II Prova, esame di Stato del 20/06/2019: Licei Scientifici

Prof. G. Forte*

a. a. 2018/2019

1 Problemi

Problema 1.1. *Si considerino le seguenti funzioni*

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - x + b \\ g(x) &= (ax+b)e^{-x^2+2x} \end{aligned}$$

(a) *Provare che comunque siano scelti i punti a e b in $\mathbb{R}$ ($a \neq 0$), il grafico di g ha un massimo ed un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici si intersecano nel punto $A(2;1)$.*

Soluzione

La funzione g è continua e definita in tutto $\mathbb{R}$, interseca l'asse x nell'unico punto $x_{\text{int}} = -b/a$ e l'asse y nel punto $x = 0$ dove abbiamo $g(0) = b$. Risulta inoltre

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0^{\pm}, & \text{se a>0} \\ \\ \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0^{\mp}, & \text{se a<0} \end{cases}$$

I limiti qui sopra seguono immediatamente dal fatto che la parte quadratica dell'esponenziale, su grandi scale, domina ogni tipo di andamento; il segno ($0^{\pm}$) è determinato dal parametro "a". In altre parole, su grandi scale ($|x| \gg 0$), abbiamo sempre

$$g_{\text{approx}}(x) \approx axe^{-x^2}$$

*gforte@outlook.it

Dunque, nel caso $a > 0$, ad esempio, la funzione g "parte" da un valore negativo infinitamente vicino allo zero per $x \to -\infty$ e deve arrivare, in maniera **continua**, a valori positivi infinitamente vicini allo zero, tuttavia per $x \to +\infty$. Questo fatto è sufficiente per aspettarsi almeno un punto di massimo e minimo relativi (se vogliamo raccordare continuamente gli andamenti asintotici su grandi scale). I punti poi saranno pure unici e quindi il massimo e minimo sono assoluti. Per comprenderlo "a occhio", basta guardare intensamente negli occhi il termine e^{-x^2}. Tale termine "ammazza" qualunque altra dipendenza funzionale e dunque è altamente improbabile che la funzione nel suo complesso riesca ad avere, ad esempio, due massimi ed un minimo. La "poveretta", a causa del termine esponenziale gaussiano, non ce la fa proprio a salire su (seppure localmente) due volte . Da un punto di vista di un fisico, questa analisi è più che sufficiente (il caso con $a < 0$ è praticamente uguale).
Facciamo anche l'analisi "alla matematico", che piace di più agli amanti degli schemi preconfezionati. I limiti sopra ve li calcolate, ad esempio, con L'Hôpital (esercizio per il lettore). Per quello che invece riguarda i minimi e massimi, calcoliamo la derivata prima e troviamo

$$\frac{dg(x)}{dx} = ae^{-x^2+2x} + (ax+b)(2-2x)e^{-x^2+2x}$$

ovvero, con una messa in evidenza qui, una lì, qualche manipolazione algebrica sparsa, abbiamo

$$\boxed{\frac{dg(x)}{dx} = g'(x) = \Big[-2ax^2 + 2(a-b)x + a + 2b\Big]e^{-x^2+2x}} \tag{1}$$

Ora per studiare la crescenza e la decrescenza osserviamo immediatamente che la parte esponenziale della derivata è sempre positiva (indipendentemente dal valore di x). Dunque possiamo limitarci a studiare il segno della parte quadratica, che ha soluzioni

$$x_\pm = -\frac{(b-a) \pm \sqrt{\Delta(a,b)}}{2a} \tag{2}$$

dove il discriminate è dato dall'espressione $\Delta(a,b) = (a+b)^2 + 2a^2$. Essendo il discriminante la somma di due quadrati, segue che i punti stazionari di $g(x)$ esistono e sono distinti per ogni valore di a, b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$.
Nel punto $A(2,1)$ i grafici delle funzioni si intersecano solo se risulta che

$$\begin{cases} 4a - 2 + b - 1 & = 0 \\ \\ b & = 1 - 2a \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima si ricava in maniera abbastanza immediata che $a = 1$ e $b = -1$

(b) *Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g è tangente al grafico di f nel punto $B(0,-1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.*

