

Hoofdstuk I: exponentiële en logaritmische functies

www.karelappeltans.be

April 6, 2023

1 lineaire versus exponentiële groei

1.1 begripsvorming

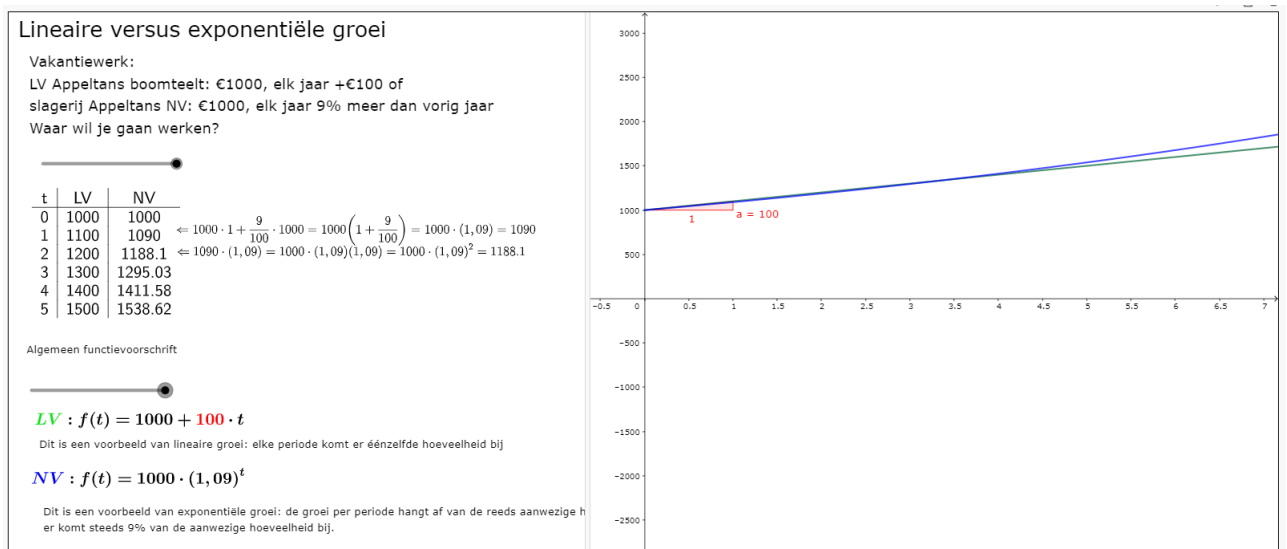


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/m3zxeue6>

1.2 exponentiële groei

Exponentiële groei:

$$b \cdot a^t = f(t)$$

b: beginhoeveelheid
a: groeifactor

bij toename: $a = 1 + \frac{p}{100}$ p: het groeipercentage

bij afname: $a = 1 - \frac{p}{100}$ De eenheid van tijd moet voor t en het percentage gelijk zijn!!

f(t): eindhoeveelheid

Vb: Een opgepompte fietsband (4 bar) verliest per week 3% lucht.
Bepaal de druk na 10 dagen

$b = 4$
 $a = 1 - \frac{3}{100} = 0.97$
 $t = \frac{10}{7}$ (de eenheid is week!)

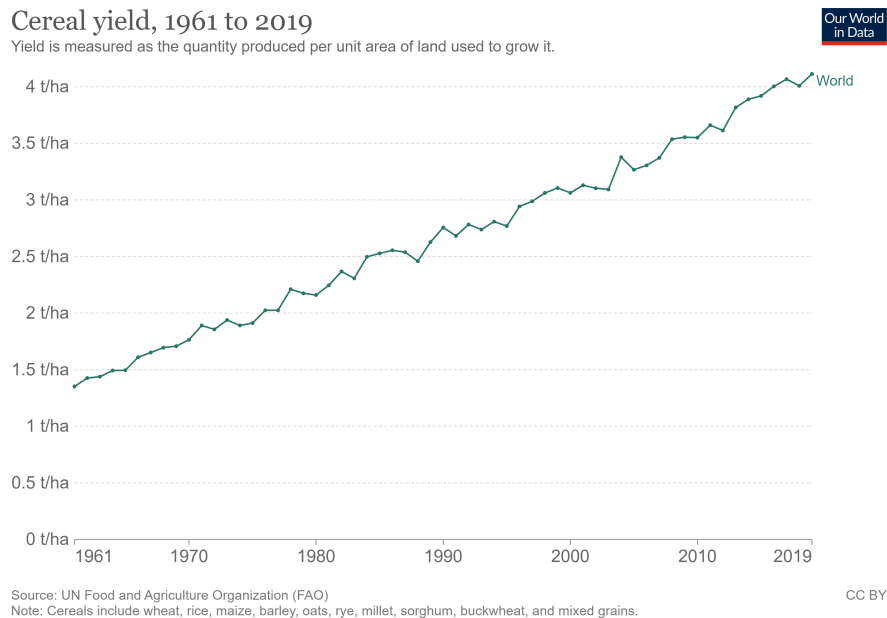
$4 \cdot (0.97)^{\frac{10}{7}} = 3,83$

Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/m3zxeue6>

1.3 oefeningen

1. lineaire of exponentiële groei?

(a) Wereldwijde graanproductie



(b) Afschrijving auto bij omnium-verzekering

Afschrijving bepaalt de waarde van je auto

Als je een [omniumverzekering](#) hebt, dan daalt je auto in waarde door de afschrijving (of waardevermindering) die wordt toegepast. Als je [auto total loss](#) is of je [auto gestolen](#) is, zal dat dus een invloed hebben op het bedrag van je schadevergoeding. Door de afschrijving krijg je meer geld voor een auto die maar 1 jaar oud is dan voor een die 5 jaar oud is.

Let op de afschrijving als je omniumverzekeringen vergelijkt

- **Gedurende welke periode wordt er geen afschrijving toegepast?**
Hoe langer die periode, hoe beter. Soms zie je het aantal maanden vermeld staan in de naam van de autoverzekering, bijvoorbeeld 12 of 24M. Dat betekent dat je auto gedurende die tijd zijn volledige waarde behoudt.
- **Welk afschrijvingspercentage wordt toegepast?**
Hoe lager dit percentage, hoe trager je auto waarde verliest. Bij de meeste verzekeraars wordt je auto 1% minder waard per maand. Dat percentage wordt toegepast na de periode waarin je auto zijn volledige waarde behoudt.

Heb je een goedkope omniumverzekering gevonden? Dan betekent dat vaak dat je auto maar gedurende een korte periode 100% van zijn waarde behoudt.

Afschrijving in de praktijk

Stel dat je een omniumverzekering formule 24M met een afschrijvingspercentage van 1% hebt genomen voor je auto van € 20 000. De eerste 2 jaar (24 maanden) word je dan volledig vergoed. Daarna wordt de aangenomen waarde berekend op basis van de ouderdom van de wagen:

(c) Een artikel uit De Morgen over examens bij warm weer:

Het blijkt niet zomaar een studentensmoesje: hoge temperaturen maken het studeren moeilijk. Een grootschalige studie van de Harvard-universiteit uit 2018 toont dat examenresultaten dalen door warm weer. Dertien jaar lang analyseerden wetenschappers de studieresultaten van ongeveer tien miljoen studenten. En wat bleek? Bij elke halve graad warmer, zakt de gemiddelde score van een student met één procent.

