

Mathematik und Corona-Infektionen

HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH

Im Zuge der Corona-Pandemie gab es diverse Veranschaulichungen zur Verbreitung des Virus und zur Wirkung möglicher Maßnahmen. Einige dieser Veranschaulichungen werden hier auf ihre mathematische Korrektheit und Plausibilität hin untersucht.

1 Exponentielles und logistisches Wachstum

Die Corona-Pandemie und das Anwachsen der Infektionen sind in aller Munde (Mitte März 2020). Oft wird dabei von exponentiellem Wachstum gesprochen und als Veranschaulichung die Legende vom Erfinder des Schachspiels erzählt (Kasten 1). Einerseits sind dann meist die Zuhörer beeindruckt, andererseits bleibt doch ein merkwürdiges Gefühl zurück. Die Legende kann nicht real sei, wenn das letzte Feld der globalen Ernte mehrerer Jahrhunderte entspricht.

Wenn eine Infektion nämlich wirklich dauerhaft exponentiell fortschreiten würde, wäre in kurzer Zeit die gesamte Menschheit infiziert. Dass das nicht so kommt, sondern dass die Infektionen nach einer kurzen Phase exponentiellen Wachstums schwächer verlaufen und schließlich abebben, ist aber eigentlich bekannt. Die dafür typische Kurve ist nicht die des ungebremsten exponentiellen Wachstums „nahezu senkrecht nach oben“, sondern eine S-Kurve des sogenannten logistischen Wachstums.

„Um zu verstehen, warum das neue Coronavirus so gefährlich ist, muss man sich klarmachen, was exponentielles Wachstum bedeutet. [...]

Exponentielles Wachstum ist gefährlich, weil man es am Anfang leicht unterschätzt. Denn zu Beginn läuft die Kurve gemächlich vor sich hin. Dann wird sie immer steiler und schießt bald nahezu senkrecht nach oben. [...]

Um die enorme Wucht zu veranschaulichen, die exponentielles Wachstum entfalten kann, wird häufig die Legende vom Erfinder des Schachspiels zitiert, der von einem indischen König erbat, in Reiskörnern entlohnt zu werden: Ein Korn für das erste Feld des Schachbretts und von da an immer doppelt so viele – zwei für das zweite Feld, vier für das dritte, acht für das vierte. Nichtsahnend willigte der König ein. Damit hätte er für das letzte Spielfeld eine neunzehnstellige Zahl an Reiskörnern auftreiben müssen, was der globalen Ernte mehrerer Jahrhunderte entspricht.“

Kasten 1. Artikel der Süddeutschen Zeitung vom 10.3.2020

In Abbildung 1 sieht man den bisherigen Verlauf der Corona Infektionen in Südkorea. Es geht um die Gesamtzahl der Infektionen, also um die kumulierte Verteilung. Es werden hier absolute Zahlen angegeben und nicht normierte Prozentwerte. Die Unterschrift lautet: „flacher Beginn, dann steil nach oben“. Die Kurve passt jedoch nicht ganz zum Text. In der Tat: erst flacher Beginn, dann steil nach oben. Aber etwa ab dem 3. März geht die Kurve offensichtlich nicht mehr immer steiler nach oben, wie sie es bei einem exponentiellen Verlauf eigentlich tun müsste.

Es gibt einen Wendepunkt, ab dem der Anstieg der Kurve flacher wird. Aus dem bekannten Verlauf bisheriger Infektionen kann man vermuten, dass der Anstieg dann immer langsamer vonstattengehen wird und die Kurve schließlich fast konstant verlaufen wird. Die schon deutlich zurückgegangenen Neuinfektionen in China lassen vermuten, dass das in Südkorea auch so ablaufen wird und hoffen, dass sich das in Deutschland tendenziell auch so entwickeln wird.