Soluzione

La funzione $f(x) = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ è una parabola sempre convessa con un unico punto di minimo nel vertice V di coordinate $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.
Per quanto riguarda la funzione g, sappiamo già che che i punti stazionari sono (utilizzando Equazione (2))

$$x_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

ovvero la funzione g cresce nell'intervallo dell'asse reale tale che (utilizzando Equazioni (1) e (2))

$$\frac{dg}{dx} \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

e decresce fuori dall'intervallo appena determinato. Abbiamo dunque che $x_{\min} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ è il punto di minimo assoluto di g, mentre $x_{\max} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ è il punto di massimo assoluto.
Per determinare i flessi di g facciamo la derivata seconda che, dopo qualche passaggio algebrico, diventa

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \left(4x^3 - 12x^2 + 6x + 2\right) \mathrm{e}^{-x^2+2x}$$

Come al solito l'esponenziale non si annulla mai e dunque i flessi vanno ricercati fra le soluzioni di

$$4x^3 - 12x^2 + 6x + 2 = 0$$

Questa equazione di terzo grado non presenta nessuna difficoltà, infatti si riconosce subito "a occhio" che $x = 1$ è una possibile radice del polinomio $4x^3 - 12x^2 + 6x + 2$ e quindi, utilizzando Ruffini (ma in questo caso anche a occhio direi che si fa prima$\cdots$ fate Ruffini per esercizio), riusciamo a scrivere la derivata nella forma più agevole

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = g''(x) = (x-1)(4x^2 - 8x - 2)e^{-x^2+2x} \tag{3}$$

Per studiare il segno della derivata, dobbiamo studiare il segno del prodotto $(x-1)(4x^2-8x-2)$. A tale scopo, di solito, si usa il famoso falso sistema che si studia in prima superiore. Vediamo fugacemente questa procedura. Si risolvono le seguenti disequazioni

$$x - 1 \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad x \geq 1$$

$$4x^2 - 8x - 2 \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad x \leq \frac{2-\sqrt{6}}{2} \vee x \geq \frac{2+\sqrt{6}}{2}$$

e si studia il prodotto dei segni. Facendo questa analisi elementare si trova che i punti di flesso sono, in ordine crescente

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2-\sqrt{6}}{2} \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= \frac{2+\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

Inoltre risulta che la funzione è concava negli intervalli $x \leq x_1 \vee x_2 \leq x \leq x_3$ e convessa nell'intervallo complementare, ovvero $x > x_3 \vee x_1 < x < x_2$.
Per determinare se i grafici delle due funzioni sono tangenti nel punto $B(0,-1)$, possiamo andare a calcolare la retta tangente ad entrambi i grafici in B. Si trova che questa retta è data da

$$y = -x - 1$$

con $g(0) = g'(0) = f(0) = f'(0) = -1$ ed $f'(x)$ la funzione $f'(x) = 2x - 1$.
Si osservi anche che la retta $x = 1$ è un'asse di simmetria (dispari) per la funzione $g(x)$. Si comprende facilmente la simmetria traslando il sistema di coordinate. In particolare se introduciamo la trasformazione $z = x - 1$, la funzione $g(x)$ nel riferimento Ozy assume la forma

$$g(z) = ze^{-z^2+1}$$

che risulta chiaramente una funzione dispari rispetto all'origine di Ozy, ovvero l'asse $z = 0$ è un'asse di simmetria per g. Nel sistema originario Oxy, l'asse di simmetria $z = 0$ si trasforma in $x = 1$.
Determiniamo anche l'equazione delle rette tangenti al grafico di g nei tre punti di flesso

Retta tangente in x_1

$$y = g(x_1) + g'(x_1)(x - x_1)$$

Facendo qualche conticino, per la verità particolarmente "vuoto" dal punto di vista dell'apprendimento, riusciamo a stabilire che (con un pochino di fatica)

$$g(x_1) = -\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-1/2}, \qquad g'(x_1) = -2e^{-1/2}$$

e quindi l'equazione della retta che cerchiamo è

$$y = -\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-1/2} - 2e^{-1/2}\left(x - \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)$$

