Goniometrie: een dynamisch proces

www.karelappeltans.be

March 9, 2026

Contents

1 Inleiding **2**

2 Rechthoekige driehoek **2**
2.1 De goniometrische verhoudingen . . . 2
2.2 Oplossen van rechthoekige driehoeken . . . 2

3 Willekeurige driehoeken **4**
3.1 Sinus- en cosinusregel . . . 4
3.1.1 Sinusregel . . . 4
3.1.2 Cosinusregel . . . 6
3.2 Oplossen van willekeurige driehoeken . . . 7

4 De goniometrische getallen op de goniometrische cirkel **8**
4.1 De goniometrische cirkel . . . 8
4.2 Verwante hoeken . . . 10

5 Goniometrische formules **10**
5.1 Hoofdformule en afgeleide formules . . . 10
5.2 Goniometrische identiteiten . . . 11

6 Analytische meetkunde **12**
6.1 Hoek tussen 2 vectoren . . . 12
6.2 Inproduct . . . 12

7 LPD1 KOV **13**

8 extra materiaal **14**
8.1 (Herhalings)oefeningen . . . 14
8.2 taken . . . 15

9 Waarom zo te werk gaan? **16**
9.1 10 gouden instructieprincipes . . . 16
9.1.1 Principe 1 . . . 16
9.1.2 Principe 2 . . . 16
9.1.3 Principe 3 . . . 16
9.1.4 Principe 4 . . . 16
9.1.5 Principe 5 . . . 16
9.1.6 Principe 6 . . . 16
9.1.7 Principe 7 . . . 17
9.1.8 Principe 8 . . . 17
9.1.9 Principe 9 . . . 17
9.1.10 Principe 10 . . . 17
9.2 Wijze lessen . . . 17
9.2.1 Activeer relevante voorkennis . . . 17
9.2.2 Geef duidelijke, gestructureerde en uitdagende instructie . . . 17
9.2.3 Combineer woord en beeld . . . 17
9.2.4 Laat leerstof actief verwerken . . . 18

1 Inleiding

Ik hoop dat ik alle leerplandoelstellingen rond goniometrie in de volgende paragrafen aan bod ga laten komen.

