Hoofdstuk I: exponentiële en logaritmische functies

www.karelappeltans.be

September 10, 2020

1 lineaire versus exponentiële groei

1.1 begripsvorming

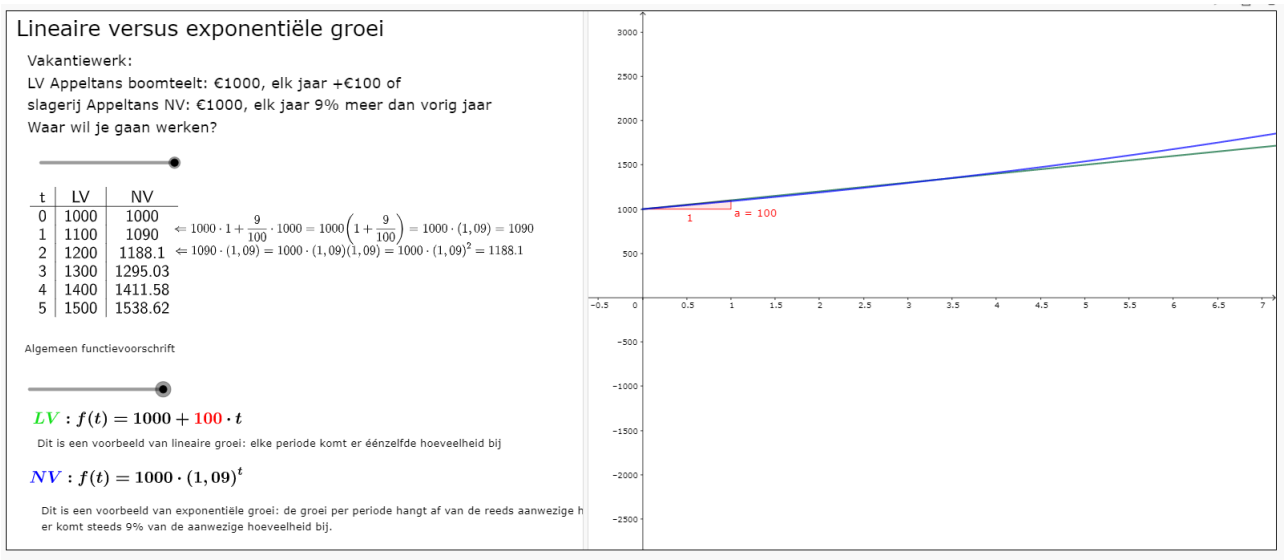


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/m3zxeue6



Figure 2: https://www.geogebra.org/m/m3zxeue6

1.2 oefeningen

1. Hoeveel brengt 1000 euro vakantiegeld op als ik dit geld 7 jaar laat staan op onderstaande rekeningen?

Laatste verificatie: vrijdag 28 augustus 2020

Aanbieder	Product	Basisrente	Getrouwheidspremie	Totaal	
aion	Aion Extended Geen minimum inleg	0,10%	0,90%	1,00%	Nu aanvragen
bpost bank	bpost bank Cocoon Spaarrekening Geen minimum inleg	0,40%	0,15%	0,55%	

2. Het coronavirus:



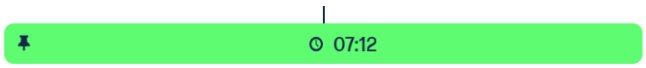
Aantal besmettingen stijgt "exponentieel" in Frankrijk

Het aantal coronabesmettingen dat dagelijks in Frankrijk wordt vastgesteld, stijgt "exponentieel". Daarvoor waarschuwen de Franse gezondheidsautoriteiten. Vandaag werden er meer dan 7.379 nieuwe besmettingen gemeld. Gisteren ging het nog om 6.111 besmettingen

(a) Bepaal de groeifactor en het groeipercentage van het coronavirus in Frankrijk

(b) Als dit groeipercentage elke dag hetzelfde blijft, hoeveel besmettingen zijn er dan vandaag?

