

# Aufgaben zu Corona und Mathematik

Hans-Jürgen Elschenbroich

## Aufgabe 1 Wachstumsfaktor und Reproduktionszahl

- a) Bei der Ausbreitung in NRW sieht man, dass es vom 15.3. mit 2176 bis zum 18.3. mit 4366 in etwa eine Verdopplung gegeben hat. Die Verdopplungszeit beträgt also ziemlich genau 3 Tage. Berechnen Sie mit dem TR, wie groß der durchschnittliche tägliche Wachstumsfaktor ist.  
<https://www.geogebra.org/m/cfammtpe#material/aggzeusu>
- b) Vom 27.3. bis zum 2.4. steigt innerhalb von 5 Tagen die Anzahl von 12017 auf 17614. Berechnen Sie mit dem Verdopplungsrechner die Verdopplungszeit D und berechnen Sie dann mit dem TR, wie groß in dieser Zeit der durchschnittliche tägliche Wachstumsfaktor ist.  
<https://www.geogebra.org/m/cfammtpe#material/xruqzfrj>
- c) Welchen Wachstumsfaktor hat man bei einer Reproduktionszahl  $R = 1.3$  in einem Zeitraum von 12 Tagen, also 3 Generationszeiten?
- d) Die Reproduktionszahl R wird oft fälschlich mit dem täglichen Wachstumsfaktor verwechselt. Welchen täglichen Wachstumsfaktor hat man bei  $R = 1.3$ ?  
*Hinweis: Generationszeit = 4 Tage.*

## Aufgabe 2 Exponentielles und logistisches Wachstum

- a) Experimentieren mit den Parametern  $f_0$  und  $k$  der logistischen Wachstumskurve mit  $f(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{f_0} - 1)e^{-x}}$ .  
<https://www.geogebra.org/m/cfammtpe#material/tzxkeq5>
- b) Überprüfen Sie durch Variation von  $a$ , inwieweit das reale Wachstum der Corona Infektionen in NRW Anfang März 2020 ein exponentielles Wachstum mit  $f(x) = b \cdot e^{ax}$  ist.  
<https://www.geogebra.org/m/cfammtpe#material/aggzeusu>

## Aufgabe 3 Verdopplung

- a) Berechne näherungsweise mit dem TR oder der Tabellenkalkulation: Nach wieviel Tagen würde bei einer täglichen Zunahme von  $p = 5\%$ ,  $10\%$ ,  $20\%$ ,  $30\%$  eine Verdopplung erreicht?
- b) Meist hat man die Angaben, dass in  $d$  Tagen der Wert von  $a$  auf  $b$  gestiegen ist, und soll daraus die Verdopplungszeit  $D$  exakt berechnen. Leiten Sie für  $D$  die Formel her:  $D = \frac{d \cdot \ln(2)}{\ln(b) - \ln(a)}$ .
- c) Experimentieren Sie mit dem Verdopplungsrechner.  
<https://www.geogebra.org/m/cfammtpe#material/xruqzfrj>
- d) Wie stark wächst ein Bestand in einem Monat (= 30 Tage), wenn die Verdopplungszeit  $D$  bekannt ist?  
Verdopplung alle 30 Tage: Zunahme um den Faktor 2.  
Verdopplung alle 15 Tage: Zunahme um den Faktor ...?  
Verdopplung alle 10 Tage: Zunahme um den Faktor ...?  
Verdopplung alle 5 Tage: Zunahme um den Faktor ...?  
Verdopplung jeden Tag: Zunahme um den Faktor ...?

#### Aufgabe 4 Visualisierung von Corona-Wachstum

- a) Nehmen Sie zu der nebenstehenden Skizze von Minister Spahn Stellung, mit der er ‚Flatten the curve‘ erläuterte.
- b) Überprüfen Sie, ob die Grafiken des CDC in etwa einer logistischen Kurve entsprechen:

<https://www.geogebra.org/m/cfammtpe#material/k8r7ynb6>

<https://www.geogebra.org/m/cfammtpe#material/rbmypf7h>



#### Aufgabe 5 SIR Modell

Experimentieren Sie mit dem SIR Modell, indem Sie die Parameter  $\beta$  und  $\gamma$  verändern.

Start-A = 997, Start-B = 3, Start-C = 0. N = 1000.

<https://www.geogebra.org/m/cfammtpe#material/fkvmjt9a>

#### Aufgabe 6 Zuverlässigkeit und Fehlerarten bei Tests

- a) Experimentieren Sie mit dem Modellrechner 1 mit Viererfeld, indem Sie die Parameter für Spezifität, Sensitivität und Prävalenz ändern. Z. B.  $p =$   
[www.geogebra.org/m/yf9szkan#material/qeyee2cu](http://www.geogebra.org/m/yf9szkan#material/qeyee2cu)
- b) Ändern Sie insbesondere passend zum Antigen-Schnelltest die Parameter auf Prävalenz = 3%, Spezifität = 97% und Sensitivität = 70% (dann 80%, 90%).  
Interpretieren Sie die Ergebnisse für den Einsatz bei Großveranstaltungen.
- c) Experimentieren Sie mit dem Modellrechner 2 mit PPW-Kurve, indem Sie die Prävalenz  $p$  ändern.  
Beschreiben Sie die Auswirkungen auf die PPW-Kurve.  
[www.geogebra.org/m/yf9szkan#material/rurhzf5t](http://www.geogebra.org/m/yf9szkan#material/rurhzf5t)
- d) Experimentieren Sie mit dem Modellrechner 3 zum Querdenker-Flugblatt.  
Wo steckt der argumentative Trick?  
[www.geogebra.org/m/yf9szkan#material/t3taksvf](http://www.geogebra.org/m/yf9szkan#material/t3taksvf)

## Lösungen

- 1a)  $\sqrt[3]{2} = 1.26$                       b)  $D = 9.1$  Tage,  $\sqrt[9.1]{2} = 1.079$   
c)  $1.3^3 = 2.197$  (täglich 1.068)      d)  $\sqrt[4]{1.3} = 1.068$

2b) Bis zum 19.3.2020 (dem 23. Tag der Messung) exponentiell mit  $a = 0.24$  und  $b = 21.5$ .

3d) Faktor 4, 8,  $2^6$ ,  $2^{30}$ .

4a) Bei der abgeflachten Kurve dieser Skizze gäbe es erheblich mehr Infektionen!

6a) Erheblicher Einfluss der Prävalenz  $p$  auf PPW und NPW. Bedingte Wahrscheinlichkeit!

6b) PPW = 41,9 %, weniger als die Hälfte! NPW = 99,1%.

Die Infizierten werden ziemlich gut erkannt, es gibt aber erheblich falsch-positive Ergebnisse.  
mehr als die Hälfte der Positiven würde zu Unrecht ausgeschlossen.

6c) Die PPW Kurve steigt sehr schnell sehr steil an.

6d) Das Querdenker-Flugblatt setzt einfach 500 Infizierte bei 100000 Personen an. Das wäre eine extrem unrealistische Prävalenz von 0.05 %.