2. Hoeveel brengt 1000 euro vakantiegeld op als ik dit geld 7 jaar laat staan op onderstaande rekeningen?

55 spaarrekeningen gevonden

Laatste verificatie: donderdag 26 augustus 2021

Aanbieder	Basisrente	Getrouwheid	Totale rente	Meer info
aion bank Aion Bank Extended »	0,10%	0,90%	1,00%	+
medirect MeDirect Maandsparen Max »	0,05%	0,65%	0,70%	+
Santander Consumer Bank Santander Consumer Bank Vision+ plus »	0,05%	0,55%	0,60%	+
bpost bank Cocoon Spaarrekening	0,40%	0,15%	0,55%	+

3. Het coronavirus:

vr 28 aug 20:48

Aantal besmettingen stijgt "exponentieel" in Frankrijk

Het aantal coronabesmettingen dat dagelijks in Frankrijk wordt vastgesteld, stijgt "exponentieel". Daarvoor waarschuwen de Franse gezondheidsautoriteiten. Vandaag werden er meer dan 7.379 nieuwe besmettingen gemeld. Gisteren ging het nog om 6.111 besmettingen.

- (a) Bepaal de groeifactor en het groeipercentage van het coronavirus in Frankrijk
 (b) Als dit groeipercentage elke dag hetzelfde blijft, hoeveel besmettingen zijn er dan vandaag?

4. Het coronavirus:

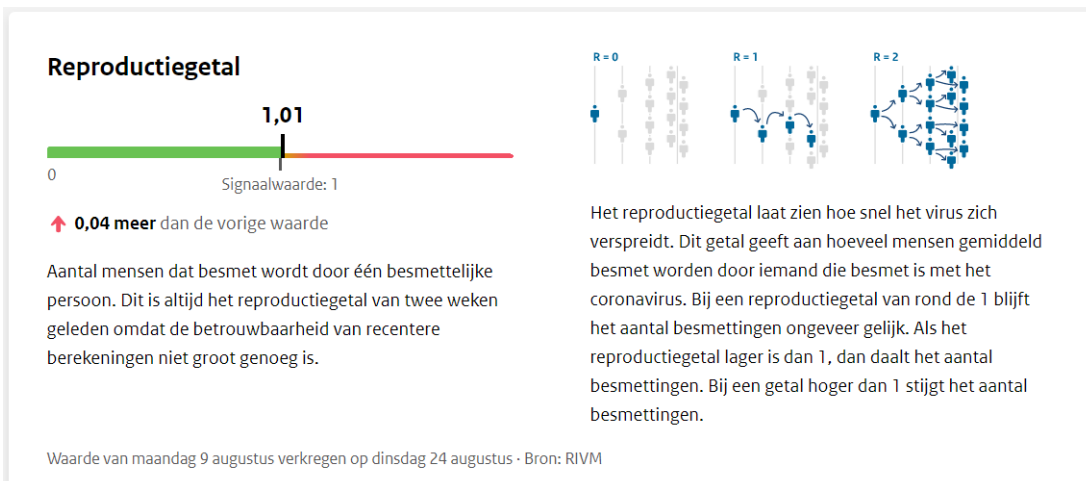
07:12

De dagelijkse coronacijfers

Het gemiddeld aantal nieuwe coronabesmettingen in ons land blijft afnemen. In de week van 20 tot 26 augustus werden **dagelijks 437 besmettingen** vastgesteld, dat zijn er vijftien procent minder dan in de week ervoor.

- (a) Bepaal het groeipercentage en de groeifactor per dag

5. reproductiegetal



- (a) geef de wiskundige benaming voor het reproductiegetal
 (b) bepaal de procentuele toename op 9 augustus

6. Lees eerst onderstaand artikel

Zeeijs Noordpool

Het zeeijs rond de Noordpool is volgens satellietmetingen sinds 1979, toen de metingen zijn begonnen, met gemiddeld ruim 10 procent per 10 jaar afgenomen. In de nazomer is de ijsbedekking in het noordpoolgebied gewoonlijk het kleinst. Vooral in die tijd van het jaar is het zeeijs sterk afgenomen, veel meer nog dan in hartje winter. De afname van zeeijs is de afgelopen tien jaar groter dan voor die tijd.

Figure 3: <https://www.knmi.nl/kennis-en-datacentrum/uitleg/zeeijs-in-warmer-klimaat>

- (a) Als we uitgaan van een vaste daling van 10% per 10 jaar, hoeveel zij-ijs van de oorspronkelijke hoeveelheid van 1979 blijft er dit jaar over?
 (b) Komt een afname van 10% per 10 jaar overeen met een afname van 1% per jaar? Verklaar uw antwoord.

7. gelijkwaardige rentevoeten.

- (a) Bij welke (fictieve) bank wil jij jouw spaargeld zetten: Bank A geeft 12% per jaar en Bank B geeft 6% per half jaar.
 (b) Bepaal de gelijkwaardige rentevoet voor bank B

8. Op Black Friday geeft winkel A 21% korting en in winkel B hoef je de BTW van 21% niet te betalen voor hetzelfde artikel. Welke winkel verkies je?

9. In helder water vermindert de lichtintensiteit per meter met 60%. We nemen de lichtintensiteit aan de oppervlakte als eenheid.

- (a) Bereken de lichtintensiteit op 5 m diepte
 (b) Schrijf de lichtintensiteit als functie van de diepte

10. De bevolking van een land groeit exponentieel aan met 12% op 20 jaar

- (a) Wat is de groeifactor op 20 jaar, 10 jaar en op 1 jaar?
 (b) In 1990 is de bevolking 125000. Wat is de bevolking volgens dit model dit jaar?
 (c) Zoek het voorschrift van de functie die met de tijd (in jaren gerekend vanaf 1990) de bevolking laat overeenstemmen

11. In ideale laboratoriumomstandigheden verdubbelt de bacterie E. Colli zich elke 5 uur. Bij het begin van het kweekprogramma zijn er 160
- (a) Bepaal het aantal na 10 uur
 - (b) Bepaal he aantal na 2 dagen
12. Ga op zoek naar een voorbeeld van exponentiële groei. Verzin er zelf een vraag bij.

2 n-de machtswortels en rationale exponenten

2.1 n-de machtswortels

n-de machtswortels

voorbeelden:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{9} = \sqrt[2]{9} = 3 & \Leftrightarrow 3^2 = 9 & \text{dus:} & \sqrt[2]{3^2} = 3 \\ \sqrt[5]{32} = 2 & \Leftrightarrow 2^5 = 32 & & \sqrt[5]{2^5} = 2 \\ \sqrt[3]{-27} = -3 & \Leftrightarrow (-3)^3 = -27 & & \sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \end{array}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

(opgepast: als n even is moet a een positief g

Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/uramnee>

2.2 rationale exponenten

Machten met rationale exponenten

Beschouw de volgende gelijkheden:

$$\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{64} = 4 = 2^2 = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{2^9} = \sqrt[3]{512} = 8 = 2^3 = 2^{\frac{9}{3}}$$

$$\sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{256} = 4 = 2^2 = 2^{\frac{8}{4}}$$

We merken telkens dat $\sqrt[n]{2^m} = 2^{\frac{m}{n}}$

Definitie: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} : \forall m \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{R}_0^+ : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Voorbeelden:

$$5^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{5^2}$$

$$3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^9} = \sqrt{3^9} = (3^4)\sqrt{3}$$

$$104^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{104^1} = \sqrt[4]{104}$$

12 / 12

Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/uramnee>

2.3 rekenregels exponenten

Regel	Voorbeeld
$a^1 = a$	$5^1 = 5$
$a^0 = 1$	$9^0 = 1$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(7^2)^4 = 7^{2 \cdot 4} = 7^8$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$

Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/uramnee>

2.4 wortelvormen vereenvoudigen

Wortelvormen vereenvoudigen;