2 Rechthoekige driehoek

2.1 De goniometrische verhoudingen

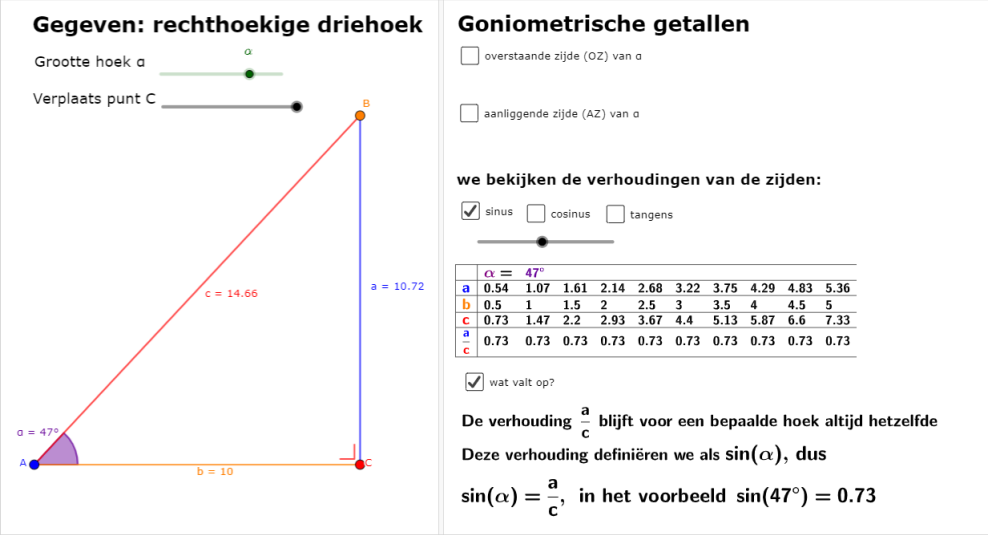


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/smgpvkjs

2.2 Oplossen van rechthoekige driehoeken

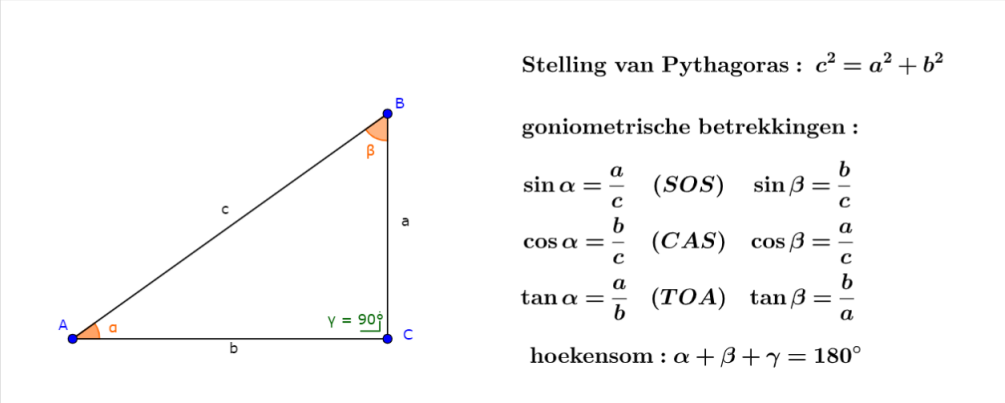


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/zRByu2ev

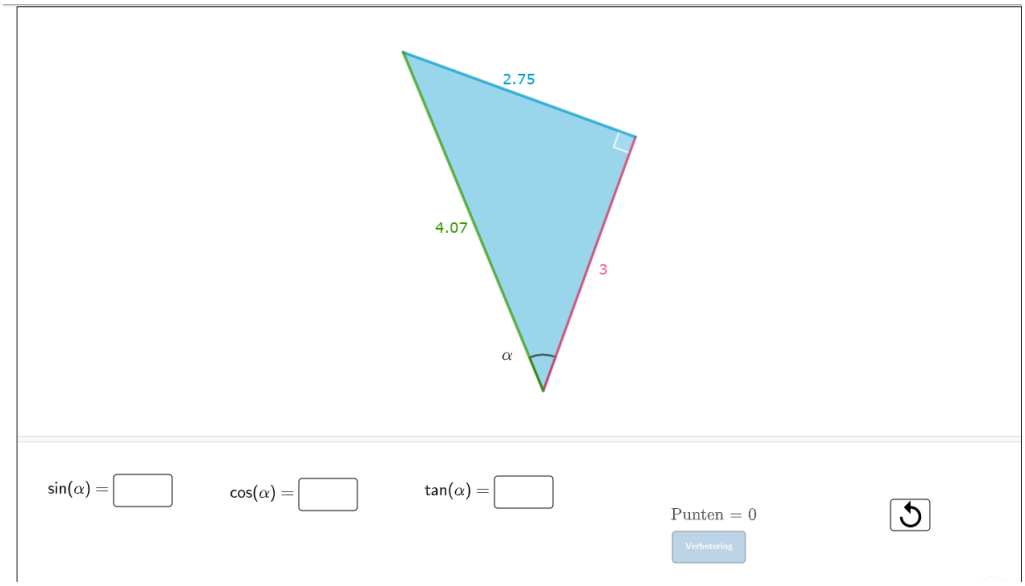


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/zRByu2ev