Retta tangente in x_2

In questo caso il conto è più semplice. L'equazione che cerchiamo è

$$y = g(x_2) + g'(x_2)(x - x_2)$$

con

$$g(x_2) = 0, \qquad g'(x_2) = e$$

e quindi l'equazione della retta che cerchiamo è

$$y = e\,(x - 1)$$

Retta tangente in x_3

L'equazione in questo caso è

$$y = g(x_3) + g'(x_3)(x - x_3)$$

Grazie alla simmetria dispari della funzione possiamo subito ricavare $g'(x_3) = g'(x_1)$. Rimane dunque da calcolare $g(x_3)$, che invece è più agevole e quindi abbiamo

$$g(x_3) = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{-1/2}, \qquad g'(x_3) = -2e^{-1/2}$$

da cui risulta

$$y = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{-1/2} - 2e^{-1/2}\left(x - \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$$

I risultati discussi fin ora sono riassunti sul grafico di Fig. 1

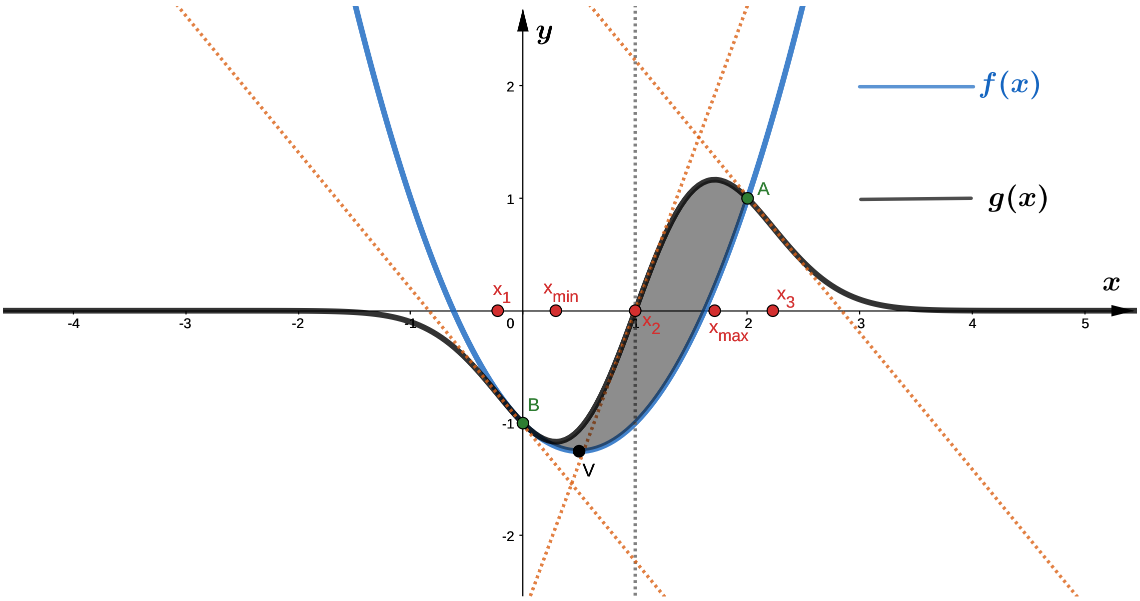

Figura 1: Grafico delle funzioni $f(x)$ (tratto continuo blu) e $g(x)$ (tratto continuo nero). Le rette tratteggiate in arancione sono le tangenti al grafico di g nei rispettivi punti di flesso della funzione. La retta tratteggiata in grigio è l'asse di simmetria (dispari) per la funzione g. Le due funzioni si intersecano nei punti A e B. In B le due funzioni sono tangenti (la retta tangente al grafico in B, dove le due funzioni si intersecano, non è stata riportata). L'area colorata in nero, invece, è la superficie S da valutare come integrale della differenza $g - f$.

Per calcolare S dobbiamo effettuare il seguente integrale:

$$S = \int_0^2 dx\Big[g(x) - f(x)\Big]$$

Il calcolo dell'integrale, in questo caso, si può fare in maniera agevole ricorrendo alle primitive di f e g:

$$\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \text{costante}$$

$$\int g(x)dx = -\frac{e^{-x^2+2x}}{2} + \text{costante}$$

In particolare abbiamo (facendo ricorso alle primitive):

$$\boxed{S = \int_0^2 dx\Big[g(x) - f(x)\Big] = \frac{4}{3} \approx 1.33} \tag{4}$$

