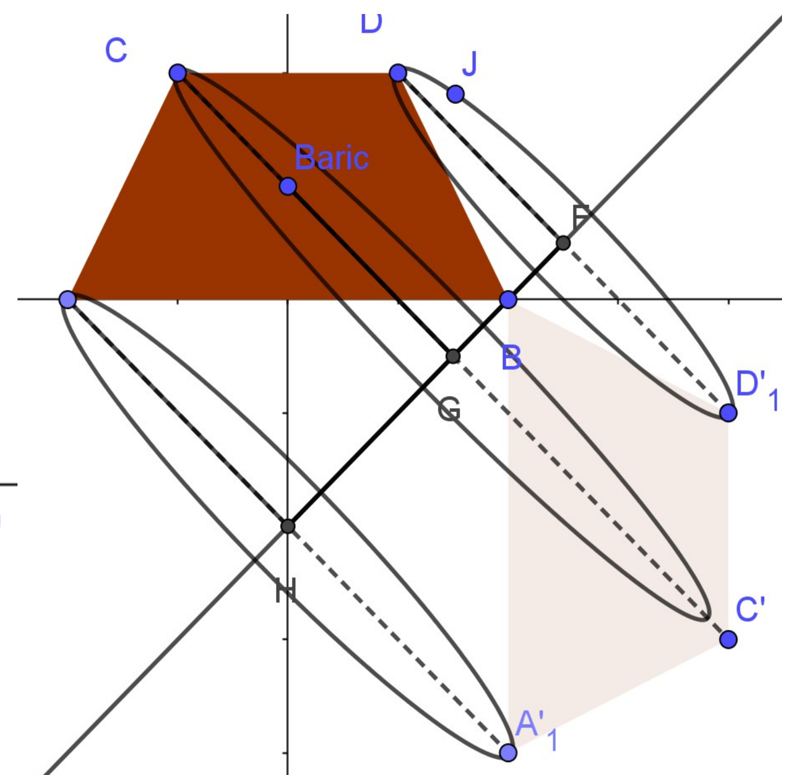
dove ***A* è l'area totale del trapezoide** e **y_G è l'ordinata del baricentro** del trapezoide

La formula permette di calcolare le coordinate del baricentro di una figura piana, conoscendo la sua area e il volume del solido generato dalla rotazione attorno ad un asse

Applicazioni Guldino

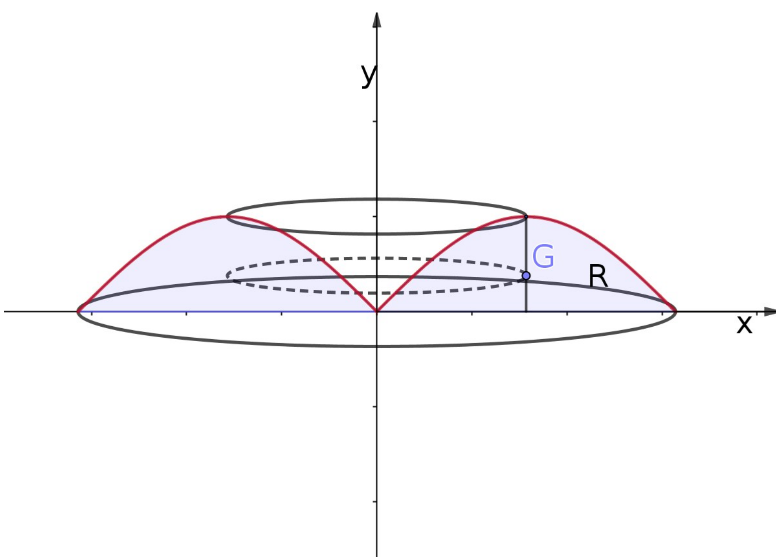
Guldino è comodo per il calcolo dei volumi di solidi di rotazione se si conosce in qualche modo il baricentro (in particolare se la figura ha simmetrie) e per le rotazioni attorno a rette che non siano gli assi cartesiani.





PNI Ord. 2011 Q3

Sia ***R*** la regione delimitata, per xε [0,pi] dalla curva ***y = sen x*** e dall'asse ***x*** e sia ***W*** il solido ottenuto dalla rotazione di ***R*** attorno all'asse y. Si calcoli il volume di ***W***.



Il volume del solido di rotazione che si ottiene ruotando la regione R attorno sull'asse y si può determinare usando il teorema di Guldino.

Il volume è dato dal prodotto dell'area della regione R, che è 2, per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro G della regione R.

Non occorre determinare l'ordinata del baricentro di R perchè basta conoscere la sua ascissa, che per ragioni di simmetria è $x_G = \frac{\pi}{2}$

La circonferenza descritta dal baricentro G di R ha quindi lunghezza

$$C = 2\pi \frac{\pi}{2} = \pi^2$$

Il volume del solido di rotazione W che si ottiene ruotando R attorno all'asse Y è dato da:

$$Volume(W) = 2\pi x_G . Area(R) = \pi^2 .2 = 2\pi^2 = 19.74$$