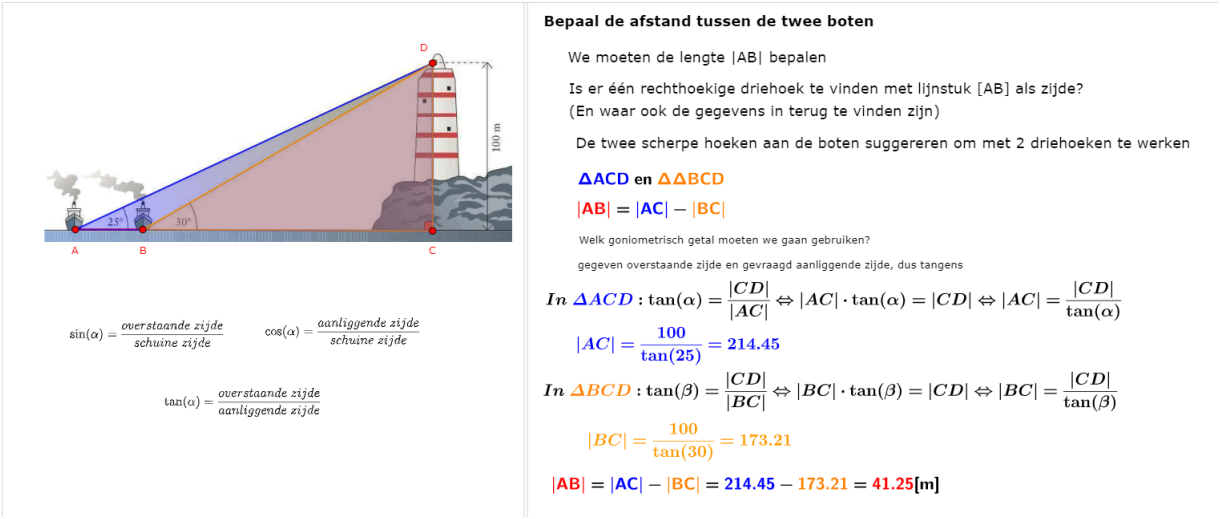


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/zRByu2ev

3 Willekeurige driehoeken

3.1 Sinus- en cosinusregel

3.1.1 Sinusregel

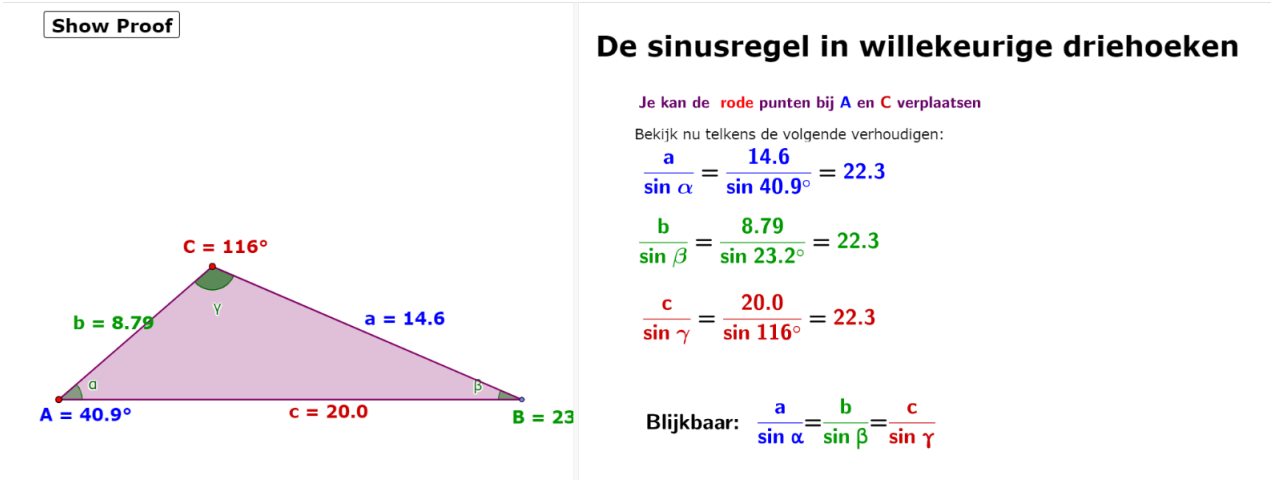


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/hxakcbry

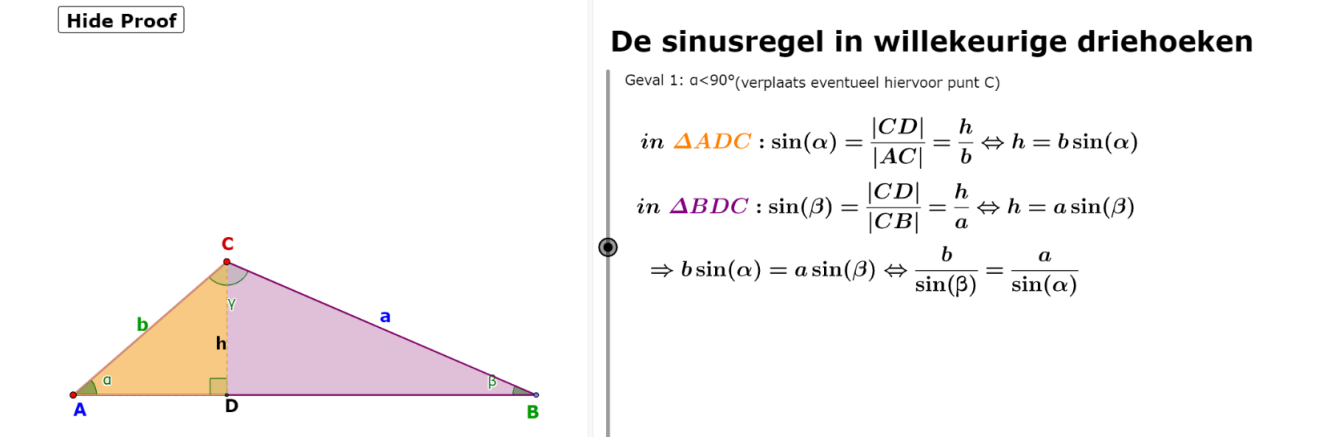


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/hxakcbry