(c) *Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (*m*). Si considerino tre fili conduttori disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti per i punti*

$$P_1\left(\frac{3}{2}\ \mathsf{m}, 0\right) \qquad P_2\left(\frac{3}{2}\ \mathsf{m}, 1\ \mathsf{m}\right) \qquad P_2\left(\frac{3}{2}\ \mathsf{m}, -\frac{1}{2}\ \mathsf{m}\right)$$

I tre fili son percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2.0\ \mathsf{A}$, i_2 *ed* i_3*. Il verso di* i_1 *è entrante nel piano del foglio, gli altri due versi non sono specificati. Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico* $\mathbf{B}$ *generato dalle tre correnti, lungo il contorno di* S*, a seconda dell'intensità e del verso di* i_2 *ed* i_3

Soluzione

Si tratta di una semplicissima applicazione del teorema di Ampère. Se indichiamo con $\Lambda_S(\mathbf{B})$ la circuitazione del campo magnetico totale generato dai tre fili lungo il contorno di S abbiamo, per ogni possibile contorno S

$$\boxed{\Lambda_S(\mathbf{B}) = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0\Big(i_1 + i_2 + i_3\Big)}$$

con μ_0 *la permeabilità magnetica del vuoto e* $i_1 + i_2 + i_3$ *la somma algebrica delle correnti* ***concatenate con il circuito*** S*. Se orientiamo* S *in maniera tale che* $i_1 > 0$*, allora il valore* $\Lambda_S(\mathbf{B})$ *dipenderà dalle correnti* i_2 *ed* i_3*, una volta* ***fissato*** i_1*. Osserviamo subito che* i_3 *cade fuori dal circuito* S *(non è concatenata ad esso) e dunque non porta contributo alla circuitazione del campo magnetico. Dunque, se* i_2 *è entrante nel piano del foglio, allora* $\Lambda_S(\mathbf{B}) > 0$ *(non si annulla mai) ed aumenta all'aumentare di* i_2 *(linearmente). Se* i_2 *è uscente, avremo che* $\Lambda_S(\mathbf{B}) > 0$ *per* $|i_2| < i_1$*;* $\Lambda_S(\mathbf{B}) = 0$ *quando* $|i_1| = i_2$ *e per finire* $\Lambda_S(\mathbf{B}) < 0$ *quando* $|i_2| > i_1$ *(in questo caso* $|\Lambda_S(\mathbf{B})|$ *può anche aumentare indefinitamente con l'aumentare di* $|i_2|$*).*

(d) *Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno di* S *rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza* $R = 0.2\ \Omega$*. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità* $B = 1.5 \times 10^{-2}\ \mathsf{T}$*, perpendicolare alla regione* S*. facendo ruotare la spira intorno all'asse* x*, con velocità angolare* ω *costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a* $5\ \mathsf{mA}$*. Determinare il valore di* ω

Soluzione

In questo caso si tratta di applicare la legge di Faraday–Neumann. In pratica, il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso S è dato da

$$\phi_S(\mathbf{B}) = BS\cos\left(\theta(t)\right)$$

essendo $\theta(t)$ l'angolo (convesso) fra la direzione del campo e la direzione del versore normale alla superficie. Se l'angolo varia con velocità angolare costante allora, fatta eccezione di una fase iniziale inessenziale ai fini del problema, otteniamo (considerando il valore assoluto):

$$\left|\frac{d\phi_S(\mathbf{B})}{dt}\right| = Ri \qquad \rightarrow \qquad BS\omega|\sin(\omega t)| = Ri$$

da cui si ricava, per valori di t tali che $\omega t = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ $(n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots)$:

$$\omega = \frac{Ri}{BS} = \frac{0.2\ \Omega \times 5.0 \times 10^{-3}\ \mathsf{A}}{1.5 \times 10^{-2}\ \mathsf{T} \times \frac{4}{3}\ \mathsf{m}^2} = 5 \times 10^{-2}\ \mathsf{Hz} \approx 0.1\ \mathsf{Hz}$$

Problema 1.2. *Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R (v. Fig. 2), poste a distanza d, con R e d espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla. All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico* $\mathbf{B}$. *Tra-*