één wortel: probeer zoveel mogelijk elementen onder de wortel uit te halen

Hou hierbij rekening met welke wortel je werkt

$$\sqrt{27a^5b^3c} = \sqrt{3 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2 \cdot b \cdot c} = 3 \cdot a \cdot a \cdot b \sqrt{3abc} = 3a^2b\sqrt{3abc}$$

$$\sqrt[5]{a^{11}b^5} = \sqrt[5]{a^5a^5ab^5} = a^2b\sqrt[5]{a}$$

meerdere wortels: herschrijf m.b.v. rationale exponenten de opgave naar één wortel

$$\frac{\sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{16}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12}} = a^{\frac{13}{12}} = \sqrt[12]{a^{13}} = a \cdot \sqrt[12]{a}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^4} \sqrt[4]{b^3} a^{-1} b^{-2}}{a^{-\frac{7}{3}} b^{-\frac{5}{4}}} = a^{\frac{1}{3} - 1 + \frac{7}{3}} b^{\frac{3}{4} - 2 + \frac{5}{4}} = a^{\frac{5}{3}} b^0 = \sqrt[3]{a^5} \cdot 1 = a \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/uramnee>

2.5 oefeningen

1. Vereenvoudig

Vereenvoudig onderstaande uitdrukking.

$$(4)^{\frac{1}{2}}$$

Antwoord: 2

Correct

Nieuwe oef



Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/uramnee>

2. Bereken of vereenvoudig zonder rekenmachine

- (a) $\sqrt[5]{10^{-10}}$
- (b) $32^{-0.4}$
- (c) $9^{1,5}$
- (d) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$
- (e) $\sqrt[6]{343}$
- (f) $\sqrt[4]{9}$
- (g) $\sqrt[5]{160}$
- (h) $\sqrt[4]{162}$

3. Schrijf telkens als een macht van 2

- (a) $\frac{1}{4}$
- (b) $\sqrt[3]{16}$
- (c) $\frac{1}{\sqrt[6]{4}}$
- (d) $\sqrt{32}$
- (e) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$

4. Vereenvoudig. De letters stellen positieve getallen voor. In het resultaat mogen geen negatieve of gebroken rationale exponenten staan. In de noemer mogen geen wortelvormen staan.

- (a) $\sqrt[6]{81a^2}$
- (b) $\sqrt[3]{16x^4y^4}$
- (c) $\sqrt{\sqrt[3]{25a^4}}$
- (d) $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^5}{81c^2d^8}}$
- (e) $\left(ab^3c^{-\frac{7}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} \left(ab^{\frac{7}{2}}\right)^{-1}$
- (f) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

5. Toon aan dat de groeifactor per half jaar $\sqrt{2}$ is, als de groeifactor op jaarbasis 2 is.

6. Bij het afschrijven van een machine in de boekhouding wordt de volgende formule gebruikt:

$$\frac{p}{100} = 1 - \sqrt[n]{\frac{W_n}{W_0}}$$

met p het afschrijvingspercentage en W_n de waarde van de machine na n jaar.

- (a) Bereken p voor een machine die na 5 jaar nog een vierde van haar aanschafprijs waard is
- (b) Een machine werd gekocht voor 10000 euro en heeft een afschrijvingspercentage van 30% . Hoeveel is de machine nog waard na 3 jaar?