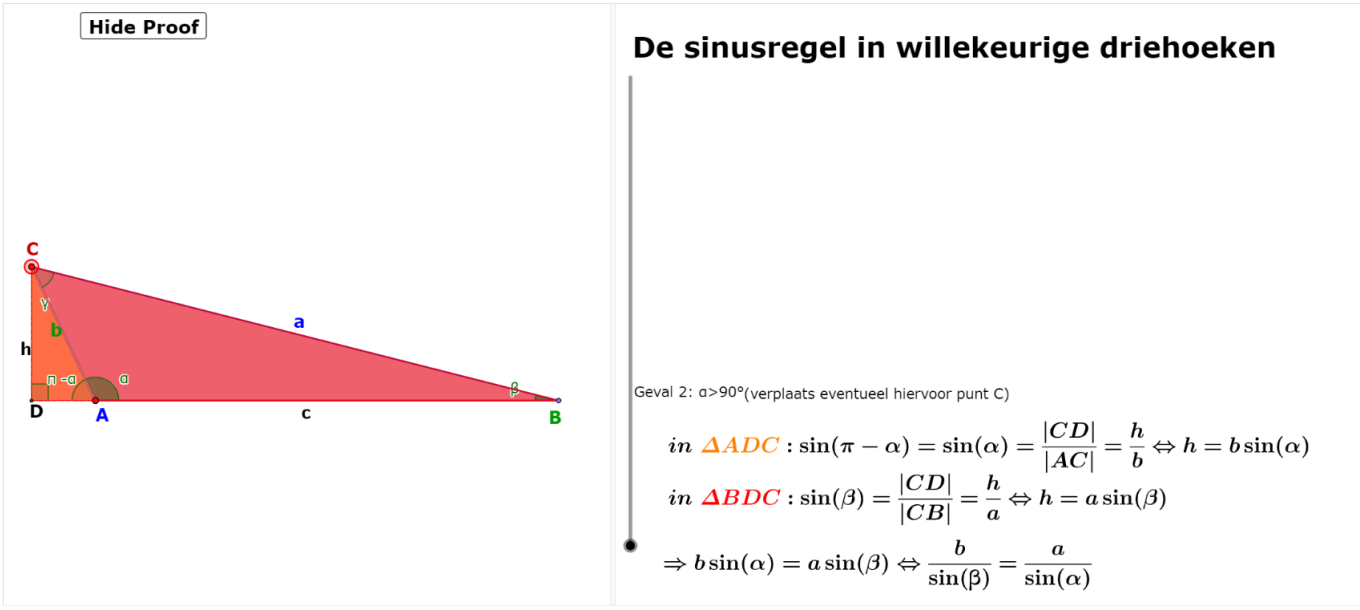


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/hxakcbry

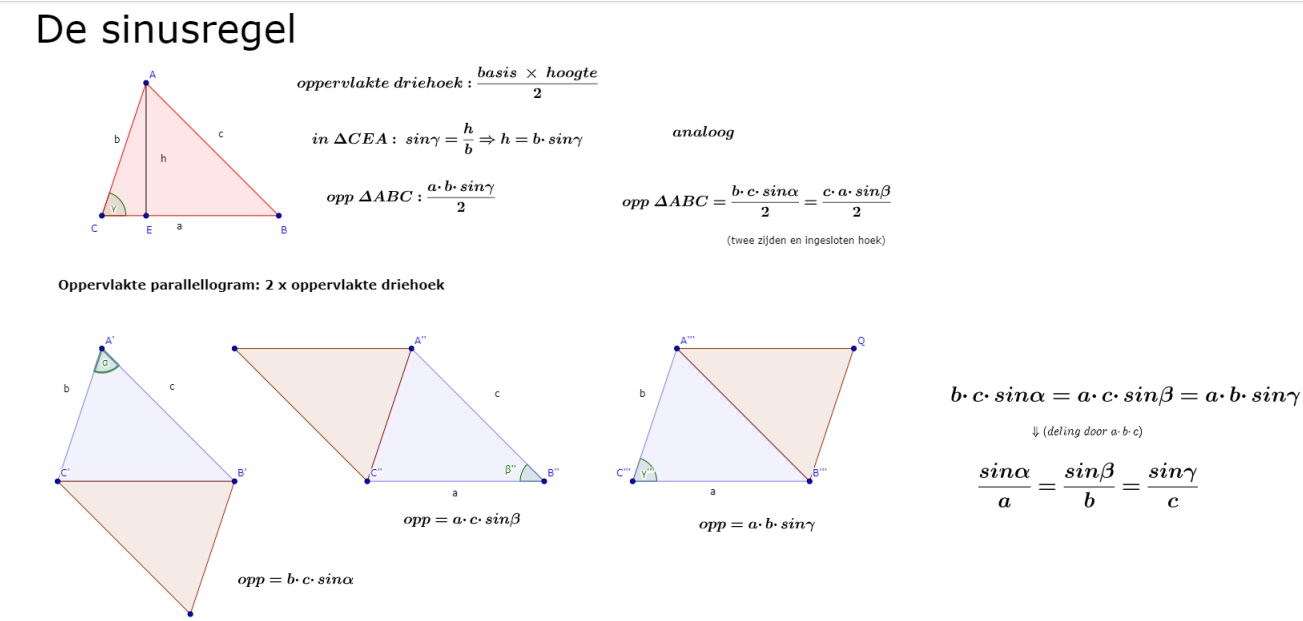


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/hxakcbry

3.1.2 Cosinusregel

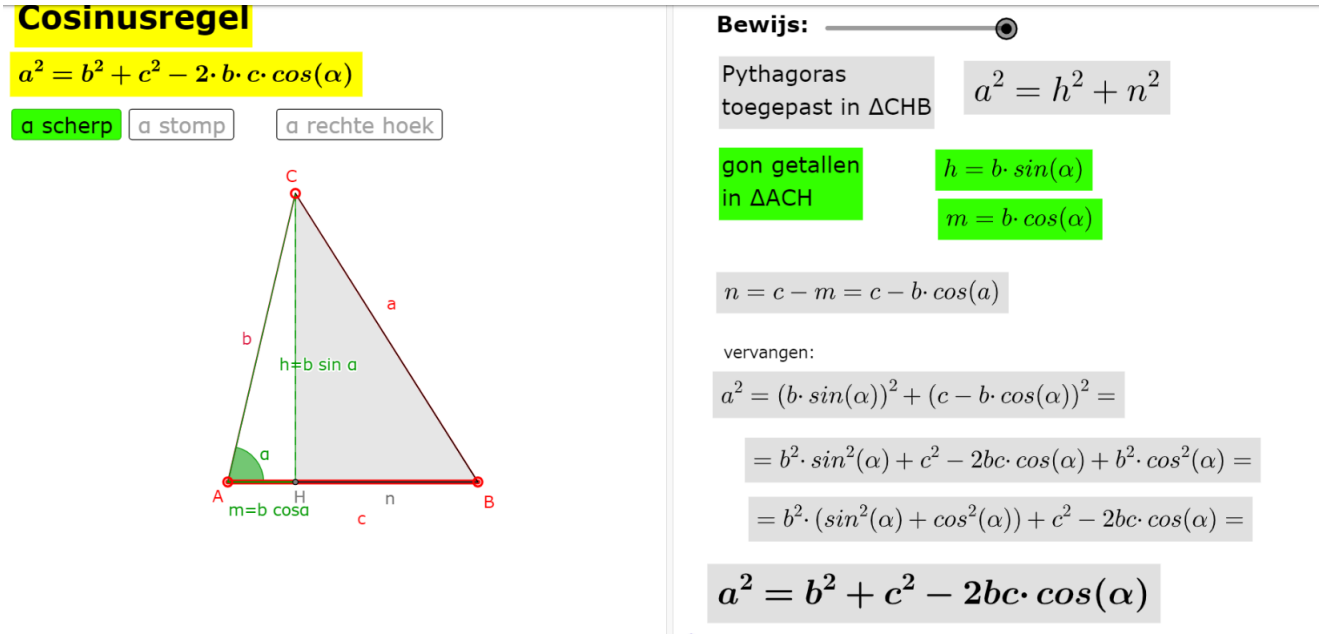


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/hxakcbry

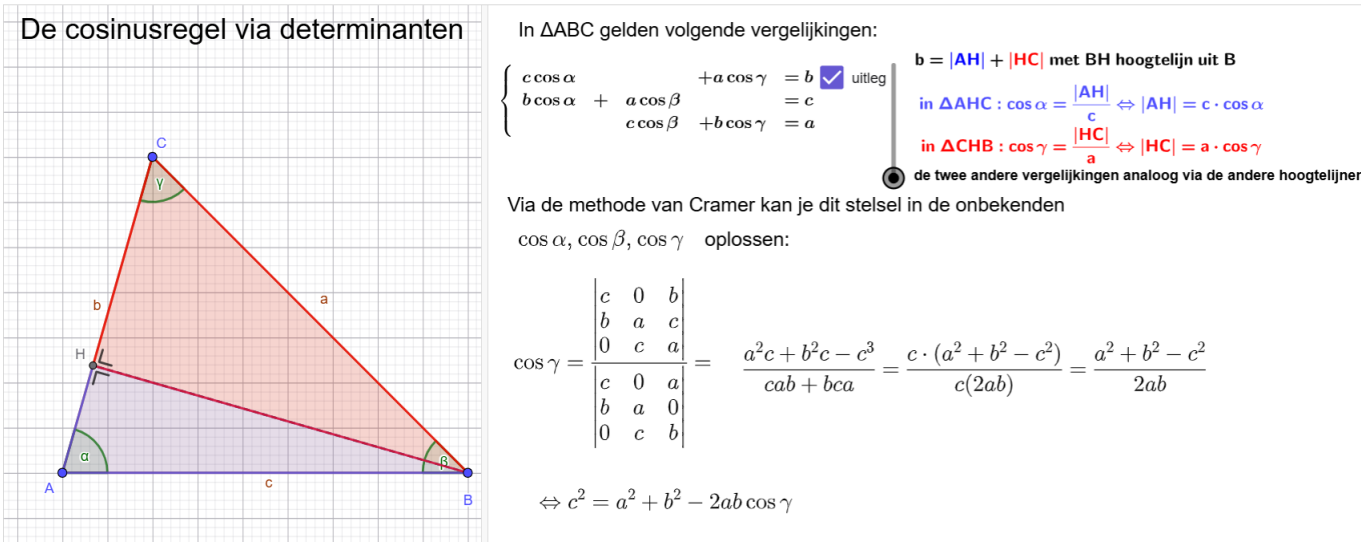
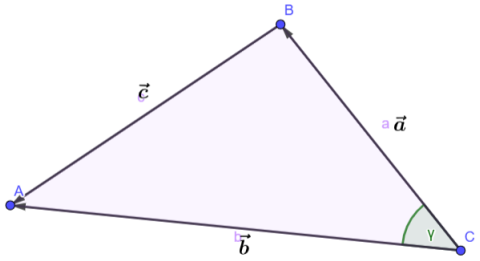