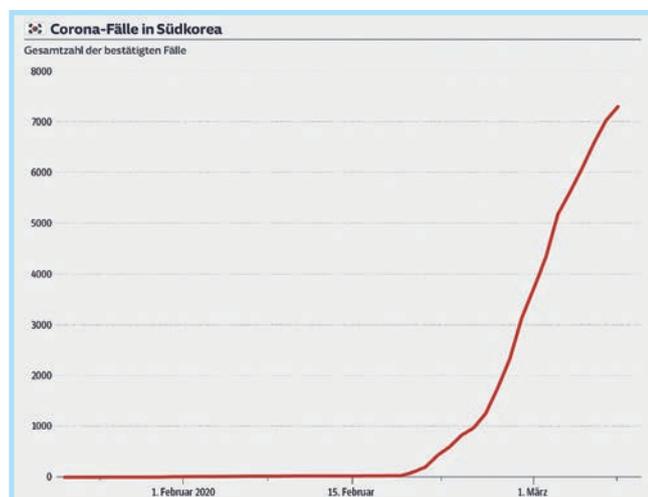


Abb. 1. „In Südkorea: flacher Beginn, dann steil nach oben“, Süddeutsche Zeitung 10.3.2020

Bei einem exponentiellen Wachstum steigt die Kurve steil an und wird immer steiler. Aber nicht jede steil ansteigende Kurve gehört auch zu einem exponentiellen Wachstum. Wie erkennt man ein exponentielles Wachstum? Mit bloßem Auge kaum, dafür sind die Menschen nicht gebaut. Ein lineares Wachstum, das geradlinig verläuft, können sie aber gut erkennen. Wenn man nun die y-Werte auf einer logarithmischen Skala abträgt, sehen Exponentialkurven gerade aus. Damit kann man auch mit bloßem Auge erkennen, ob ein Wachstum exponentiell ist oder nicht. Dies ist in Abbildung 2 gut zu erkennen (t-online.de, 19.3.2020). Hier geht es offensichtlich um die Gesamtinfizierten, also um die kumulierte Verteilung.

Entsprechende Geraden zeigen die Verdopplung in einem Tag, in zwei Tagen, in drei Tagen, wöchentlich, monatlich. Für Deutschland sieht man, dass derzeit eine Verdopplung innerhalb von zwei bis drei Tagen stattfindet. In Japan erfolgt derzeit etwa wöchentlich eine Verdopplung. Interessant sind China und Südkorea. Hier hat sich das Wachstum schon deutlich abgeschwächt, vermutlich auch aufgrund der ergriffenen Maß-

In vielen Ländern steigt die Zahl der Corona-Infizierten täglich stark an

Bestätigte Fälle in ausgewählten Ländern.

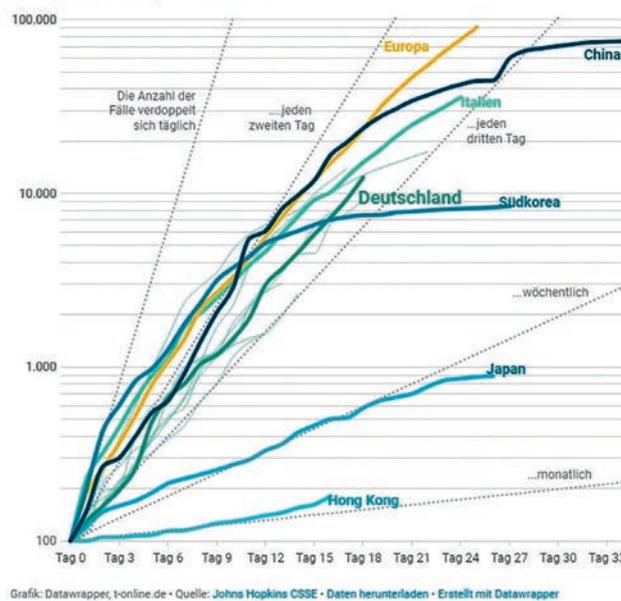


Abb. 2. Corona-Infektionen in einer logarithmischen Skala, t-online.de 19.3.2020

nahmen. Japan scheint gerade in diese Phase zu kommen, Deutschland offensichtlich noch nicht.

2 Dichte und kumulierte Verteilung

In der aktuellen öffentlichen Diskussion muss man zwei Aspekte auseinanderhalten, die manchmal nicht klar genug benannt werden. Einmal geht es um Neuinfizierte, das andere Mal um Gesamtinfizierte. Wenn man nur vage von Infizierten spricht, ist Missverständnissen Tür und Tor geöffnet.