3. Het coronavirus:



De dagelijkse coronacijfers

Het gemiddeld aantal nieuwe coronabesmettingen in ons land blijft afnemen. In de week van 20 tot 26 augustus werden **dagelijks 437 besmettingen** vastgesteld, dat zijn er vijftien procent minder dan in de week ervoor.

(a) Als dit groeipercentage elke week hetzelfde blijft, hoeveel besmettingen zijn er dan

i. 3 weken later

ii. 10 dagen later

(b) Bepaal het groeipercentage en de groeifactor per dag

4. gelijkwaardige rentevoeten.

(a) Bij welke (fictieve) bank wil jij jouw spaargeld zetten: Bank A geeft 12% per jaar en Bank B geeft 6% per half jaar.

(b) Bepaal de gelijkwaardige rentevoet voor bank B

5. Op Black Friday geeft winkel A 21% korting en in winkel B hoef je de BTW van 21% niet te betalen voor hetzelfde artikel. Welke winkel verkies je?

6. Afschrijving auto bij omnium-verzekering

Afschrijving bepaalt de waarde van je auto

Als je een omniumverzekering hebt, dan daalt je auto in waarde door de afschrijving (of waardevermindering) die wordt toegepast. Als je auto total loss is of je auto gestolen is, zal dat dus een invloed hebben op het bedrag van je schadevergoeding. Door de afschrijving krijg je meer geld voor een auto die maar 1 jaar oud is dan voor een die 5 jaar oud is.

Let op de afschrijving als je omniumverzekeringen vergelijkt

- **Gedurende welke periode wordt er geen afschrijving toegepast?**
  Hoe langer die periode, hoe beter. Soms zie je het aantal maanden vermeld staan in de naam van de autoverzekering, bijvoorbeeld 12 of 24M. Dat betekent dat je auto gedurende die tijd zijn volledige waarde behoudt.
- **Welk afschrijvingspercentage wordt toegepast?**
  Hoe lager dit percentage, hoe trager je auto waarde verliest. Bij de meeste verzekeraars wordt je auto 1% minder waard per maand. Dat percentage wordt toegepast na de periode waarin je auto zijn volledige waarde behoudt.

Heb je een goedkope omniumverzekering gevonden? Dan betekent dat vaak dat je auto maar gedurende een korte periode 100% van zijn waarde behoudt.

Afschrijving in de praktijk

Stel dat je een **omniumverzekering formule 24M met een afschrijvingspercentage van 1%** hebt genomen voor je auto van € 20 000. De eerste 2 jaar (24 maanden) word je dan volledig vergoed. Daarna wordt de aangenomen waarde berekend op basis van de ouderdom van de wagen:

   (a) Bepaal de waarde van deze auto na 30 maanden
   (b) Bepaal de waarde van deze auto na 5 jaar

7. In helder water vermindert de lichtintensiteit per meter met 60%. We nemen de lichtintensiteit aan de oppervlakte als eenheid.
   (a) Bereken de lichtintensiteit op 5 m diepte
   (b) Schrijf de lichtintensiteit als functie van de diepte
8. De bevolking van een land groeit exponentieel aan met 12% op 20 jaar
   (a) Wat is de groeifactor op 20 jaar, 10 jaar en op 1 jaar?
   (b) In 1990 is de bevolking 125000. Wat is de bevolking volgens dit model dit jaar?
   (c) Zoek het voorschrift van de functie die met de tijd (in jaren gerekend vanaf 1990) de bevolking laat overeenstemmen
9. In ideale laboratoriumomstandigheden verdubbelt de bacterie E. Colli zich elke 5 uur. Bij het begin van het kweekprogramma zijn er 160
   (a) Bepaal het aantal na 10 uur
   (b) Bepaal he aantal na 2 dagen
10. Ga op zoek naar een voorbeeld van exponentiële groei. Verzin er zelf een vraag bij.

