PAU JUNY 2021. PROBLEMA 2

Es donen els plans: $\begin{cases} \pi_1 : x + y + z = a - 1 \\ \pi_2 : 2x + y + az = a \\ \pi_3 : x + ay + z = 1 \end{cases}$

Determineu la posició relativa dels tres plans en funció del paràmetre a.

Per $a = 1$, calculeu, si existeix, la recta de tall entre els plans π_1 i π_3

Per $a = 2$, calculeu, si existeix, la recta de tall entre els plans π_1 i π_2

APARTAT A

Siguen les següents matrius el sistema matricial associat als plans donats

$$\begin{cases} \pi_1 : x + y + z = a - 1 \\ \pi_2 : 2x + y + az = a \\ \pi_3 : x + ay + z = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que sabem que:

$RangA = RangMA = 3 \rightarrow$ El sistema és compatible determinat i té una única solució, els plans es tallen en un punt.

$RangA = RangMA = 2 \rightarrow$ El sistema és compatible indeterminat i té infinites solucions, els plans es tallen en una recta

$RangA \neq RangMA \rightarrow$ El sistema és incompatible i no té solució, els plans no es tallen. Aquí poden passar vàries possibilitats, per exemple que siguin paral.lels, que es tallin dos a dos...

Haurem de estudiar el rang de A i MA, que per les dimensions de les matrius pot ser com a màxim 3 en el dos casos.

TROBAR ELS VALORS CLAU

Per a que el rang de A siga 3 el deu determinant ha de ser distint de zero. Anem a estudiar els valors de a per els quals $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (1 - a^2) - 1 \cdot (2 - a) + 1 \cdot (2a - 1) =$$

$$= 1 - a^2 - 2 + a + 2a - 1 =$$

$$= -a^2 + 3a - 2$$

$$|A| = 0 \longrightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \begin{cases} a_1 = \frac{-3+1}{-2} = 1 \\ a_2 = \frac{-3-1}{-2} = 2 \end{cases}$$

Ja podem concloure que quan
$a \neq 1$ i $a \neq 2 \longrightarrow |A| \neq 0 \longrightarrow Rang(A) = Rang(MA) = 3 \longrightarrow$ Sistema Compatible Determinat

Pel que havíem dit abans: si $a \neq 1$ i $a \neq 2$ els plans es tallen en un únic punt.

RESTA DE POSSIBILITATS

Però encara hem d'estudiar que passa quan $a \neq 1$ i quan $a \neq 2$

En els dos casos $|A| = 0$ (per tant el rang de A serà cóm a màxim 2)

Quan $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En el cas de A com que hi ha un menor d'ordre 2 distint de zero, i ja sabem que el seu determinant es zero $\longrightarrow$ Rang$(A) = 2$

En el cas de MA orlem a partir del menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ de totes les maneres possibles i trobem dos possibilitats:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

PRIMERA MANERA DE ORLAR

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

És evident que aquest determinant es zero perquè dues columnes són iguals i per tant linealment dependents.

SEGONA MANERA DE ORLAR

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot (1 - 2) = -1$$

Conclusió:

Si $a = 1 \longrightarrow |A| = 0$ i hem trobat orlant desde un menor d'ordre 2 distint de zero, un menor d'ordre tres distint de zero $(= -1)$

$\longrightarrow Rang(A) = 2 \neq Rang(MA) = 3 \longrightarrow$ Sistema Incompatible

Pel que havíem dit abans: si $a = 1$ els plans no es tallen

Encara hem d'estudiar que passa quan $a = 2$

Com en el cas anterior $|A| = 0$ (per tant el rang de A serà cóm a màxim 2)

Quan $a = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En el cas de A com que hi ha un menor d'ordre 2 distint de zero, i ja sabem que el seu determinant es zero $\longrightarrow$ Rang$(A) = 2$

En el cas de MA orlem a partir del menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ de totes les maneres possibles i trobem dos possibilitats que en realitat són la mateixa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ESTUDIEM EL DETERMINANT

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

És evident que aquest determinant es zero perquè dues columnes són iguals i per tant linealment dependents.

Conclusió:

Si $a = 2 \longrightarrow |A| = 0$ i no hem trobat orlant desde un menor d'ordre 2 distint de zero, un menor d'ordre tres distint de zero

$\longrightarrow Rang(A) = 2 = Rang(MA) = 2 \longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminat

Pel que havíem dit abans: si $a = 2$ els plans es tallen en una recta

CONCLUSIONS APARTAT A)

$a = 2 \longrightarrow |A| = 0 \longrightarrow Rang(A) = 2 = Rang(MA) = 2 \longrightarrow$ **S.C.I**

$a = 1 \longrightarrow |A| = 0 \longrightarrow Rang(A) = 2 \neq Rang(MA) = 3 \longrightarrow$ **S.I**

Si $a \neq 1$ **i** $a \neq 2 \longrightarrow |A| \neq 0 \longrightarrow Rang(A) = Rang(MA) = 3 \longrightarrow$ **S.C.D.**

Si $a \neq 1$ **i** $a \neq 2$ **els plans es tallen en un únic punt.**

Si $a = 1$ **els plans no es tallen**

Si $a = 2$ **Els plans es tallen en una recta**