In beiden Fällen spricht man von Verteilungskurven. Die Kurve der Neuinfizierten nennt man *Dichte der Verteilung*, die Kurve der Gesamtinfizierten ist die *kumulierte Verteilung*. Die Kurve der kumulierten Verteilung verläuft typischerweise in einer S-Form und nähert sich dann (wenn man in Prozenten rechnet) dem Wert 1 = 100% an. Die Kurve der Dichte-Verteilung ist oft glockenförmig. In komplizierteren Fällen kann es auch ‚schiefe‘ Glocken geben. Hier beschränken wir uns auf symmetrische Fälle.

Hier wird im Folgenden mit dem logistischen Wachstum als quasi ‚natürlichem‘ Wachstum gearbeitet. Dabei wird die logistische Funktion als Black Box verwendet und nicht hergeleitet. Die Gleichung der logistischen Funktion lautet in allgemeiner Form

$$f(t) = \frac{a \cdot S}{a + (S - a) \cdot e^{-S \cdot k \cdot t}}$$

Dabei sind a der Anfangswert zum Zeitpunkt 0 und S der Sättigungswert, dem sich die Funktionswerte auf lange Sicht annähern. Der Parameter k bestimmt, wie schnell sich der Graph dem

Sättigungswert annähert. In Abbildung 3 ist ein Beispiel eines Graphen des logistischen Wachstums dargestellt. Die kumulierte Verteilung (hier grün) ist die Integralfunktion der Dichtefunktion, umgekehrt ist die Dichtefunktion (hier rot) die Ableitung der kumulierten Verteilung. Geometrisch entspricht dem Wert der kumulierten Verteilung somit der Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Dichtefunktion bis zu dieser Stelle.

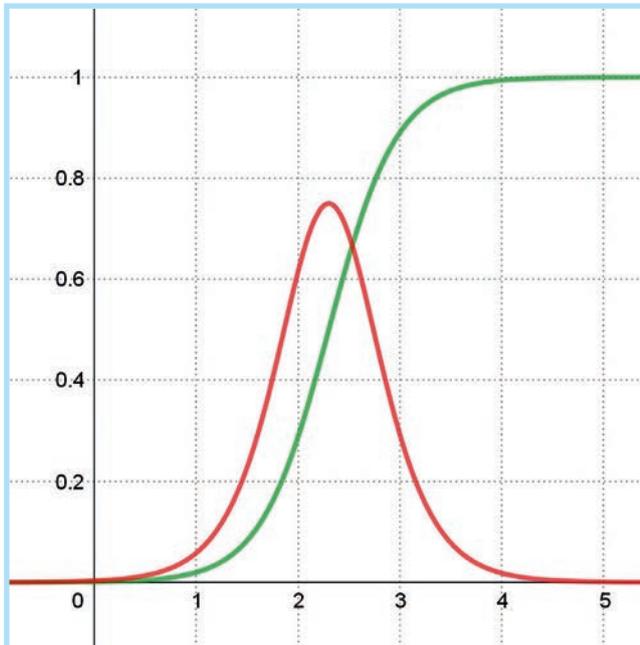


Abb. 3. Dichte-Verteilung (rot) und kumulierte Verteilung (grün) des logistischen Wachstums

Es sei noch angemerkt, dass sich bei geeigneter Parameterwahl die Verteilungskurven des logistischen Wachstums von den Verteilungskurven der Normalverteilung nicht gravierend unterscheiden.

3 Modellierungen der Corona-Pandemie

In Zeitschriften, Nachrichten und im Internet findet man aktuell verschiedene Visualisierungen zur Ausbreitung der Corona-Pandemie. Einige davon werden hier vorgestellt und auf ihre mathematische Plausibilität untersucht.

3.1 Das SPAHN-Modell

Am 10.3.2020 gab Bundesgesundheitsminister SPAHN in der Bundespressekonferenz ein Statement zur Corona-Epidemie (Kasten 2) und zeigte eine Grafik (Abb. 4, Abb. 5).