2 n-de machtswortels en rationale exponenten

2.1 n-de machtswortels

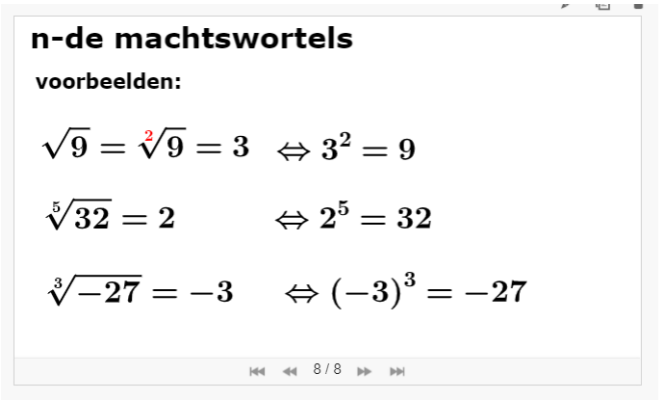


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/uramnnee

2.2 rationale exponenten

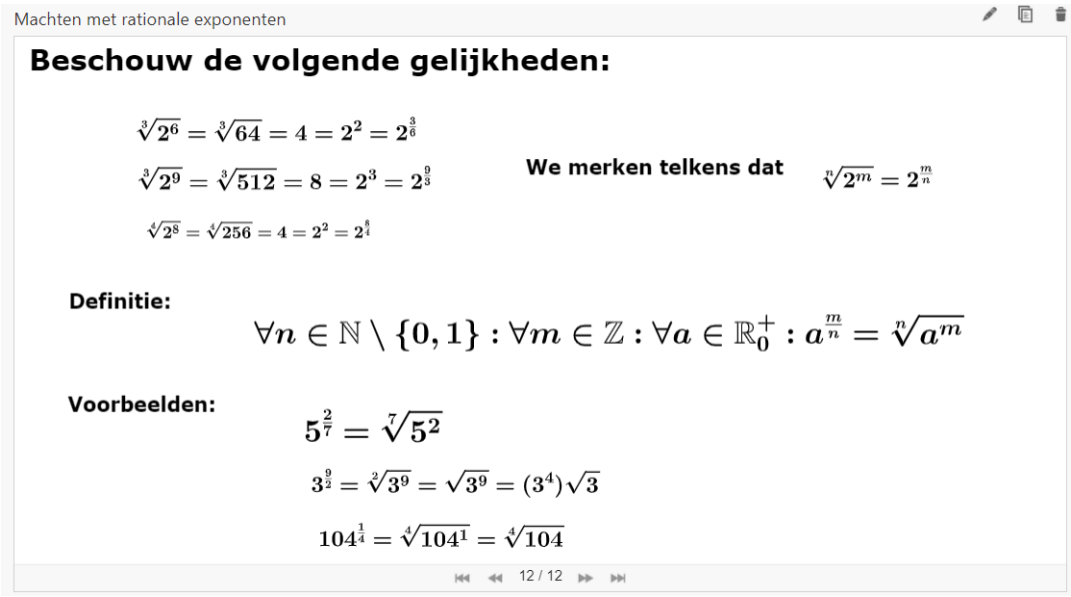


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/uramnnee

2.3 oefeningen

1. Toon aan dat de groeifactor per half jaar $\sqrt{2}$ is, als de groeifactor op jaarbasis 2 is
2. Vereenvoudig

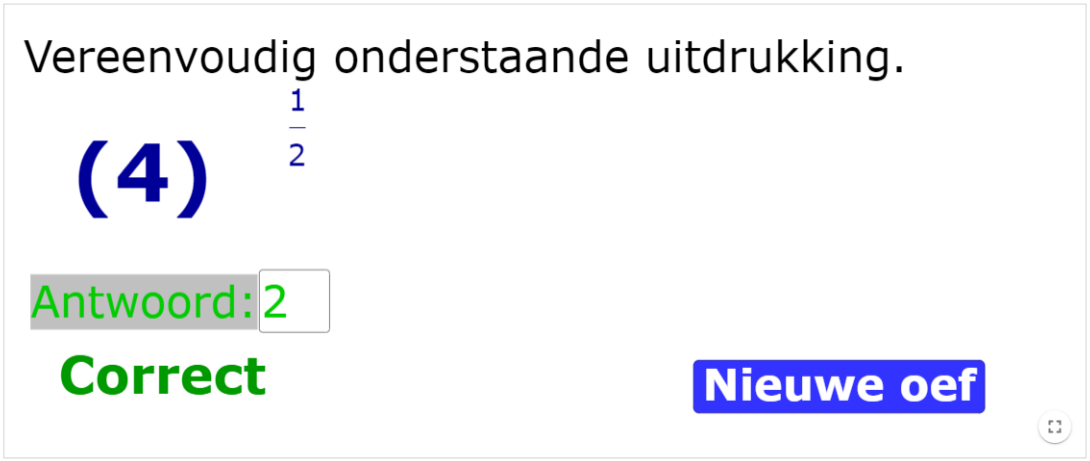


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/uramnnee

3. Bereken of vereenvoudig zonder rekenmachine
   (a) $\sqrt[5]{10^{-10}}$
   (b) $32^{-0.4}$
   (c) $9^{1,5}$
   (d) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$
   (e) $\sqrt[6]{343}$
   (f) $\sqrt[4]{9}$
   (g) $\sqrt[5]{160}$
   (h) $\sqrt[4]{162}$
4. Schrijf telkens als een macht van 2
   (a) $\frac{1}{4}$
   (b) $\sqrt[3]{16}$
   (c) $\frac{1}{\sqrt[6]{4}}$
   (d) $\sqrt{32}$
   (e) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$
5. Vereenvoudig. De letters stellen positieve getallen voor. In het resultaat mogen geen negatieve of gebroken rationale exponenten staan. In de noemer mogen geen wortelvormen staan.
   (a) $\sqrt[6]{81a^2}$
   (b) $\sqrt[3]{16x^4y^4}$
   (c) $\sqrt{\sqrt[3]{25a^4}}$
   (d) $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^5}{81c^2d^8}}$
   (e) $\left(ab^3c^{-\frac{7}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}\left(ab^{\frac{7}{2}}\right)^{-1}$
   (f) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