3 grafiek exponentiële functies

3.1 basisgrafieken

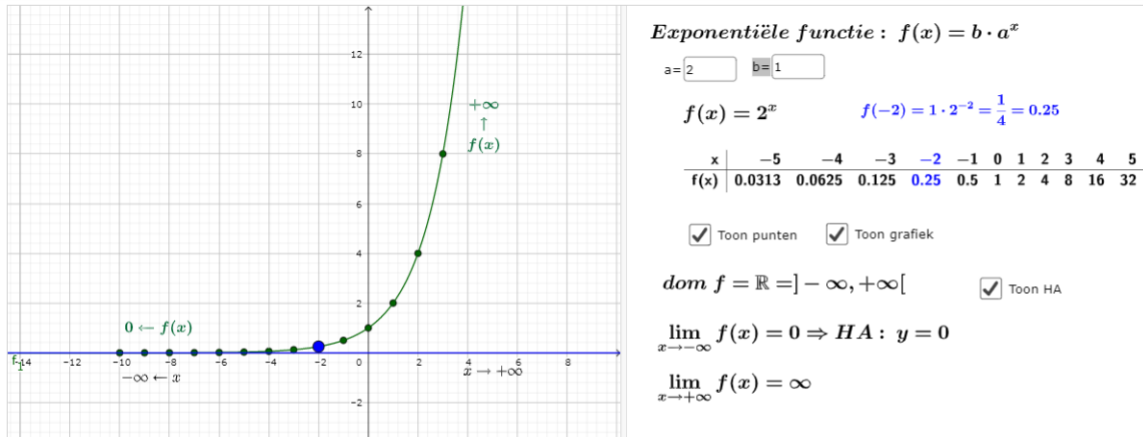


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/Rb6qHp3z>

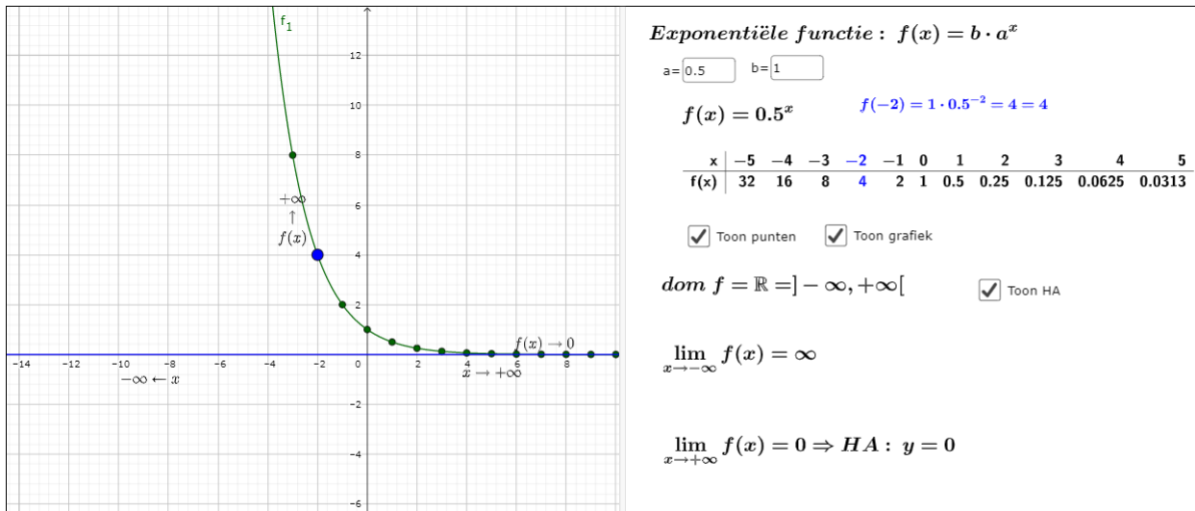


Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/Rb6qHp3z>

3.2 in de praktijk

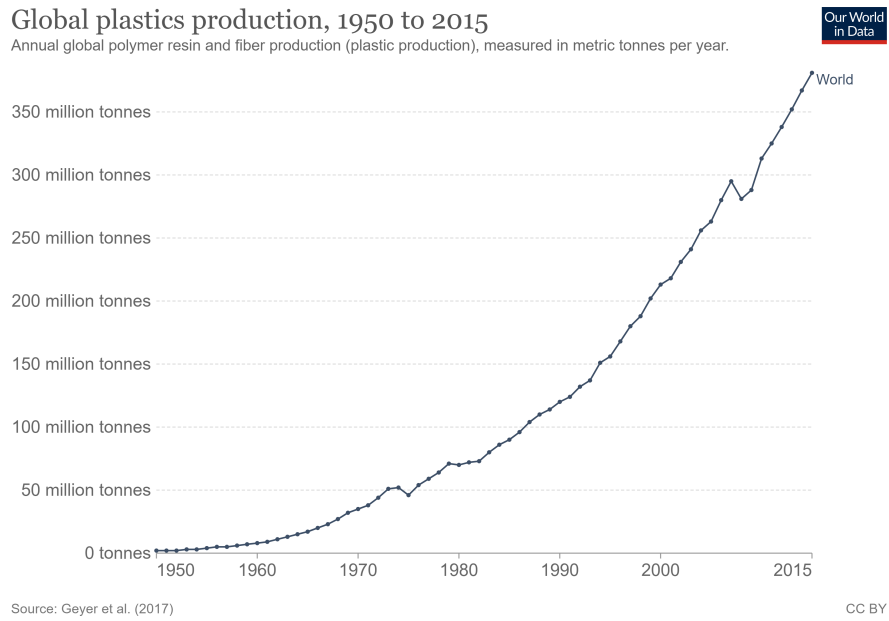
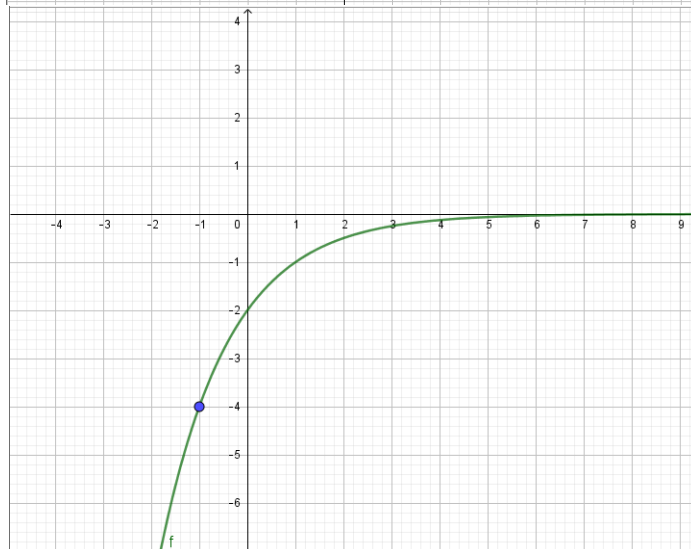
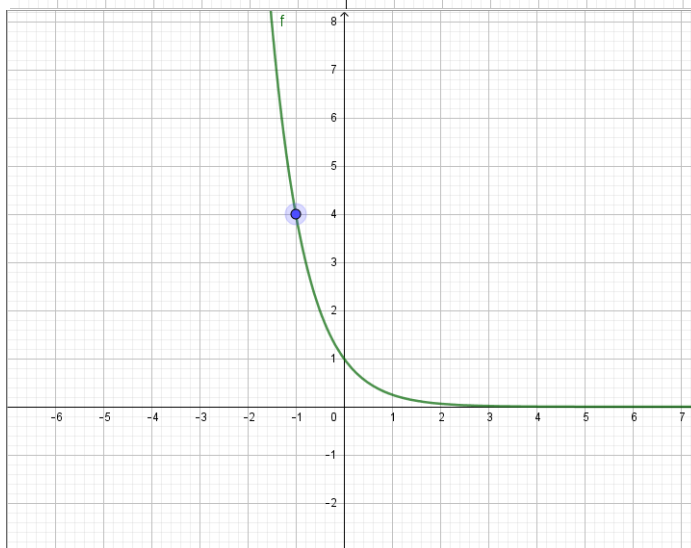
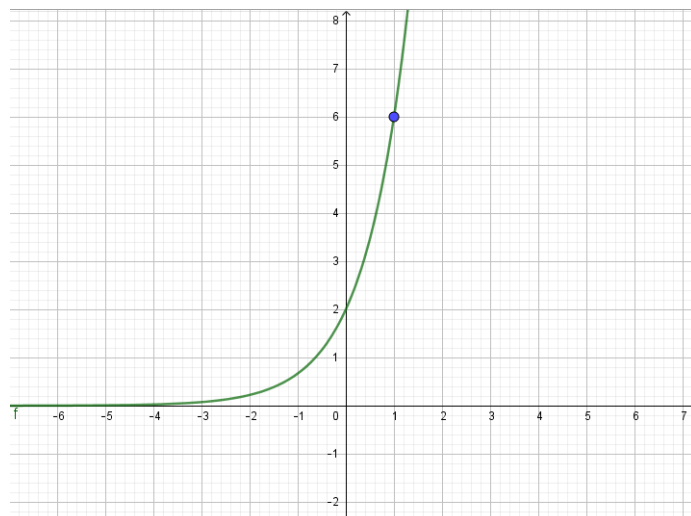


Figure 11: <https://ourworldindata.org/plastic-pollution>

Bij benadering $f(x) = 4.54 \cdot 1.0807^x$

3.3 oefeningen



4 logaritmen

4.1 begripsvorming

Definitie

$$2^3 = 8$$

3 : exponent
2 : grondtal 8 : uitkomst

Gegeven : grondtal en uitkomst
Gevraagd : exponent

Voorbeeld :
grondtal : 4 uitkomst : 64 gevraagd : exponent

$$4^y = 64 \xrightarrow{\text{nieuwe notatie}} y = \log_4 64 \Rightarrow \log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \quad a > 0, a \neq 1, x > 0$$

$\log_2 8 = 3$ want $2^3 = 8$
 $\log_4 1 = 0$ want $4^0 = 1$
 $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$ want $(\sqrt{2})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$
 $\log_3(-9) = /$ want $3^x > 0$

Speciale notaties:
 $\log_{10} 100 \xrightarrow[\text{wordt niet getoetst}]{\text{grondtal 10}} \log 100 = 2$ want $10^2 = 100$
 $\log_e \sqrt{e} \xrightarrow[\text{notatie}]{\text{nieuwe notatie}} \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$ want $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF>

Rekenregels

Logaritme van een product :

$$\log_2 32 = \log_2(4 \cdot 8) \quad \log_2 4 \quad \log_2 8$$

$$\parallel \quad \parallel \quad \parallel \Rightarrow \log_2(4 \cdot 8) = \log_2(4) + \log_2(8) \quad \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$5 = 2 + 3$$

Logaritme van een quotiënt :

$$\log_3 27 = \log_3\left(\frac{81}{3}\right) \quad \log_3 81 \quad \log_3 3 \Rightarrow \log_3\left(\frac{81}{3}\right) = \log_3 81 - \log_3 3 \quad \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$$

$$3 = 4 - 1$$

Logaritme van een macht :

$$\log_4 64 = \log_4(4^3) \quad \log_4 4 \Rightarrow \log_4(4^3) = 3 \cdot \log_4 4 \quad \log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$3 = 3 \cdot 1$$

Verandering van grondtal :

$$3^x = 7$$

✓ def \ (los vgl op)

$$x = \log_3 7 \quad \log(3^x) = \log 7$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \log 3 = \log 7 \quad \Rightarrow \log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log 7}{\log 3}$$

Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF>

4.2 Toepassingen

4.2.1 schaal van Richter

$$\Delta M = \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

4.2.2 geluid

$$\Delta L = 10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

4.3 oefeningen

1. Bereken zonder ZRM

- (a) $\log_3 9$
- (b) $\log_2 1$
- (c) $\log_3 243$
- (d) $\log 0.01$
- (e) $\log_5 5^7$
- (f) $\log_3 - 8$
- (g) $\log 10^{\sqrt{7}}$
- (h) $2^{\log_2 7}$

2. Bereken zonder ZRM

- (a) $\log_{16} 8$
- (b) $\log_{\sqrt{8}} 64$
- (c) $\log_4 \sqrt[5]{2}$
- (d) $\log_{3\sqrt{3}} \log 27$

3. Er is gegeven dat $\log 2 \approx 0,30$ en $\log 3 \approx 0,48$ Bereken dan

- (a) $\log 6$
- (b) $\log 12$
- (c) $\log 20$
- (d) $\log 0,2$
- (e) $\log 0,5$
- (f) $\log 30$
- (g) $\log 0,16$

4. Bereken met ZRM

- (a) $\log_{50} 15$
- (b) $\log_{0,6} 6$

5. De R waarde van het coronavirus bedroeg op een bepaald moment 1,23 per dag. Bepaal de tijd die het virus dan nodig had om in tijd het aantal besmette mensen te verdubbelen.
6. De luchtdruk in mijn tot 4 bar opgepompte fietsbanden vermindert met 5% per week. Na hoeveel dagen moet ik opnieuw de banden oppompen als ik nooit minder dan 3 bar wil hebben?
7. De bevolking van een streek vermindert exponentieel met 8% per jaar. Na hoeveel jaar zal de bevolking gehalveerd zijn?
8. Bij een kernramp is een hoeveelheid Jodium 131 vrijgekomen. De radioactieve neerslag heeft een in de buurt gelegen weide besmet. Metingen wijzen uit dat de toegestane hoeveelheid becquerel 10 maal overschreden is. Hoeveel dagen moet men het vee uit de weide verwijderd houden, als je weet dat de halveringstijd van Jodium 131 8 dagen is.
9. De jeugdraad van Hasselt heeft beslist dat op fuiven de geluidssterkte moet teruggebracht worden van 100 dB naar 96 dB. Wat is het gevolg hier voor de geluidsintensiteit?
10. De kracht waarmee de geluidsgolven van jouw GSM jouw oren bereiken is met oortjes 3 keer sterker dan zonder oortjes. Bereken het verschil in dB.

11. aardbevingen

Bijgewerkt: Sun, 30 Aug 13:41 UTC (GMT)

Tijd	Mag. / Diepte	Locatie	KAART	Bron
Sun, 30 Aug 2020 (69 aardbevingen)				
Sun, 30 Aug 13:37 UTC	M 3.7 / 34.1 km - [info]	New Zealand Ik pragtfulde Het	 [KAART]	GEONET (NZ)
Sun, 30 Aug 13:29 UTC	M 4.1 / 24.7 km - [info]	New Zealand Ik pragtfulde Het	 [KAART]	GEONET (NZ)

Bereken de verhouding in kracht tussen deze aardbevingen.

12. Lees eerst onderstaande paragraaf uit een artikel van De Morgen:

Uit berekeningen van Wenseleers blijkt alvast dat infecties met BA.4 en BA.5 per dag zo'n 12 procent sneller aangroeien dan besmettingen door de vorige variant, BA.2. Dat zou betekenen dat de variant binnen de vijf dagen bijna dubbel zoveel mensen zou besmetten. "Dat is een aanzienlijk groeivoordeel en vergelijkbaar met het voordeel dat de Indiase deltavariant had ten opzichte van de Britse alfavariant", zegt Wenseleers.

- (a) Waarom is hier sprake van exponentiële groei?
- (b) Bereken exact hoe lang het zal duren vooraleer een verdubbeling zal zijn?