„Im Kern geht’s ja darum, dass wir nicht einen großen Ausbruch schnell haben, sondern es möglichst verlangsamten. Umso länger wir es verlangsamten, desto besser. So simpel ist das ja am Ende. Und genau das ist die Maßnahme, die wir jetzt ergreifen, dienen jetzt dazu, das lang zu ziehen.“

Kasten 2. Gesundheitsminister SPAHN, t-online.de, 10.3.2020



Abb. 4. Bundespressekonferenz, t-online.de 10.3.2020

Die erste ‚steile‘ Kurve soll eine schnelle Ausbreitung zeigen, die andere ‚flache‘ eine verlangsamte. Es dürfte in beiden Kurven um Neuinfektionen gehen, also um Dichtefunktionen. An der Grafik fallen verschiedene Dinge sofort ins Auge.

- Untypisch ist hier, dass die Kurven nicht den ‚glockenförmigen‘ Verlauf haben.
- Die beiden Kurven haben nicht die gleichen Anfangswerte.
- Schon mit bloßem Auge hat man den starken Verdacht, dass die Fläche unter der zweiten Kurve viel größer ist. Wenn es aber um die gleiche Zahl von Infizierten gehen soll, müsste die zweite Fläche insgesamt bis zum Abklingen der Neuinfektionen auf Null genauso groß sein wie die erste. Wenn man das hier einmal grob überschlägt, dürfte die Fläche unter der zweiten Kurve schon im hier sichtbaren Bereich ungefähr doppelt so groß sein und weiter fortgesetzt insgesamt etwa viermal bis fünfmal so groß sein wie die Fläche unter der ersten Kurve (Abb. 6). Dies kann man mit Näherungspolynomen und Integralen berechnen, es reichen aber auch Annäherungen durch Vielecke. (Anmerkung: Die gemessenen Flächeninhalte geben nur in der Relation, im Verhältnis zueinander einen Sinn!)

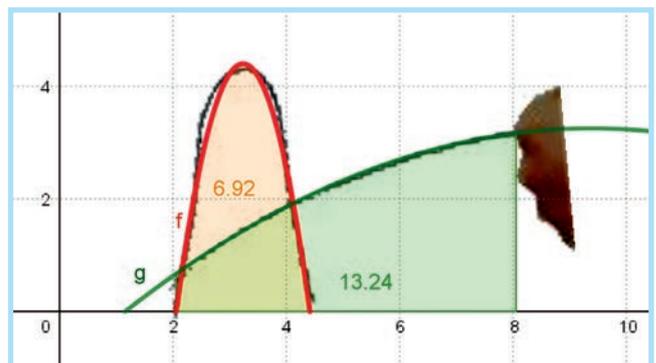


Abb. 5. Graphen des SPAHN-Modells

Zusammengefasst: im zweiten Modell gäbe es hier nicht die gleiche Anzahl von Gesamtfektionen, die über einen längeren Zeitraum ‚gestreckt‘ würde, sondern es müsste mehr als die vierfache Zahl von Gesamtfektionen geben. Die Grafik veranschaulicht damit nicht das, was im begleitenden Text gesprochen wird, das ist schlicht und einfach nicht stimmig.

3.2 Das CDC Modell

Am 13.3.2020 erschien auf t-online.de ein Beitrag, der zeigen soll, wie eine Ausbreitung ohne Schutzmaßnahmen die Kapazität des Gesundheitssystems sprengen könnte (Abb. 6), während eine verlangsamt Ausbreitung mit Schutzmaßnahmen unter der Kapazitätsgrenze bleiben würde (Abb. 7). Die Grafik bezieht sich auf die CDC, die Centers for Disease Control and Prevention