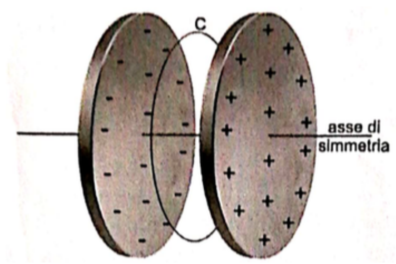

Figura 2

scurando gli effetti di bordo, l'intensità del campo magnetico a distanza r dall'asse di simmetria è data dall'espressione (si suppone $\mathbf{B}$ *espresso in Tesla)*

$$B(t) = \frac{kt}{(t^2 + a^2)^{3/2}} r, \qquad r \leq R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s)

(a) *Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni dei campi elettrico* $\mathbf{E}$ *e magnetico* $\mathbf{B}$, *nei punti interni del condensatore?*

Soluzione

Le dimensioni fisiche di a devono necessariamente essere quelle di un tempo, in quanto solo grandezze con le stesse unità di misura possono essere sommate. Ne segue che

$$[k]LT^{-2} = [B] = \frac{ML^2T^{-2} \times T}{Q \times L} \qquad \rightarrow \qquad [k] = \frac{M \times T}{Q}$$

dove ho indicato con $M = massa$, $T = tempo$, $L = lunghezza$ e $Q = carica$. Nel S. I. pertanto abbiamo che a si misura in secondi (s) e k si misura in kg s/C = kg/A = T s^2 (T = *Tesla*). All'interno del condensatore (assumendo che le armature siano poste nel vuoto) i campi elettrico e magnetico soddisfano, in particolare, l'equazione omogenea delle onde elettromagnetiche (i. e. assenza di sorgenti localizzate), le cui soluzioni esistono e non sono banali. Di fatto è una diretta conseguenza delle equazioni di Maxwell il fatto che il campo e. m. si possa propagare e possa generarsi anche in assenza di sorgenti (campi elettrici e magnetici variabili nel tempo son l'uno sorgente dell'altro). Le soluzioni alle equazioni di Maxwell, in questo caso omogeneo (l'interno del condensatore), sono vettori ortogonali tra loro. In particolare, data la geometria del sistema e trascurando effetti di bordo, $\mathbf{E}$ è parallello all'asse di simmetria, mentre $\mathbf{B}$ è tangente al circuito C (v. Fig. 2), ovunque C sia preso e di qualunque dimensione (purché all'interno del condensatore).

(b) Determinare la circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo il circuito C di Fig. 2 e ricavare da questa il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso la superficie che ha come contorno C, dimostrando che risulta

$$\phi_{\mathrm{S_c}}(\mathbf{E}) = \frac{2k\pi^2 r^2}{\varepsilon_0 \mu_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}}\right)$$

Calcolare la d. d. p. tra le armature del condensatore.
A quale valore tende $\mathbf{B}$ nel limite di tempi lunghi? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico

Soluzione

In questo caso si deve applicare la quarta equazione di Maxwell, in forma integrale, all'interno del condensatore. Osservando che internamente al condensatore la corrente di conduzione è nulla, l'unico contributo alla circuitazione di $\mathbf{B}$ deriva dalla corrente di spostamento. La corrente di spostamento, ricordo, non è una corrente fisica, ovvero un flusso di carica nel tempo. La corrente di spostamento i_s è in effetti il termine di **sorgente del campo magnetico in assenza di correnti di conduzione**. Essa è legata alla variazione temporale del campo elettrico dall'equazione

$$i_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_{\mathrm{S_c}}(\mathbf{E})}{\partial t}$$

così che la circuitazione del campo magnatico lungo C è data da (IV–equazione di Maxwell)

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_{\mathrm{S_c}}(\mathbf{E})}{\partial t}$$

Osserviamo che, detto $\hat{\mathbf{t}}$ il versore punto per punto tangente a C, il campo magnetico può essere scritto come

$$\mathbf{B}(t) = b(t) r \hat{\mathbf{t}}, \qquad b(t) = \frac{kt}{(t^2 + a^2)^{3/2}}$$

e quindi si trova immediatamente che

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = b(t) \int_0^{2\pi r} r dr = 2\pi^2 r^2 b(t)$$

Dunque, applicando la IV–equazione di Maxwell segue

$$2\pi^2 r^2 b(t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_{\mathrm{S_c}}(\mathbf{E})}{\partial t}$$

che rappresenta una semplicissima equazione differenziale a variabili separabili. Integrando membro a membro rispetto al tempo si trova

$$\phi_{\mathrm{S_c}}(\mathbf{E}) = \frac{2\pi^2 r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \int_0^t b(\tau) d\tau$$