5 logaritmische functies

5.1 begripsvorming

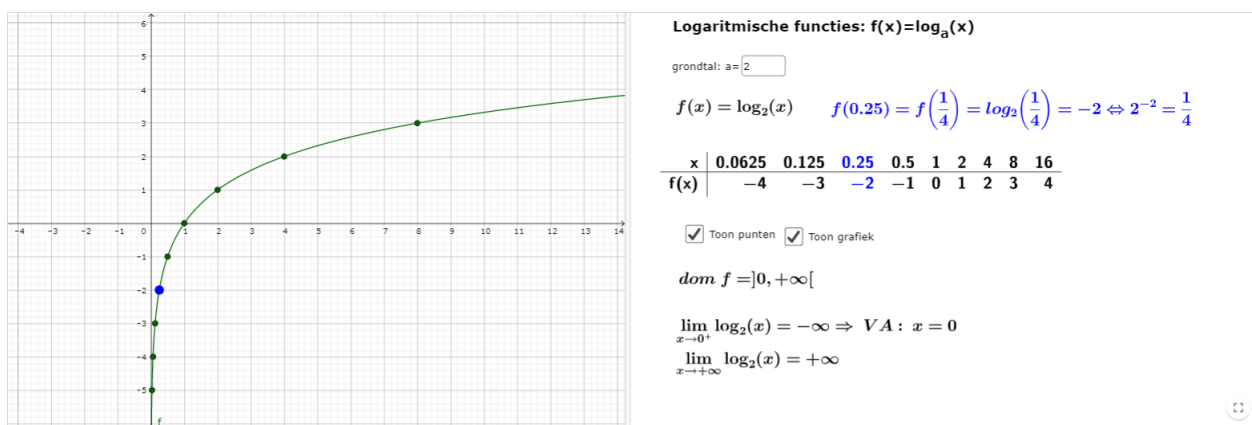


Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/ReNNrmut>

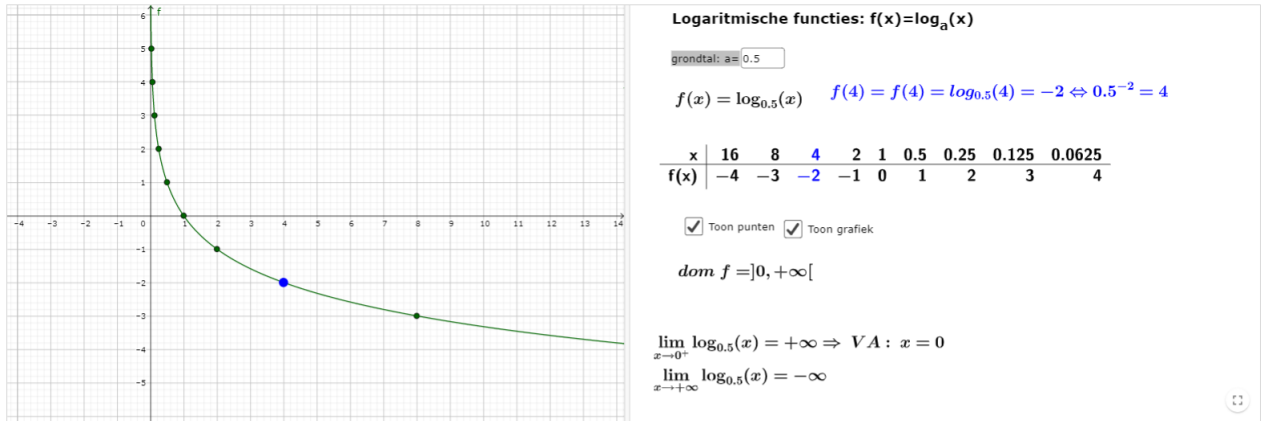


Figure 15: <https://www.geogebra.org/m/ReNNrmut>

5.2 oefeningen

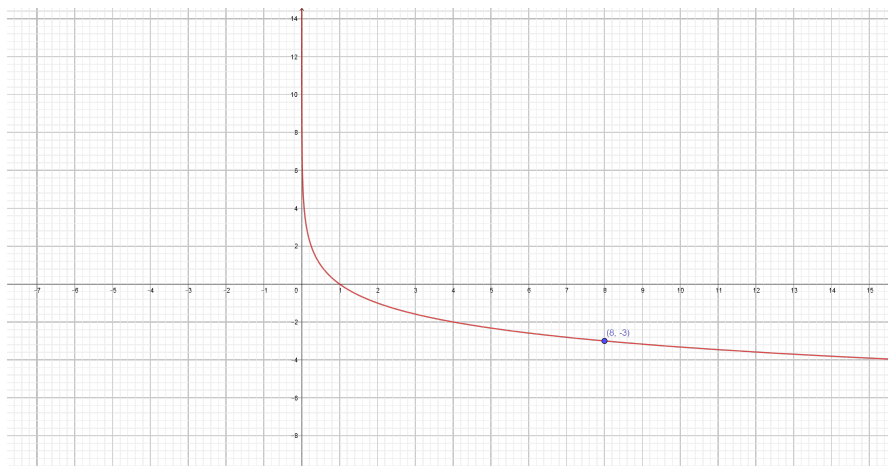
- Om de hoogte van nieuw te bouwen windmolens te bepalen, is het belangrijk om te weten wat de windsnelheid (W) op een bepaalde hoogte (h) is. Het verband tussen W en h wordt gegeven door

$$W = 5,76m \log\left(\frac{h}{r}\right)$$

De parameter m is de windsnelheid op een hoogte van 10 m en de parameter r wordt bepaald door de ruwheid van het terrein

- vergelijk de windsnelheid op een hoogte van 100 m op zee en op het land als je weet dat $r_{land} = 0.02$ en $r_{zee} = 0.0005$ en dat $m = 0.48$
- Bepaal de toename in windsnelheid als men op het land een windturbine met een willekeurige hoogte in hoogte zou verdubbelen. (zelfde waarden voor m en r uit vorige deelvraag).
- Op een bepaalde plaats op het land ($m = 0.55$ en $r = 0.015$, staat een windmolen met een hoogte van 90m. Op welke hoogte op zee heeft men dezelfde windsnelheid? ($m = 0.42$ en $r = 0.0006$)
- Bepaal het verband tussen h_l en h_z (zelfde waarden voor m en r uit vorige deelvraag) (A. $h_l = 4,33h_z^{0,76}$)

- Bepaal het voorschrift voor onderstaande grafiek



6 verband grafieken exponentiële functies en logaritmische functies met hetzelfde grondtal

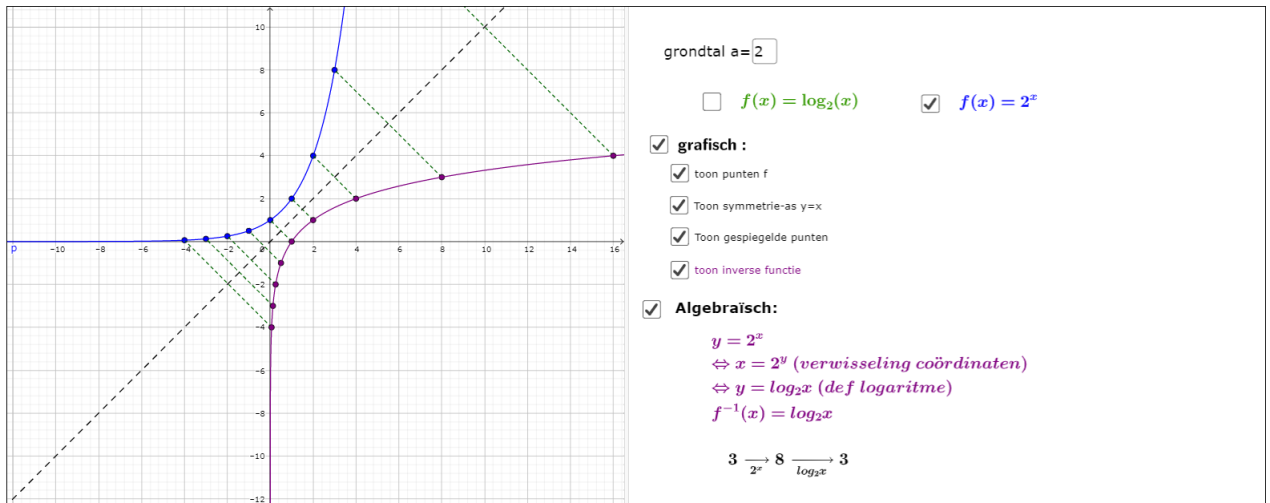
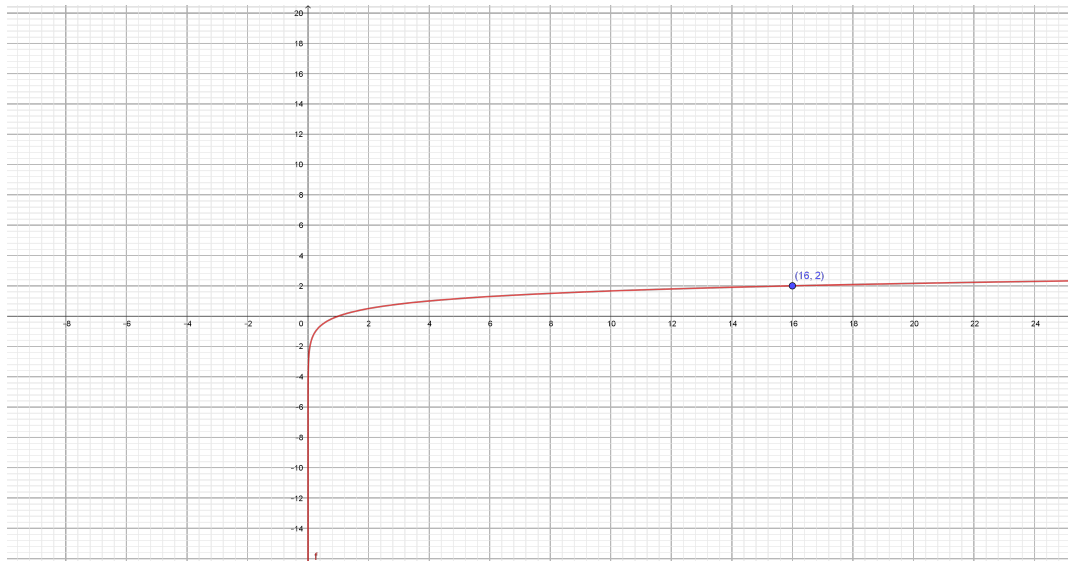


Figure 16: <https://www.geogebra.org/m/YYevVAPy>

1. Gegeven de grafiek van een logaritmische functie



- (a) Bepaal het voorschrift
- (b) Teken de grafiek van de inverse functie
- (c) Bepaal het voorschrift van deze inverse functie