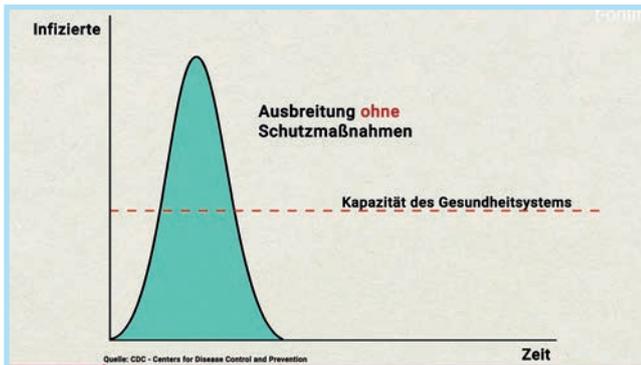


Abb. 6. Ausbreitung ohne Schutzmaßnahmen, t-online.de 13.3.2020

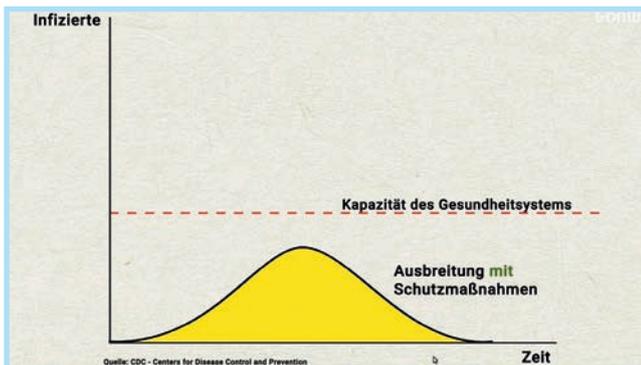


Abb. 7. Ausbreitung mit Schutzmaßnahmen, t-online.de 13.3.2020

Wieder geht es offensichtlich um Dichtefunktionen und Neuinfizierte, da der Graph glockenförmig aussieht. Allerdings ist die Beschriftung der senkrechten Achse mit ‚Infizierten‘ eher vage und irritierend. In einer Animation wird dann die erste Kurve mit der cyanfarbenen Fläche dynamisch in die zweite Kurve mit der gelben Fläche umgewandelt (t-online.de, 13.3.2020). Beide Kurven sehen dabei auf den ersten Blick glockenförmig aus. Zur Grafik aus Abbildung 6 als Hintergrundbild kann man mit etwas Experimentieren eine Dichtefunktion finden, die einigermaßen zur Kurve passt (Abb. 8).

Nun wird mit Abbildung 7 das Gleiche versucht. Überraschenderweise findet man experimentell keine auch nur annähernd passende Dichtefunktion. Wohl aber eine, die parallel zur Kurve verläuft (Abb. 9).

Es sieht so aus, als ob die ‚gelbe‘ Fläche zu klein ist, kleiner als die cyanfarbene Fläche. Dies kann man grob durch einigermaßen passende Vielecke überprüfen oder genauer durch die



Abb. 8. Approximation der Kurve aus Abbildung 6, Dichte rot gezeichnet

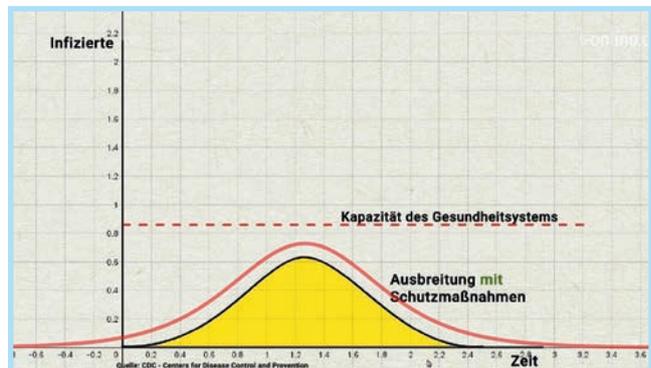


Abb. 9. Versuch der Approximation von Abbildung 7, Dichte rot gezeichnet

Approximation mit Funktionen und Flächenberechnungen mit Integralen. Ergebnis: Die gelbe Fläche hat knapp 75 % der cyanfarbenen Fläche, die Anzahl der Gesamtinfektionen bleibt also nicht gleich! Dies liegt vermutlich daran, dass die Fläche unwillentlich in der graphischen Animation ‚geschrumpft‘ ist und der Grafiker den Aspekt der Flächengleichheit nicht im Blick hatte. Andere Möglichkeit: Man geht stillschweigend davon aus, dass es im zweiten Modell insgesamt deutlich weniger Infektionen geben wird.

3.3 Das heute journal-Modell

Im heute journal vom 15.3.2020 wurden zwei eigene Grafiken vorgestellt, in denen mit glockenförmigen Dichtefunktionen die Ausbreitung der Corona-Infektion modelliert wird (Abb. 10, Abb. 11).