L'integrale che compare nell'ultima espressione è dato da

$$\int_0^t b(\tau) d\tau = k \int_0^t \frac{t}{(t^2 + a^2)^{3/2}} d\tau = k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right)$$

Sostituendo il risultato dell'integrazione nell'espressione del flusso elettrico si trova che

$$\phi_{\mathrm{S_c}}(\mathbf{E}) = \frac{2k\pi^2 r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right)$$

ovvero il risultato che si voleva dimostrare.
Calcoliamo adesso la differenza di potenziale ai capi del condensatore. Assumendo, come suggerisce la traccia, gli effetti di bordo trascurabili (i. e. $d/R \ll 1$), segue che possiamo approssimare la capacità del condensatore come

$$\mathcal{C} \approx \frac{\pi R^2 \varepsilon_0}{d}$$

La carica elettrica (I–equazione di Maxwell/Teorema di Gauss) su una delle due armature del condensatore è data da

$$Q(t) = \varepsilon_0 \phi_{\mathrm{S_c}}(\mathbf{E}) = \frac{2k\pi^2 R^2}{\mu_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right) = C \Delta V$$

dove si deve fare attenzione a calcolare il flusso elettrico per $r = R$! Dividendo per la capacità del condensatore si trova che

$$\Delta V(t) = \frac{2k\pi d}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right)$$

ovvero la differenza di potenziale ai capi del condensatore.
Per tempi lunghi la differenza di potenziale tende alla costante

$$\Delta V_{\text{tempi}-\text{lunghi}} = \frac{2k\pi d}{a \varepsilon_0 \mu_0}$$

ed il campo magnetico tende a zero. Questo vuol dire che si sta caricando il condensatore con un generatore di f. e. m. fondamentalmente continua. Inizialmente non vi è d. d. p., dopo di che si applica una d. d. p. che raggiunge un valore stazionario per tempi lunghi. A questo punto il flusso di elettroni che va a caricare le armature si interrompe, il campo elettrico indotto dal generatore si stabilizza ed il campo magnetico interno al condensatore, non essendoci sorgenti localizzate, nè variazioni di campo elettrico (corrente di spostamento), si annulla. Affinché questo accada, Il generatore esterno deve necessariamente essere in corrente continua (dopo un certo transiente), altrimenti il condensatore si scaricherebbe di nuovo[1]. Nel limite di tempi lunghi, quindi, il condensatore si porta alla d. d. p. che si trova ai capi del generatore (assumendo che non vi siano perdite lungo la maglia, altrimenti si porterà ad una d. d. p. finale leggermente inferiore a quella del generatore che, comunque, deve erogare corrente continua, dopo un certo transiente[2]).

(c) Per $a > 0$, si consideri la funzione f definita da $f(t) = -\frac{t}{(t^2+a^2)^{3/2}}$. Si dimostri che $F(t) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}$ è ***una*** *primitiva di $f(t)$ e che il grafico di $f(t)$ passa per l'origine. Studiare la funzione F, individuando eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due asintoti nei punti $t = \pm a\sqrt{2}/2$ e determinare la pendenza delle rette tangenti al grafico di F nei punti di flesso.*

Soluzione

La funzione $f(t)$ non è altri che la funzione $-b(t)/k$ incontrata nel punto precedente. Proviamo in maniera più dettagliata che $F(t)$ è **una** primitiva di f. Abbiamo che

$$\int f(t)dt = -\int \frac{t}{(t^2+a^2)^{3/2}}dt = -\frac{1}{2}\int (\tau + a^2)^{-3/2} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\tau + a^2}} + \text{costante}$$

dove si è posto $\tau = t^2$ (ovvero $d\tau = 2tdt$). Ritornando alla variabile originale (t) e ponendo $''\text{costante}'' = -1/a$, si trova che

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$$

è **una** primitiva di $f(t)$, ovvero

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

Vediamo subito che $F(t)$ è definita e continua per ogni $t \in \mathbb{R}$. Inoltre risulta che $F(t) = F(-t)$, ovvero $F(t)$ è pari rispetto al centro del sistema di coordinate (l'asse $t = 0$). Risulta che l'unica intersezione con gli assi di $F(t)$ è data da $t = 0$. Infatti

$$F(t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{t^2+a^2} = \frac{1}{a^2}$$

da cui si vede che l'ultima equazione è soddisfatta solo per $t = 0$. Inoltre $F(t)$ presenta un punto stazionario quando $f(t) = 0$, cosa che accade solo nel punto $t = 0$. Questa condizione, insieme al limite $\lim_{t\to+\infty} F(t) = -1/a$, che è minore di 0 (essendo $a > 0$), assicura che la funzione $F(t)$ è sempre negativa e pertanto ha un massimo assoluto in $t = 0$. In pratica la retta $y = -1/a$ è un asintoto orizzontale per F.