7 het getal e

7.1 herhaling begrip afgeleide

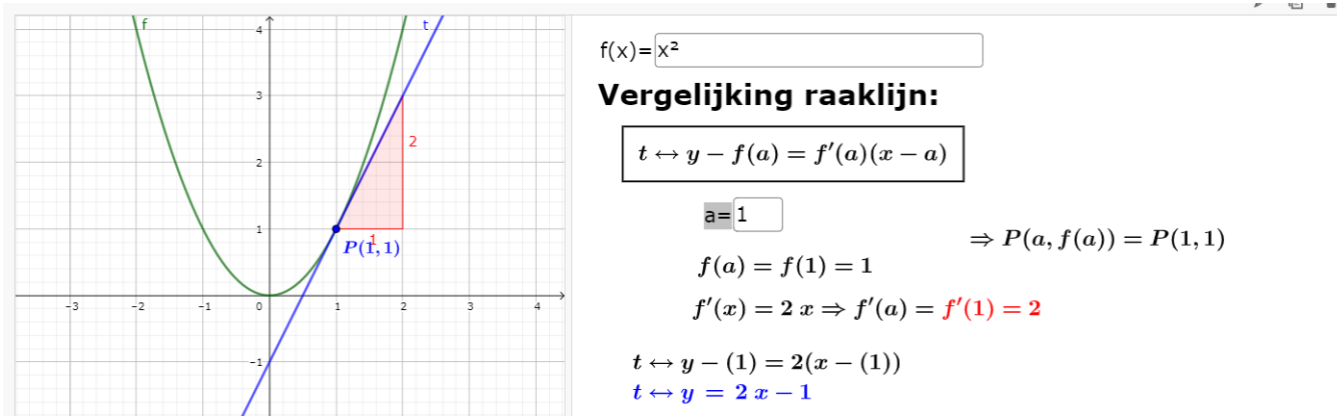


Figure 17: <https://www.geogebra.org/m/EscjM2Rh>

7.2 grafische betekenis getal e

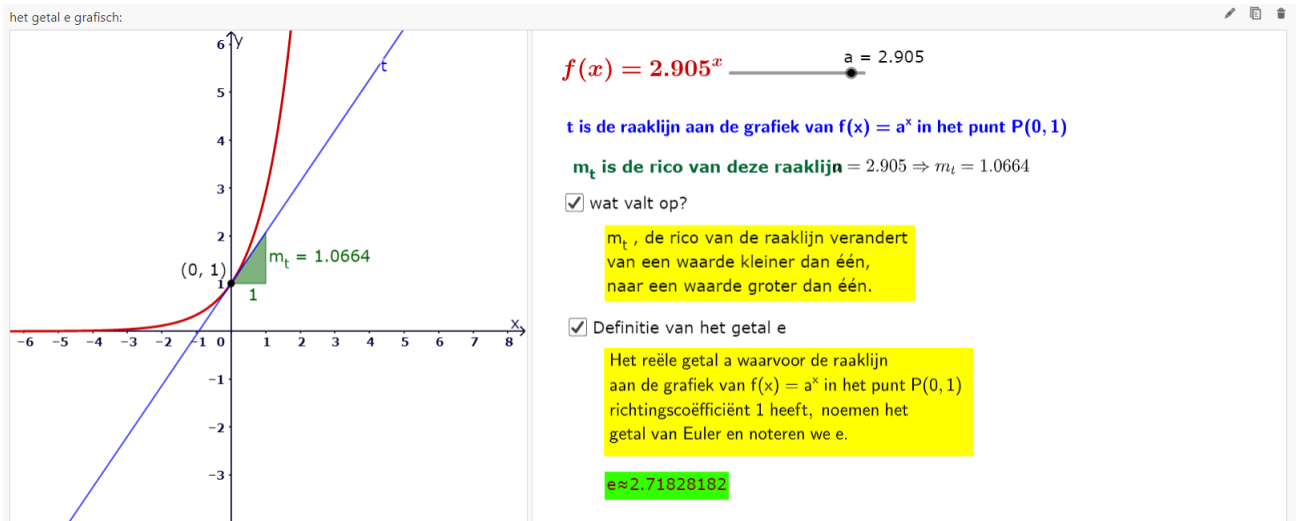


Figure 18: <https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW>

7.3 economische betekenis getal e

Continue intrest:

1 euro op een spaarboekje zetten met een rente van geeft op het einde van het jaar:

100% per jaar:

$$1 \cdot \left(1 + \frac{100}{100}\right)^1 = 2 \text{ euro}$$

$\frac{100}{2} = 50\%$ per half jaar

$$1 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \text{ euro}$$

$\frac{100}{4} = 25\%$ per kwartaal

$$1 \cdot \left(1 + \frac{25}{100}\right)^4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,44 \text{ euro}$$

$\frac{100}{52} \%$ per week

$$\left(1 + \frac{1}{52}\right)^{52} = 2,69 \text{ euro}$$

$\frac{100}{365 \cdot 24} \%$ per uur

$$\left(1 + \frac{1}{365 \cdot 24}\right)^{365 \cdot 24} = 2,7181 \text{ euro}$$

1 euro uitgezet aan continue intrest zal op het einde van het jaar

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182... \text{ euro opbrengen}$$

Figure 19: <https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW>

7.4 logaritme met het grondtal e

$$vb: \log_e(2) = \ln 2 = 0,69 \iff e^{0,69} = 2$$

$$vb: \log_e(3) = \ln 3 = 1,09 \iff e^{1,09} = 3$$

7.5 rekenregels

Rekenregels exponenten (op voorwaarde dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn). m en n zijn gehele getallen.

1. $e^m \cdot e^n = e^{m+n}$
2. $(e^m)^n = e^{mn}$
3. $\frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$
4. $e^{-m} = \frac{1}{e^m}$
5. $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$
6. $e^0 = 1$
7. $e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m} = (\sqrt[n]{e})^m$

Rekenregels logaritmen (op voorwaarde dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn)

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3. $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$
4. $\ln(e^x) = x$
5. $e^{\ln(x)} = x$
6. $\ln(e) = 1$
7. $\ln(1) = 0$