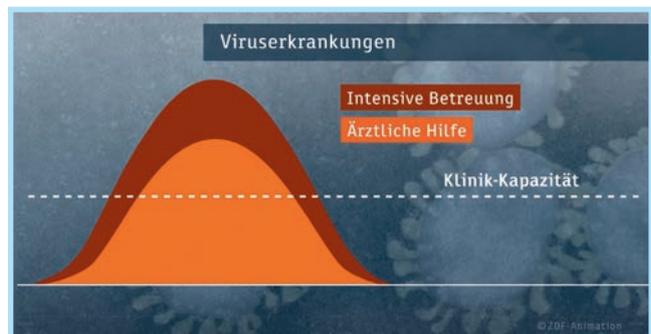


Abb. 10. Modell heute journal, Ausbreitung ungebrems, ZDF 15.3.2020



Abb. 11. Modell heute journal, Ausbreitung verlangsamt, ZDF 15.3.2020

Die glockenförmige Kurve spricht dafür, dass es sich auch hier um Dichtefunktionen, also Neuerkrankungen handelt. Auch hier wird eher vernebelnd von ‚Viruserkrankungen‘ gesprochen und Neuinfizierte und Gesamtinfizierte werden nicht auseinandergehalten.

Allerdings haben die glockenförmigen Kurven nicht die typischen Proportionen des logistischen Wachstums (übrigens auch nicht der Gauß'schen Normalverteilung). Die Kurven lassen sich jedoch recht gut stückweise durch Parabelbögen annähern. Vergleicht man dann die farbigen Flächen unter der Kurve, so stellt man fest, dass im zweiten Modell die Fläche kleiner ist, ca. 80% der ersten Fläche einnimmt, was mit bloßem Auge nur schwer zu erkennen ist. Entweder hat auch hier der Grafiker den Aspekt der Flächengleichheit nicht genügend beachtet, oder man ist stillschweigend der Ansicht, dass es im zweiten Modell weniger Infektionen geben wird.

3.4 Das Spiegel-Modell

Am 11.3.2020 veröffentlichte der Spiegel auf seiner Website eine Grafik zur Ausbreitung der Infektion. Auch hier findet man eine typische Glockenform und dazu eine korrekte Beschriftung der Achsen. Beide Kurven, die mit Maßnahmen (Abb. 12) und die ohne Maßnahmen (Abb. 13), lassen sich recht gut durch eine Dichtefunktion des logistischen Wachstums (hier zur Unterscheidung cyan gezeichnet) approximieren, und beide Flächen unter den Kurven haben die gleiche Größe. Dieses Modell ist also mathematisch akzeptabel und in sich stimmig.

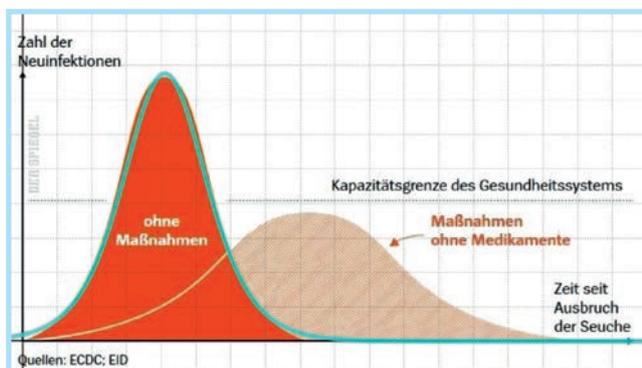


Abb. 12. Ausbreitung ohne Maßnahmen, spiegel.de, 11.3.2020, Dichte cyan gezeichnet

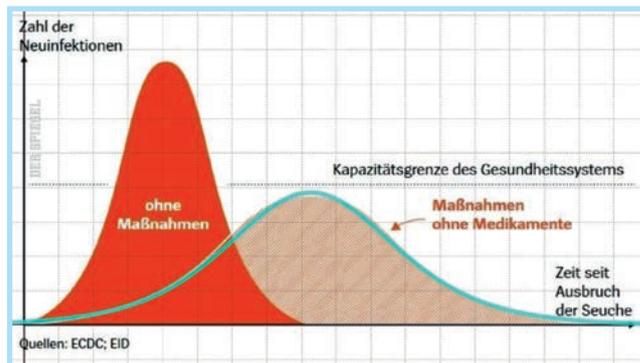


Abb. 13. Ausbreitung mit Maßnahmen, spiegel.de, 11.3.2020, Dichte cyan gezeichnet

4 Fazit

Es werden aktuell verbreitete Modelle untersucht. Alle betrachteten Modelle basieren auf starken Vereinfachungen (hier z. B. auf einer symmetrischen, glockenförmigen Dichtekurve) und einer Abstraktion der Realität, das ist ja ein Charakteristikum des Modellbildens. Der Sinn des Modellierens ist ja bei aller Vereinfachung eine Prognose, ein Blick in die Zukunft, um in der Gegenwart adäquat handeln zu können.