Per i punti di flesso di F studio il segno di

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{2t^2 - a^2}{(t^2+a^2)^{\frac{5}{2}}} \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad 2t^2 - a^2 \geq 0$$

[1] Questo è vero, ma $\cdots$

[2] Certo...ma "*In the long run we are all dead*" (J. M. Keynes). Come si può quantificare questo limite di tempi lunghi in termini fisici?

e dunque $F(t)$ presenta due flessi nei punti $t_- = -a\sqrt{2}/2$ e $t_+ = +a\sqrt{2}/2$. In particolare risulta che $F(t)$ è concava per $t_- \leq t \leq t_+$ e convessa nell'intervallo complementare (ovvero $|t| \geq t_+$).
L'equazione delle rette tangenti al grafico di F nei punti di flesso sono:

Retta tangente al grafico di F in t_-

$$y_- = F(t_-) + f(t_-)(t - t_-), \qquad F(t_-) = \frac{\sqrt{6}-3}{3a}, \quad f(t_-) = \frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$$

e quindi

$$y_- = \frac{\sqrt{6}-3}{3a} + \frac{2\sqrt{3}}{9a^2}\left(t + a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Retta tangente al grafico di F in t_+

Osservando che F è pari ed $f(t) = -f(-t)$ è dispari, otteniamo immediatamente

$$y_+ = \frac{\sqrt{6}-3}{3a} - \frac{2\sqrt{3}}{9a^2}\left(t - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

L'analisi svolta fino a questo momento mi consente di scrivere che i flessi di $F(t)$ sono punti stazionari di $f(t)$. In particolare, $f(t)$ ha un massimo assoluto in t_- ed un minimo assoluto in t_+, è definita per tutto $\mathbb{R}$ ed interseca gli assi solo nel punto $t = 0$. Inoltre $f(t) = -f(-t)$, come visto sopra, e per tempi lunghi $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0^{\mp}$.
Dunque, se rinunciamo a calcolare quantitativamente le regioni di convessità e concavità di $f(t)$, questa, da valori infinitesimi positivi, cresce fino a raggiungere il suo massimo assoluto in $t = t_-$, decresce fino ad annullarsi per $t = 0$, continua a decrescere fino a raggiungere il suo minimo assoluto in $t = t_+$ e va a zero per tempi lunghi.
Possiamo riassumere tutto con un grafico. Tuttavia, sul grafico che presento mi sbarazzo della costante a (che ha solo un ruolo di re–scaling degli assi coordinati). Come si fa?
Cominciamo da $F(t)$. Posso cambiare variabile utilizzando la variabile $\tau = t/a$ ($\tau \in \mathbb{R}$) ed ottenendo dunque

$$F(a\tau) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2+1}} - 1\right)$$

ovvero posso introdurre la funzione "universale" (nel senso che non dipende più dal parametro a) $\tilde{F}(\tau)$ come

$$\tilde{F}(\tau) = aF(a\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2+1}} - 1$$

con $\tilde{y} = -1 = \lim_{\tau\to\pm\infty} \tilde{F}(\tau)$ asintoto orizzontale per $\tilde{F}$ ed il massimo assoluto in $\tau = 0$. Anche la derivata prima di F può essere scritta come funzione "universale", chiamiamola $\tilde{f}(\tau)$. Essa sarà data da

$$\tilde{f}(\tau) = \frac{d\tilde{f}(\tau)}{d\tau} = -\frac{\tau}{(\tau^2+1)^{3/2}}$$

Potete introdurre $\tilde{f}(\tau)$ anche riscalando il tempo in $f(t)$ e moltiplicando $\tilde{f}$ per a^2, alla seguente maniera

$$\tilde{f}(\tau) = a^2 f(a\tau)$$

I punti di flesso di $\tilde{F}$ sono, in questa nuova descrizione (**equivalente**), dati da $\tau_\pm = t_\pm/a = \pm\sqrt{2}/2$. Per finire, l'equazione delle rette tangenti al grafico di $\tilde{F}$ nei punti $\tau_\pm$ è data da:

$$\tilde{y}_\pm = \frac{\sqrt{6}-3}{3} \mp \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\tau \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Il riassunto di tutte le proprietà è riportato sul grafico di Fig. 3.