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/hxakcbry



Vectorieel bewijs cosinusregel

TB : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$TB : ||\vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 - 2||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||cos\gamma$

Bewijs:

$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$

$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

$\Leftrightarrow ||\vec{c}||^2 = ||\vec{b}||^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + ||\vec{a}||^2$

$\Leftrightarrow ||\vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 - 2||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cos\gamma$

Figure 11: https://www.geogebra.org/m/hxakcbry

3.2 Oplossen van willekeurige driehoeken

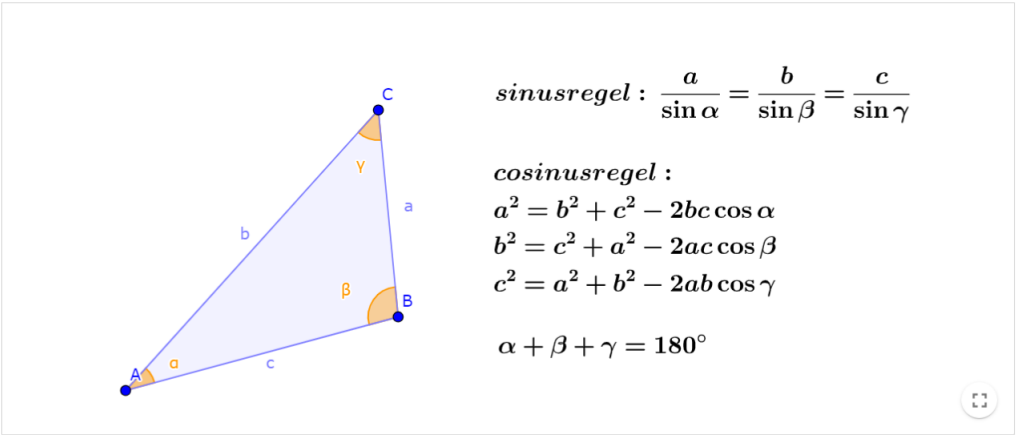


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/GcAQVhjZ

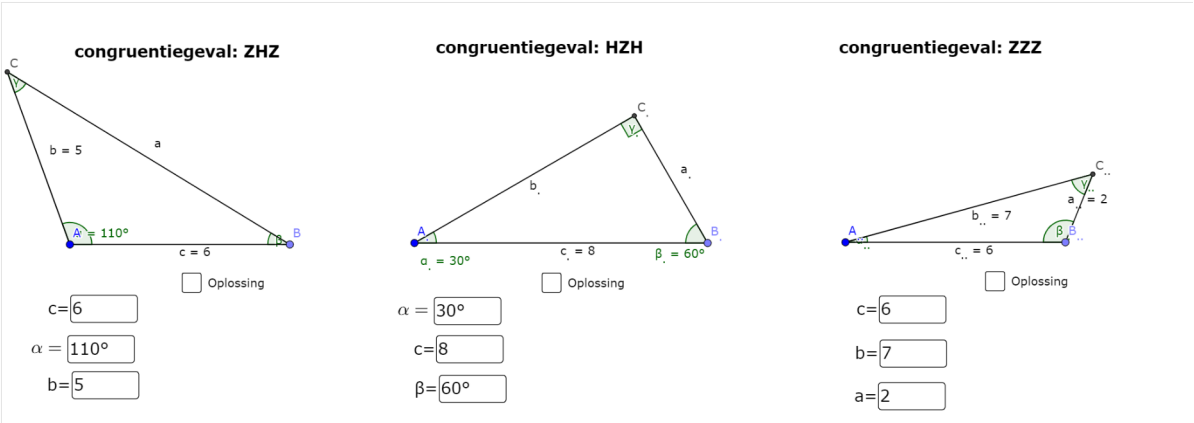


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/GcAQVhjZ