Es ist aus mathematischer Sicht zu begrüßen, wenn Probleme der uns umgebenden Welt mit mathematischen Modellen untersucht und veranschaulicht werden. Noch besser wäre es, wenn die Modelle und Veranschaulichungen auch im Rahmen der Vereinfachungen mathematisch konsistent und tragfähig wären und sich nicht oft auf den ersten oder zweiten Blick als fehlerhaft erweisen und den Aufbau korrekter Grundvorstellungen eher behindern als unterstützen.

5 Zu guter Letzt

Auf einen bislang kaum diskutierten Nebeneffekt sei noch hingewiesen: Man geht derzeit davon aus, dass über kurz oder lang, mit oder ohne Maßnahmen ca. 70 % der Weltbevölkerung einmal vom Corona Virus infiziert sein werden. Dann haben die Maßnahmen, die Infektionskurve abzuflachen um den Kollaps des Gesundheitswesens abzuwenden, auch den Effekt, dass die zeitliche Dauer der Infektionswelle und damit auch die Dauer der zu ergreifenden Maßnahmen entsprechend verlängert wird.

Und es sei noch deutlich gesagt, damit dieser Beitrag nicht fehlinterpretiert wird:

Diese Kritik an gut gemeinten, aber oft mathematisch fehlerhaften bzw. inkonsistenten Veranschaulichungen soll keine Kritik an den Maßnahmen zur Eindämmung der Corona-Infektion sein! Es ist richtig, dass Maßnahmen zur Begrenzung der Ausbreitung ergriffen werden. Es ist auch richtig, dass diese dazu beitragen können, eine Überlastung des Gesundheitssystems zu vermeiden.

Links

ELSCHENBROICH, H.-J. (2020). Corona: Mathematik und Modellbildung. Interaktive Arbeitsblätter. GeoGebra Book. <https://www.geogebra.org/m/cfamtppe> (20.3.2020).

Spiegel (11.3.2020). Jeder Tag zählt. <https://www.spiegel.de/wissenschaft/medizin/coronavirus-kampf-gegen-ausbreitung-von-covid-19-jeder-tag-zaehlt-a-9c56b511-a31a-4bc8-bf0f-5a6e58b33bbc> (20.3.2020).

Süddeutsche Zeitung (10.3.2020). Die Wucht der großen Zahl. <https://projekte.sueddeutsche.de/artikel/wissen/coronavirus-die-wucht-der-grossen-zahl-e575082/> (11.3.2020).

T-Online (10.3.2020). Ausbreitung und Maßnahmen: Minister Spahn und Experten über Coronavirus in Deutschland. https://www.t-online.de/tv/news/panorama/id_87491846/minister-spahn-und-experten-ueber-coronavirus-in-deutschland.html (13.3.2020).

T-Online (13.3.2020). Wie ein Kollaps des Gesundheitssystems verhindert wird. https://www.t-online.de/nachrichten/panorama/id_87510664/coronavirus-warum-schnelles-reagieren-bei-pandemien-wichtig-ist.html (13.3.2020).

T-Online (19.3.2020). Großbritannien droht das Corona-Desaster https://www.t-online.de/nachrichten/ausland/id_87551520/coronavirus-pandemie-grossbritannien-droht-das-unterschaetzte-desaster.html (19.3.2020).

ZDF heute-journal (15.3.2020). Scheinbarer Kleinkram ist lebenswichtig. <https://www.zdf.de/nachrichten/heute-journal/videos/ausbreitung-des-coronavirus-scheinbarer-kleinkram-ist-lebenswichtig-100.html> (16.3.2020).

HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH, Korschbroich, hans-juergen.elschenbroich@mnu.de, war Lehrer für Mathematik und Informatik, Fachleiter am Studienseminar, Medienberater sowie Fachreferent Mathematik im MNU-Bundesvorstand. ■