Figure 20: <https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm>

7.6 exponentiële en logarimische functies met grondtal e

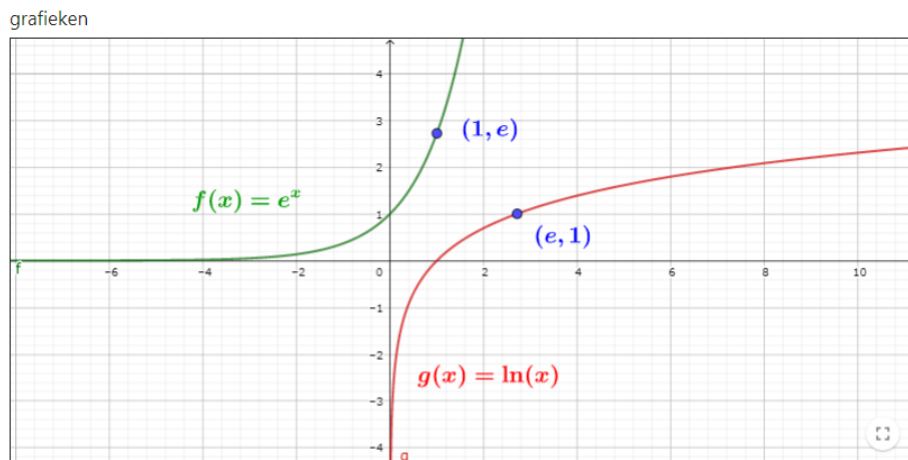


Figure 21: <https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm>

7.7 oefeningen

- Vereenvoudig
 - $e^{\ln 5}$
 - $e^{2\ln(3)} + \ln(e^2)$
 - $e^{3\ln 2}$
 - $\ln\sqrt{e} + e^{\frac{1}{2}\ln(e^2)}$
- Als $f(x) = \ln(\ln(x))$, wat is dan $f(\sqrt{e^e})$?
- Ga na dat de volgende gelijkheden juist zijn
 - $\ln x - 2 = \ln\left(\frac{x}{e^2}\right)$
 - $3 + 2\ln x = \ln(e^3 x^2)$
- Hoeveel onthou je nog van de leerstof wiskunde, t maanden nadat je gestudeerd hebt? Wetenschappers hebben hiervoor volgend model opgesteld: $f(t) = 75 - 6\ln(t + 1)$, $0 \leq t \leq 12$ met t het aantal maanden na het studeren
 - Hoeveel procent onthou je nadat je gestudeerd hebt
 - en na 3 maanden?
- De opbrengst (in miljard dollar) van de e-commerce in Amerika kan gemodelleerd worden met de volgende functie $f(t) = -549 + 236,7\ln(t)$ met $12 \leq t \leq 17$ met $t = 12$ staat voor het jaar 2002. In welk jaar bereikt de verkoop 108 miljard dollar?
- In een dorp van 8400 inwoners kan de verspreiding van het coronavirus gemodelleerd worden door $N(t) = \frac{84}{1 + 2799e^{-t}}$ met t de tijd in dagen en $N(t)$ het aantal inwoners per 100
 - Bereken $N(0)$ en geef hiervoor een interpretatie.
 - Hoeveel mensen zullen na lange tijd besmet geraken?
 - Na hoeveel tijd zal de helft van het aantal inwoners besmet zijn?

8 afgeleide exponentiële en logaritmische functies

8.1 rekenregels

$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$(e^{\square})' = e^{\square} \cdot \square'$
$f(x) = a^x \ (a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$	$f'(x) = a^x \ln a$	$(a^{\square})' = a^{\square} \ln a \cdot \square'$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(\ln \square)' = \frac{1}{\square} \cdot \square'$
$f(x) = {}^a \log x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$({}^a \log \square)' = \frac{1}{\square \ln a} \cdot \square'$

Figure 22: <https://www.geogebra.org/m/rkbXbnRv>

8.2 oefeningen

Bereken de afgeleide van de volgende functies:

1. $f(x) = e^{3x}$
2. $f(x) = 2^x$
3. $f(x) = \log_3(x)$
4. $f(x) = \ln(4x)$
5. $f(x) = \log_2(x^3)$
6. $f(x) = e^{x^2+4x+5}$

8.3 verloop en grafiek van exponentiële en logaritmische functies

We bekijken maar één verloop en grafiek, namelijk deze van $f(x) = e^{-x^2}$

9 groeimodellen

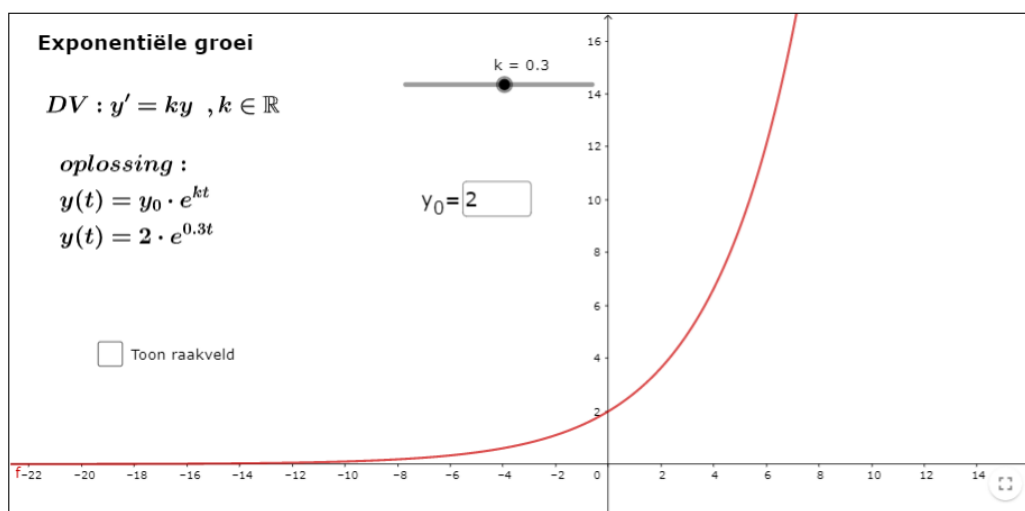


Figure 23: <https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ> <https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ>

Oefeningen

1. het verval van het radioactieve element Radium A verloopt volgens de vergelijking

$$m'(t) = -0.277 \cdot m(t)$$

Daarbij wordt t in minuten en $m(t)$ in mg gemeten. Stel dat voor $t=0$ de massa m_0 bedraagt

- (a) Bereken $m(t)$
 - (b) Bereken de halveringstijd
 - (c) op welk tijdstip is nog 10% van de beginmassa aanwezig
2. De wereldbevolking groeit ongeveer aan volgens de vergelijking

$$N'(t) = 0,019 \cdot N(t) \tag{1}$$

Hierbij wordt de tijd in jaren gerekend vanaf 1986 en wordt $N(t)$ in miljarden uitgedrukt. In 1986 bedroeg de wereldbevolking 5,1 miljard inwoners.

- (a) Schrijf $N(t)$ als functie van t
- (b) Hoeveel mensen zullen er (volgens dit model) zijn in 2025
- (c) Hoelang duurt het vooraleer de wereldbevolking verdubbeld is?

10 exponentiële en logaritmische vergelijkingen

10.1 voorbeelden

Voorbeeld 1 :
 $27^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-4}$
 $\Leftrightarrow (3^3)^x = (3^{-1})^{5x-4}$
 $\Leftrightarrow 3^{3x} = 3^{-5x+4}$
 $\Leftrightarrow 3x = -5x + 4$
 $\Leftrightarrow 8x = 4$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Figure 24: <https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf>

Voorbeeld 1 : $3^{4x+5} = 5^{x-1}$
 $\Leftrightarrow \log 3^{4x+5} = \log 5^{x-1}$
 $\Leftrightarrow (4x+5) \log 3 = (x-1) \log 5$
 $\Leftrightarrow (4 \log 3)x + 5 \log 3 = (\log 5)x - \log 5$
 $\Leftrightarrow (4 \log 3 - \log 5)x = -\log 5 - 5 \log 3$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-\log 5 - 5 \log 3}{4 \log 3 - \log 5}$

Figure 25: <https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf>

<p>Voorbeeld 1 : $2 \log_4 x = 5$</p> $\Leftrightarrow \log_4 x = \frac{5}{2}$ $\Leftrightarrow x = 4^{\frac{5}{2}}$ $\Leftrightarrow x = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32$	<p>Voorbeeld 3 : $\log_3(2x) - \log_3(x - 3) = 1$</p> $\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{2x}{x-3}\right) = 1$ $\Leftrightarrow \frac{2x}{x-3} = 3^1$ $\Leftrightarrow 2x = 3(x-3)$ $\Leftrightarrow x = 9$
<p>Voorbeeld 2 : $20 \cdot \ln(0,2x) = 30$</p> $\Leftrightarrow \ln(0,2x) = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow 0,2x = e^{\frac{3}{2}}$ $\Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{0,2}$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; font-size: small;"> <p>Bij logaritmische vergelijkingen, moet je nog altijd controleren of de oplossing wel kan. Je kan immers een logaritme alleen nemen van een positief getal</p> </div>

Figure 26: <https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf>

11 Oefeningen

1. $5 + e^{x+1} = 20$
2. $4^{x+2} = 64$
3. $3^{x-1} = 81$
4. $-14 + 3e^x = 11$
5. $4^{x-3} = \frac{1}{16}$
6. $3^{2x^2+5x} = 27$