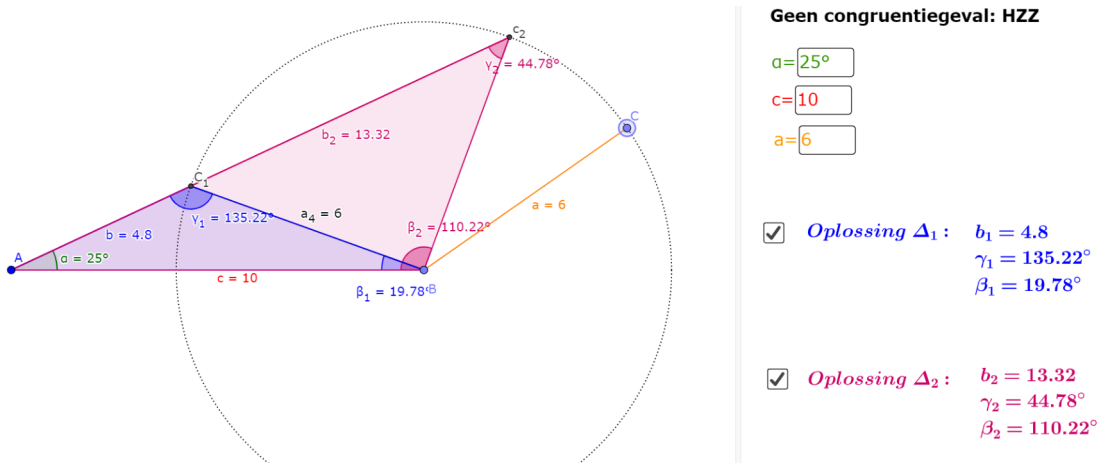


Figure 14: https://www.geogebra.org/m/GcAQVhjZ

4 De goniometrische getallen op de goniometrische cirkel

4.1 De goniometrische cirkel

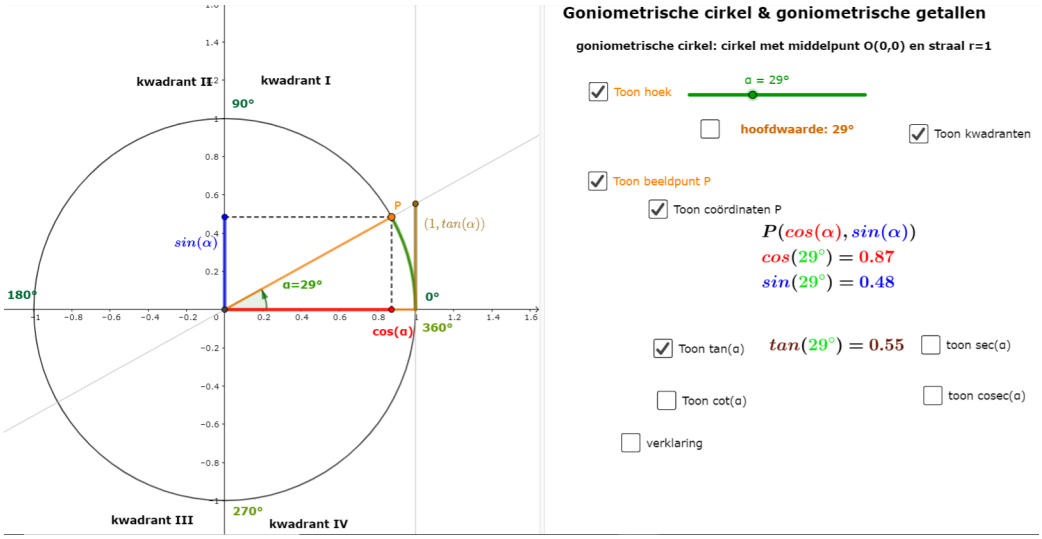


Figure 15: https://www.geogebra.org/m/FrxeHcwA

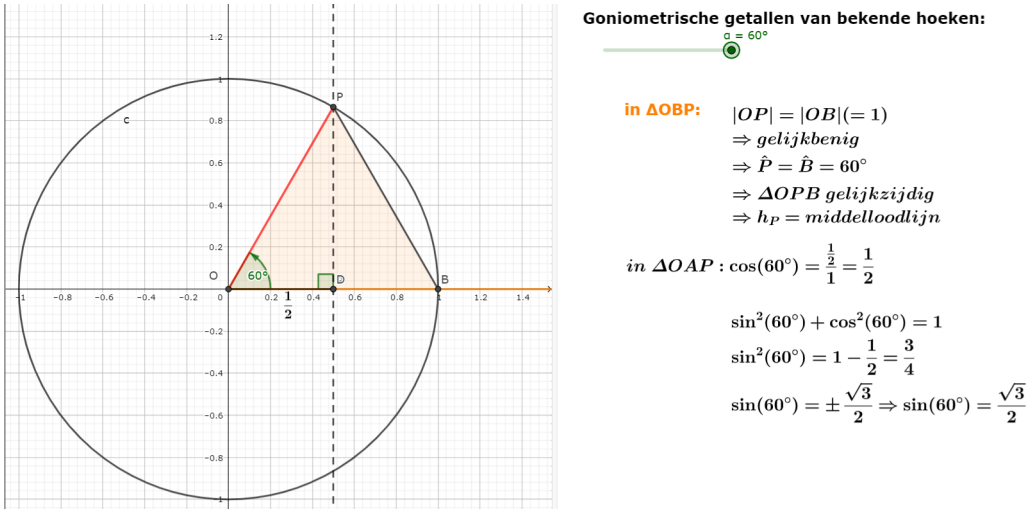


Figure 16: https://www.geogebra.org/m/FrxeHcwA

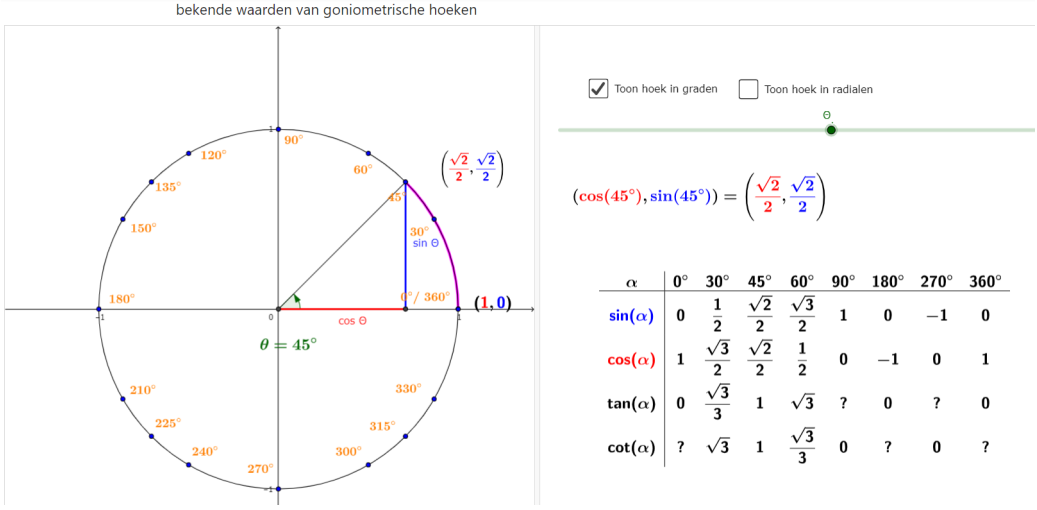


Figure 17: https://www.geogebra.org/m/FrxeHcwA

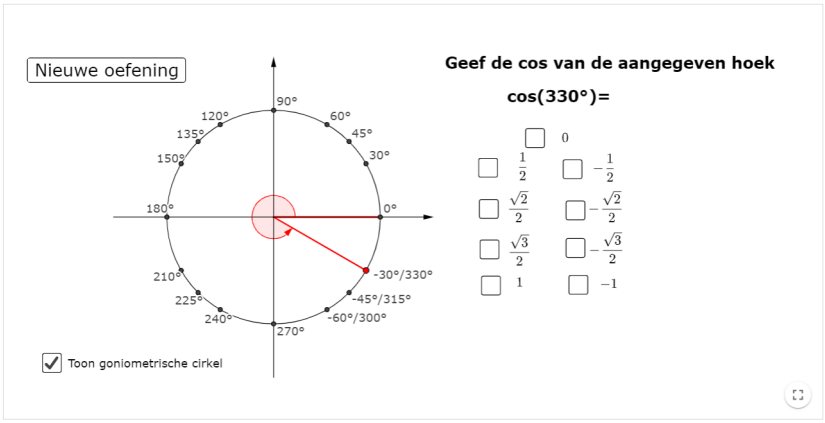


Figure 18: https://www.geogebra.org/m/FrxeHcwA

4.2 Verwante hoeken

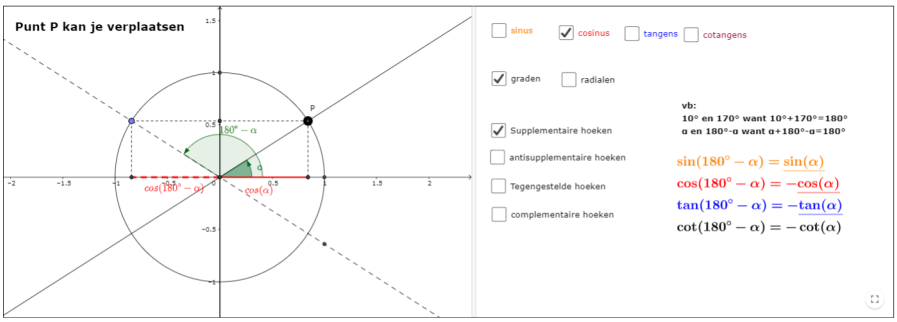


Figure 19: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

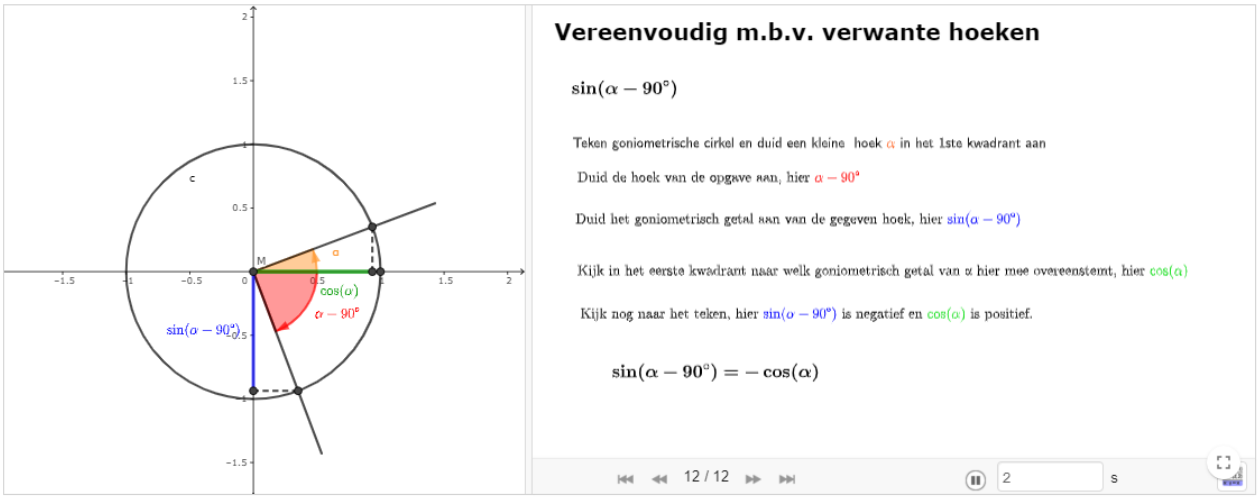


Figure 20: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

5 Goniometrische formules

5.1 Hoofdformule en afgeleide formules

Basisformules

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Figure 21: https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH

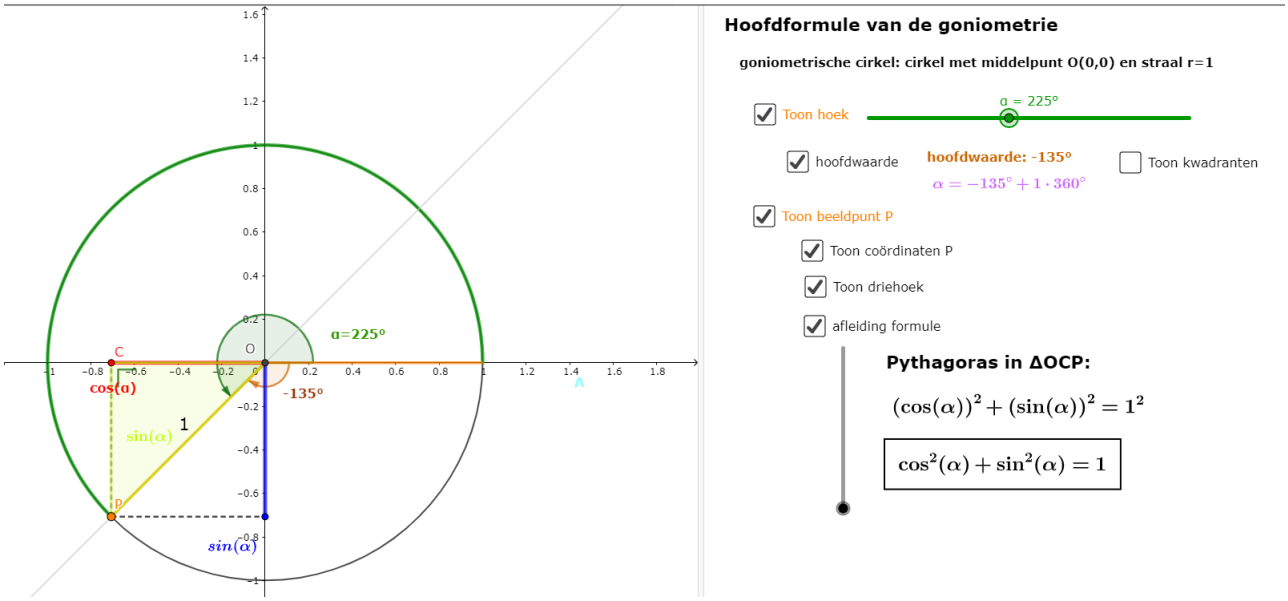


Figure 22: https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH

5.2 Goniometrische identiteiten

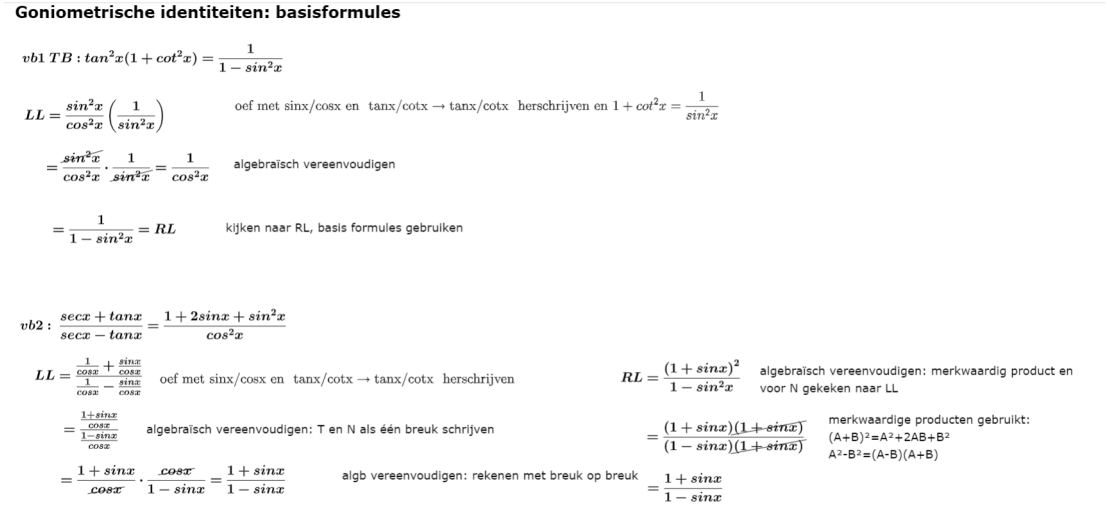


Figure 23: https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH

6 Analytische meetkunde

6.1 Hoek tussen 2 vectoren

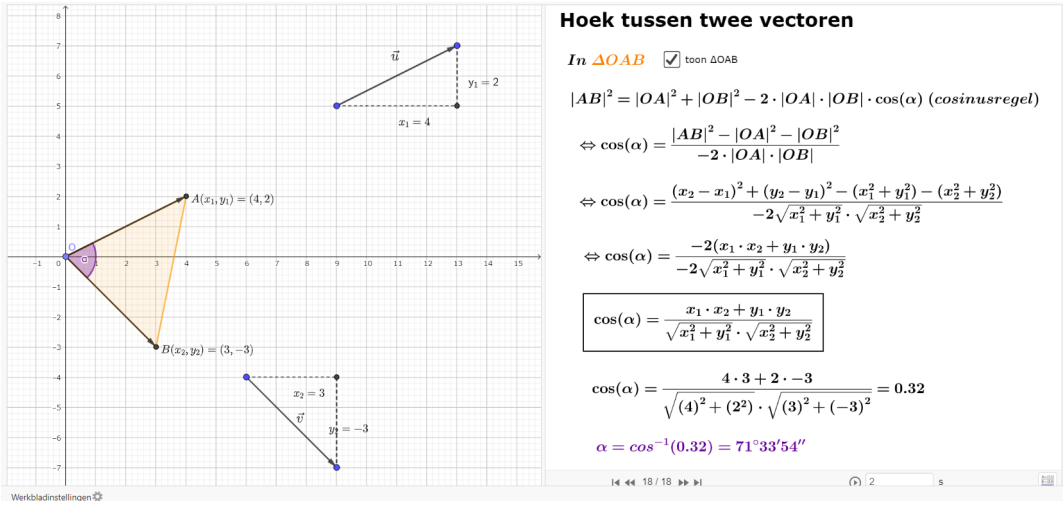


Figure 24: https://www.geogebra.org/m/cRmm4Ez4

6.2 Inproduct

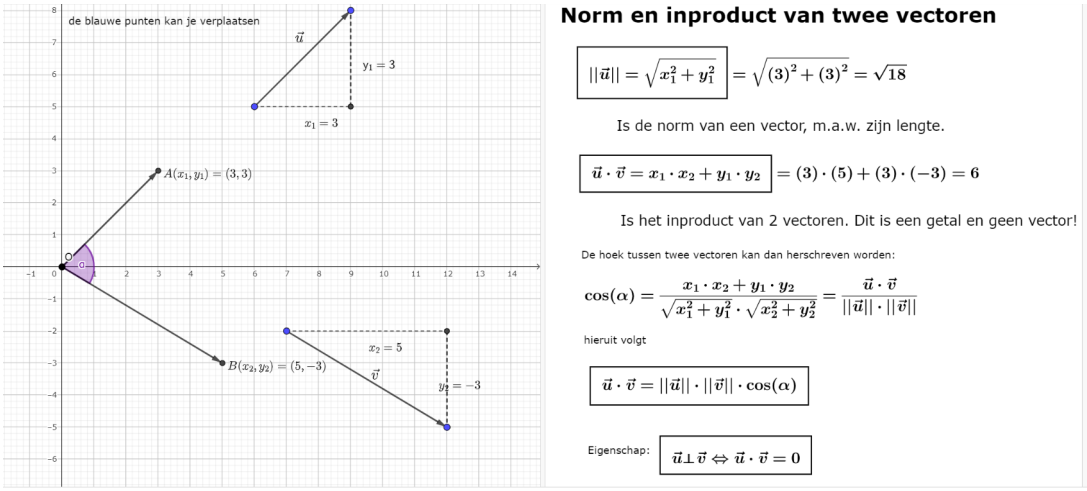


Figure 25: https://www.geogebra.org/m/cRmm4Ez4

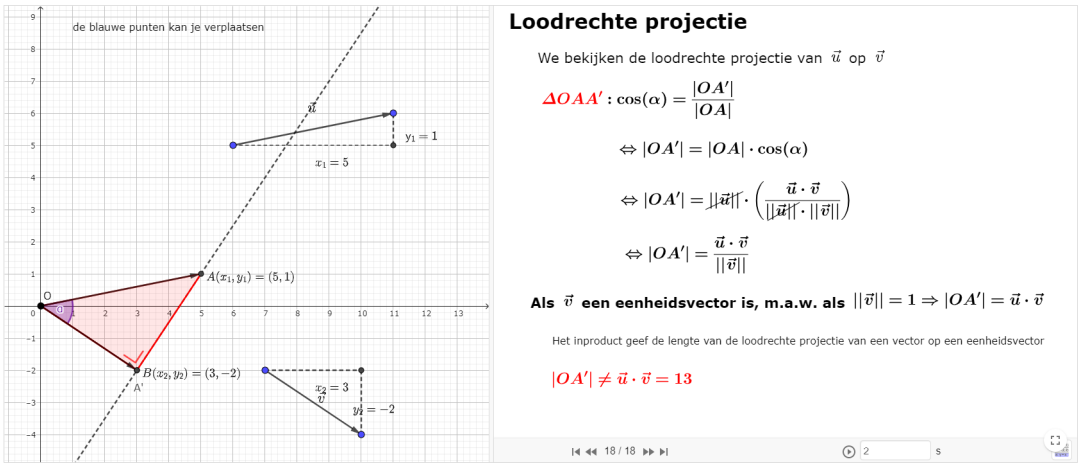


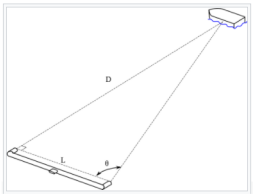
Figure 26: https://www.geogebra.org/m/cRmm4Ez4

7 LPD1 KOV

De leerlingen onderzoeken interacties tussen wiskunde en andere domeinen via wiskundige toepassingen



Optische afstandsmeter gebruikt door de Duitsers tijdens de Tweede Wereldoorlog



De Atlantikwall is een rij bunkers die tijdens WOII gebouwd werd door de Duitsers aan o.a. de Belgische kust om een landing van de geallieerden te voorkomen.

Met behulp van een optische afstandsmeter kon de afstand D tot een schip bepaald worden.

Als je weet dat L=4 m en de gemeten hoek Θ=89.8°, bepaal dan de afstand D.

$$\tan(\theta) = \frac{D}{L} \Leftrightarrow D = L \cdot \tan(\theta)$$

$$D = 4 \cdot \tan(89°48') = 1145,91m$$

Figure 27: https://www.geogebra.org/m/zRByu2ev

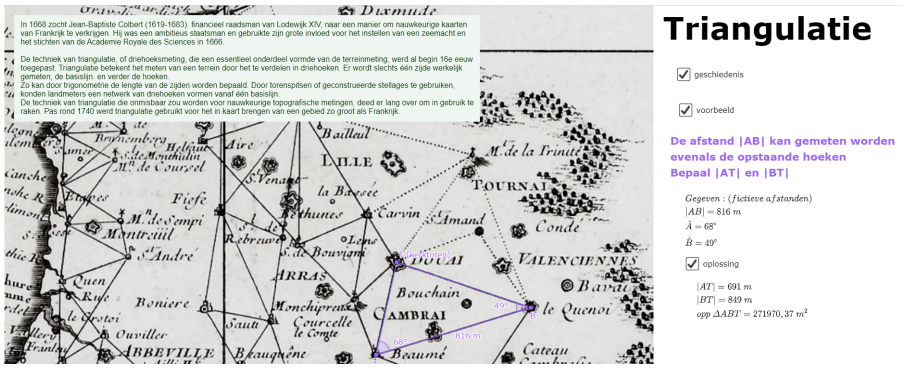
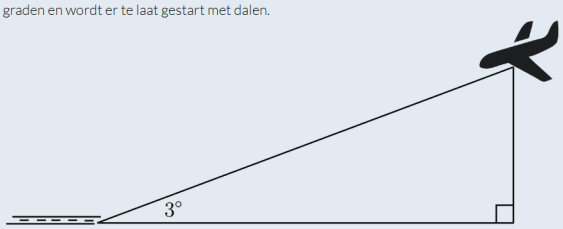


Figure 28: https://www.geogebra.org/m/GcAQVhjZ

The rule of 3

In de luchtvaart is 'the rule of 3' leidend bij een daling. Deze vuistregel geeft aan dat een vliegtuig het beste kan dalen onder een hoek van 3 graden. Hierdoor start de daling niet te vroeg en niet te laat, zodat alles zo efficiënt mogelijk verloopt. Om ervoor te zorgen dat het vliegtuig daalt onder deze hoek van 3 graden, moet de piloot dus op het juiste moment de daling inzetten. Dit wordt ook wel de 'top of descent' genoemd en is een belangrijk punt. Als de piloot te vroeg is, dan wordt de hellingshoek kleiner dan 3 graden en vlieg je te lang laag. Mist de piloot de 'top of descent', dan wordt de hellingshoek groter dan 3 graden en wordt er te laat gestart met dalen.



De figuur is niet op schaal. Een hoek van 3 graden is veel minder steil, de afstanden zijn daardoor veel groter.

Figure 29: https://www.mathness.nl/toepassingen-wiskunde/daling-vliegtuig-tangens

8 extra materiaal

8.1 (Herhalings)oefeningen

(Herhalings)oefeningen goniometrie tweede graad

Auteur: Karel Appeltans UHasselt /Virga Jessecollege Hasselt

Als $\cos(x) = \frac{3}{5}$ en $\sin^2(y) = \frac{25}{169}$ met x en y gelegen in het vierde kwadrant, dan is de som $\sin(x) + \cos(y)$