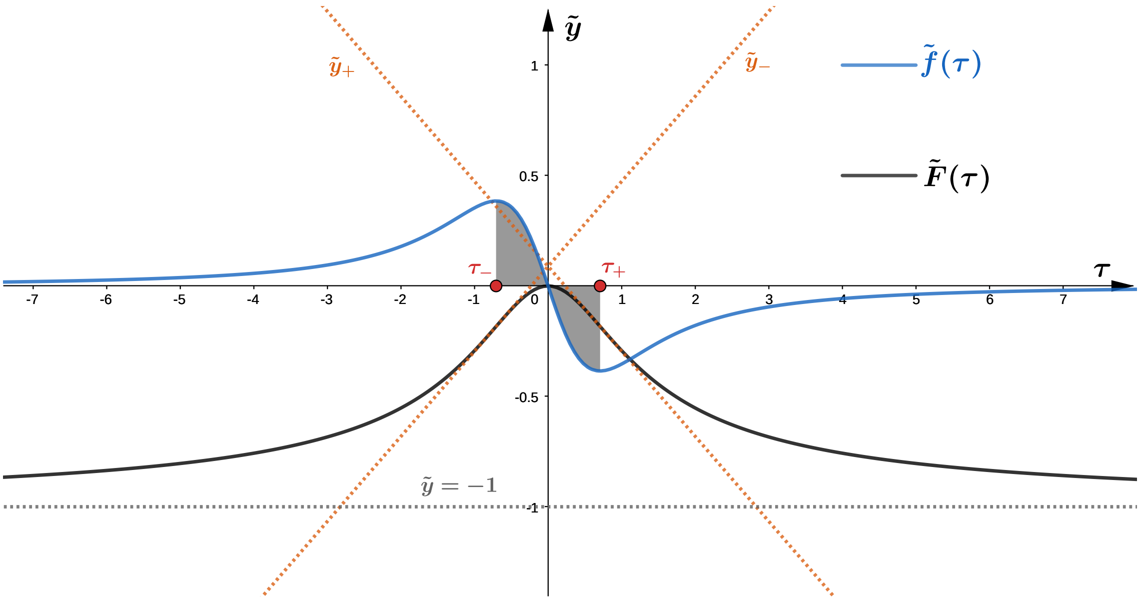

Figura 3: Grafico delle funzioni $\tilde{f}(x)$ (tratto continuo blu) e $\tilde{F}(x)$ (tratto continuo nero). Le rette tratteggiate in arancione sono le tangenti al grafico di $\tilde{F}$ nei rispettivi punti di flesso della funzione ($\tau_\pm = \pm\sqrt{2}/2$). La retta tratteggiata in grigio è l'asintoto orizzontale della funzione $\tilde{F}$. L'area colorata in nero, invece, è la superficie S da valutare con un opportuno integrale (v. testo).

(d) *Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f. Calcolare l'are della regione S compresa fra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate e passanti per gli estremi di f. Fissato $b > 0$ calcolare $\int_{-b}^{b} f(t)dt$*

Soluzione

Per il grafico v. punto precedente. Per ogni $b > 0$ risulta sempre, come diretta conseguenza della parità (funzione dispari) di $f(t)$ che

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = 0$$

Per la stessa ragione di simmetria, la superficie richiesta è data da:

$$S = 2\int_{t_-}^{0} f(t)dt = \frac{2}{a}\int_{\tau_-}^{0} \tilde{f}(\tau)d\tau = \frac{2}{a}\left[\frac{1}{\sqrt{\tau^2+1}}\right]_{\tau_-}^{0} = \frac{2}{a}\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) \approx 0.37a^{-1}$$

dove ho usato il fatto che

$$\tilde{F} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2+1}} + \text{costante}$$

è l'insieme delle primitive di $\tilde{f}$.