Problemas sobre dominio de funciones

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
2ºBach CCSS	Funciones, límites y derivadas	Colegio Marista “La Inmaculada” de Granada

PROBLEMA 1

Determina el dominio de:

a) $f(x) = x^3 - x + 1$ **b)** $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x^2-2x}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x^2-16}$

a) El dominio de un polinomio es toda la recta real.

b) El dominio de un cociente de polinomios es la recta real menos los valores que anulan al denominador. Por lo tanto: $\mathcal{R} - \{-2, 0, 1\}$.

c) El dominio de un cociente de polinomios es la recta real menos los valores que anulan al denominador. Por lo tanto: $\mathcal{R} - \{-4, 4\}$.

PROBLEMA 2

Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (−1,1). Calcula a, b y c.

Imponemos las condiciones de los tres puntos. Tendremos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$(1,1) \rightarrow 1 = a + b + c \rightarrow 1 = a + b$

$(0,0) \rightarrow 0 = c$

$(-1,1) \rightarrow 1 = a - b + c \rightarrow 1 = a - b$

Sumamos las dos ecuaciones finales $\rightarrow 2 = 2a \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 0$

La función resulta: $y = x^2$

PROBLEMA 3

Sea la función $y=\frac{a}{x-b}$. Calcula a y b sabiendo que la gráfica de la función pasa por el punto $(0,1)$ y que el dominio de la función son todos los reales menos el valor $x=7$.

Si el punto (0,1) pertenece a una función, significa que satisface la ecuación de la función.

Es decir, cuando $x=0$ se cumple que $y=1$. Por lo tanto:

$\frac{a}{0-b}=1 \rightarrow a=-b$

Por otro lado, el dominio nos indica el valor donde se anula el denominador.

Si $x=7$ no pertenece al dominio, significa que el denominador se anula en $x=7$. Es decir:

$7-b=0 \rightarrow b=7 \rightarrow a=-7$

Por lo que la ecuación de nuestra función es:

$$y=\frac{-7}{x-7}$$

PROBLEMA 4

Obtener el dominio de $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$

La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Y un cociente de polinomios no está definido en aquellos puntos que anulan el denominador. Por lo tanto:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \geq 0$$

Las raíces del numerador son:

$$x = 1 \text{ (punto cerrado)}$$

Las raíces del denominador son:

$$x = 2, x = 3 \text{ (puntos abiertos)}$$

Indicamos estas raíces en la recta real, y formamos intervalos.

Las raíces del numerador forman puntos cerrados, porque la inecuación contiene el signo igual.

Las raíces del denominador siempre son abiertas, porque no podemos dividir por cero.

- Intervalo $(-\infty, 1)$ → tomamos $x = 0$ → sustituimos en $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ → $\frac{-1}{(-2)(-3)}$ → cantidad negativa → el intervalo no es solución de la inecuación
- Intervalo $(1,2)$ → tomamos $x = 1,5$ → sustituimos en $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ → $\frac{0,5}{(-1,5)(-2,5)}$ → cantidad positiva → el intervalo sí es solución de la inecuación
- Intervalo $(2,3)$ → tomamos $x = 2,5$ → sustituimos en $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ → $\frac{1,5}{(0,5)(-0,5)}$ → cantidad negativa → el intervalo no es solución de la inecuación
- Intervalo $(3, \infty)$ → tomamos $x = 4$ → sustituimos en $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ → $\frac{3}{(2)(1)}$ → cantidad positiva → el intervalo sí es solución de la inecuación

El dominio de la función es la unión de los intervalos que sí son solución de la inecuación:

$$Dom(f) = [1,2) \cup (3, \infty)$$