Vink alles aan wat van toepassing is

A ☐ $\frac{8}{65}$

B ☐ $-\frac{112}{65}$

C ☐ $\frac{112}{65}$

D ☐ $-\frac{8}{65}$

E ☐ $\frac{64}{65}$

Figure 30: https://www.geogebra.org/m/mawpdjkr

8.2 taken

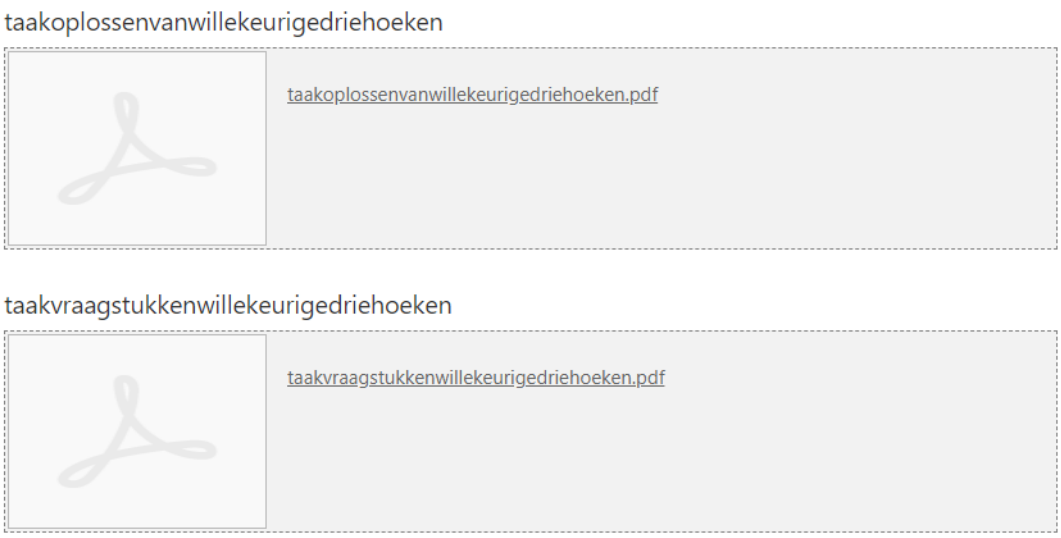


Figure 31: https://www.geogebra.org/m/GcAQVhjZ

9 Waarom zo te werk gaan?

9.1 10 gouden instructieprincipes

https://didactiefonline.nl/artikel/tien-instructieprincipes

9.1.1 Principe 1

Herhaal dagelijks een deel van wat eerder is geleerd. Herhaling versterkt wat al geleerd is. Het brengt verbindingen tot stand tussen wat we al wisten en nieuwe kennis. Dagelijks herhalen is vooral belangrijk voor informatie die vaak gebruikt moet worden. Herhalen helpt bij het automatiseren: het moeiteloos terughalen uit ons geheugen van woorden, concepten, procedures enzovoorts die we nodig hebben om problemen op te lossen, taken uit te voeren en nieuwe leerstof te begrijpen door ze te automatiseren. Het ontwikkelen van expertise kost duizenden uren oefening (denk aan de concertpianist) en dagelijks herhalen is een begin daarvan.

9.1.2 Principe 2

Presenteer nieuw leermateriaal in kleine stappen en help leerlingen hiermee te oefenen. Ons werkgeheugen is zeer klein: het kan maximaal zo'n vijf nieuwe brokken informatie vasthouden. Die brokken worden verwerkt en in ons langetermijngeheugen opgeslagen als schema's: het is geleerd. Zo is voor iemand die muziek leert spelen elke afzonderlijke noot nieuw. Na oefening en automatisering wordt een reeks noten een loopje en als je de afzonderlijke loopjes vaak genoeg geoefend hebt, wordt dit weer een schema. Komt er te veel nieuwe informatie binnen, dan zal het werkgeheugen dat domweg niet meer verwerken. Bied dus steeds kleine hoeveelheden informatie aan, help leerlingen daarna met het oefenen daarvan en ga pas naar de volgende stap als de vorige wordt beheerst.

9.1.3 Principe 3

Stel veel vragen. Vragen helpen leerlingen om te oefenen wat net gepresenteerd is en om verbindingen te leggen met wat al geleerd was. Vooral hoe- en waarom-vragen, zogeheten epistemische vragen, prikkelen dit. De meest succesvolle leraren blijken meer dan de helft van de les aan doceren, demonstreren en vragen stellen te besteden. Door te vragen kan de leraar ook bepalen hoe goed er geleerd is en of er nog meer instructie nodig is. De meest succesvolle leraren vragen leerlingen ook om uit te leggen hoe ze tot het antwoord zijn gekomen.

9.1.4 Principe 4

Sta model. Leerlingen hebben 'cognitieve' steun nodig om te leren taken uit te voeren en problemen op te lossen. Door als model te fungeren en hardop te vertellen over je denk- en werkstappen kun je laten zien hoe je een probleem oplost of een taak uitvoert.

9.1.5 Principe 5

Bied scaffolds voor moeilijke taken. Naast zelf uitleggen (het vorige principe) kun je leerlingen bij moeilijke taken ook uitgewerkte voorbeelden geven waarin alle deelstappen die ze moeten volgen om tot een oplossing te komen, zijn ingevuld. Zo bied je hen een scaffold (steiger) ofwel een tijdelijke cognitieve ondersteuning. Door steeds meer stappen weg te laten breek je die steiger af en begeleid je leerlingen geleidelijk naar zelfstandige uitvoering.

9.1.6 Principe 6

Begeleid leerlingen in het oefenen met nieuw leermateriaal Het eenmalig aanbieden van nieuwe lesstof is niet voldoende. Naast herhaling (het eerste instructieprincipe) is voldoende en gevarieerde oefening en overhoring nodig. Leerlingen moeten tijd besteden aan het herformuleren, uitbreiden en samenvatten van nieuwe stof om het goed op te slaan in hun langetermijngeheugen. Het is makkelijk om iets in een la op te bergen, maar het kan heel moeilijk zijn je te herinneren waar precies je het ook alweer gelaten hebt. Oefening helpt ons dat te herinneren.

9.1.7 Principe 7

Check of leerlingen het echt begrepen hebben Effectieve leraren gaan heel vaak na of leerlingen de nieuwe leerstof ook daadwerkelijk aan het leren zijn. Ze checken niet alleen het product, maar ook het proces van leren. Ze bevorderen hiermee niet alleen de verwerking van de stof, ze kunnen ook nagaan of leerlingen wel het goede leren en of ze de lesstof wel goed begrepen hebben.

9.1.8 Principe 8

Zorg dat leerlingen succes tonen. Effectieve leerkrachten gaan veel en vaak na of hun leerlingen succesvol zijn. Oefening baart weliswaar kunst, maar alleen als leerlingen geen fouten oefenen. Als het oefenen niet tot succes leidt, is de kans groot dat de leerling het verkeerde aan het oefenen is. En ingeslepen fouten zijn - evenals misvattingen - heel moeilijk uit te wissen.

9.1.9 Principe 9

Eis en monitor zelfstandige oefening. Je kunt je leerlingen niet blijvend aan de hand nemen, uiteindelijk moeten ze het zelf kunnen. Laat ze zelfstandig oefenen en ga na of ze het echt kunnen of dat er nog meer (al dan niet begeleide) oefening nodig is. Door zelfstandige oefening wordt kennis geautomatiseerd.

9.1.10 Principe 10

Activeer geleerde kennis regelmatig. Leerlingen hebben geen eentonige, maar een breed scala aan oefening nodig, verspreid over de tijd om sterke en rijke schema's te ontwikkelen. Hierdoor kunnen ze makkelijker nieuwe dingen leren en eerder geleerde dingen uit het geheugen terughalen. Door vaak op iets dat al geleerd is terug te komen - maar wel met de nodige tijd ertussen om nieuwe kennis in nieuwe situaties op te doen - worden de verbindingen in de schema's verstevigd en worden de schema's uitgebreider en rijker.

9.2 Wijze lessen

https://excel.thomasmore.be/wijze-lessen/.

9.2.1 Activeer relevante voorkennis

"Wat je al weet, bepaalt wat en hoe snel je leert. Nieuwe informatie wordt beter onthouden wanneer ze kleeft aan voorkennis * Herhaal op een actieve wijze de voorkennis die de leerling nodig heeft om de nieuwe leerstof te begrijpen. * Bied een kapstok aan nieuwe stof te verbinden aan de eerder geleerde stof en richting te geven aan het verdere verloop van je les."

9.2.2 Geef duidelijke, gestructureerde en uitdagende instructie

"Besteed voldoende tijd aan duidelijke gestructureerde en uitdagende instructie. Als leerlingen niet begrijpen wat er geleerd moet worden, wordt leren lastig. Afgebakende lesfasen en doelen brengen structuur. Uitdagende doelen en een snel lestempo in een warm leerklimaat motiveren je leerlingen."

9.2.3 Combineer woord en beeld

"Leerlingen slaan informatie die zowel via woorden als beelden wordt gepresenteerd, gemakkelijker op dan wanneer alleen maar woorden worden gebruikt. Dit principe is gebaseerd op het feit dat verbale en visuele informatie volgens twee afzonderlijke (maar gelijktijdig werkende) processen in het werkgeheugen verwerkt worden en vervolgens in het langetermijngeheugen geïntegreerd. Dat maakt het leren minder belastend en effectiever."

9.2.4 Laat leerstof actief verwerken

"Productieve strategieën verplichten de leerling om leerstof te herkneden tot een nieuw product. Een leerling onthoudt meer door productieve strategieën te gebruiken dan wanneer die leerstof op een meer passieve wijze 'consumeert' *Laat leerlingen schema's of mondelinge samenvattingen maken in je les. *Laat leerlingen leerstof verklaren aan zichzelf of anderen. *Leer hun de strategieën zelf ook aan."