3 grafiek exponentiële functies

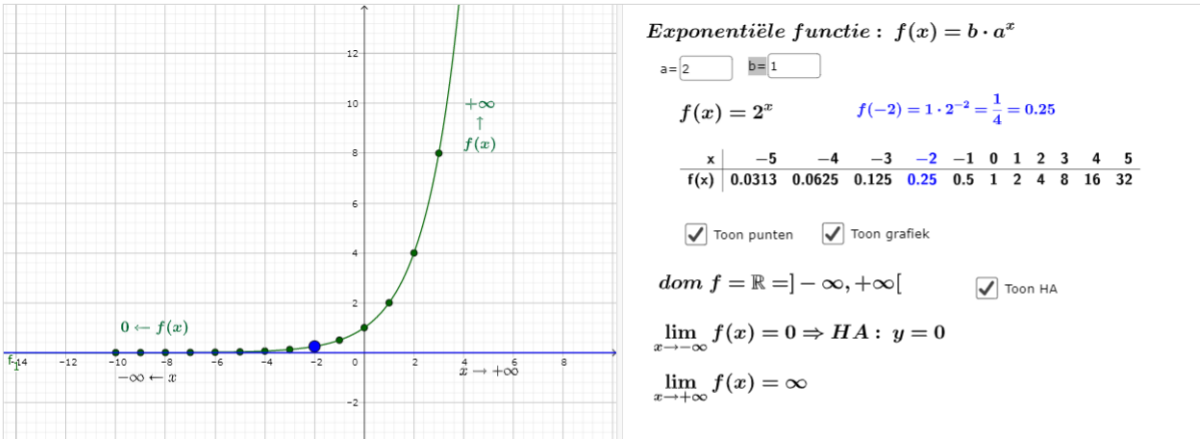


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/Rb6qHp3z

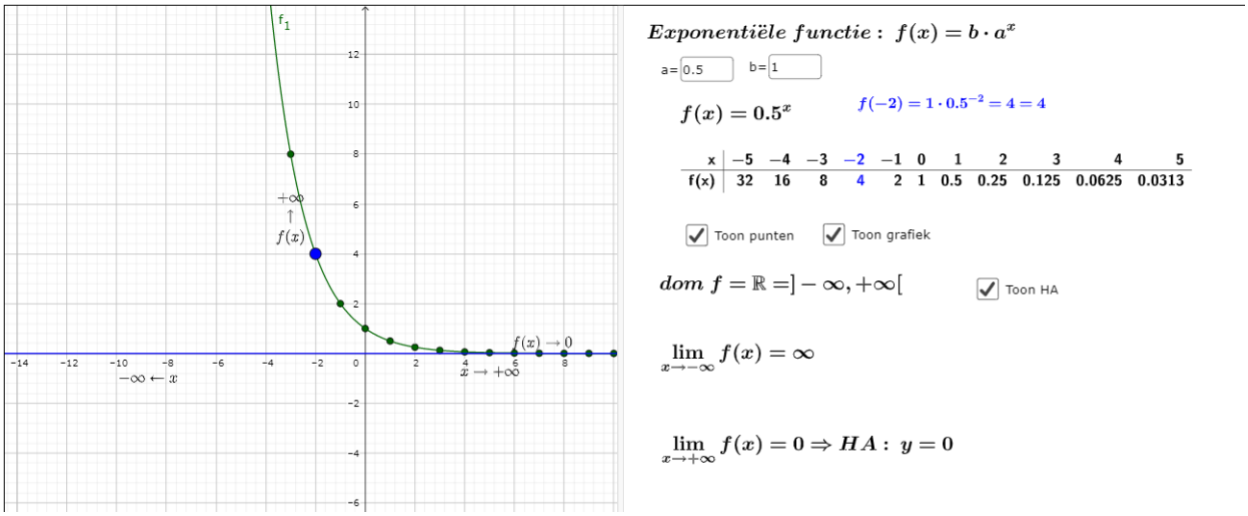


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/Rb6qHp3z

4 logaritmen

4.1 begripsvorming

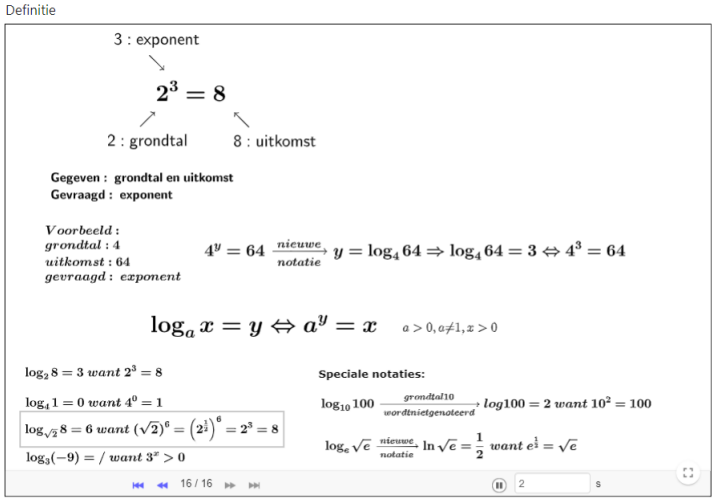


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF

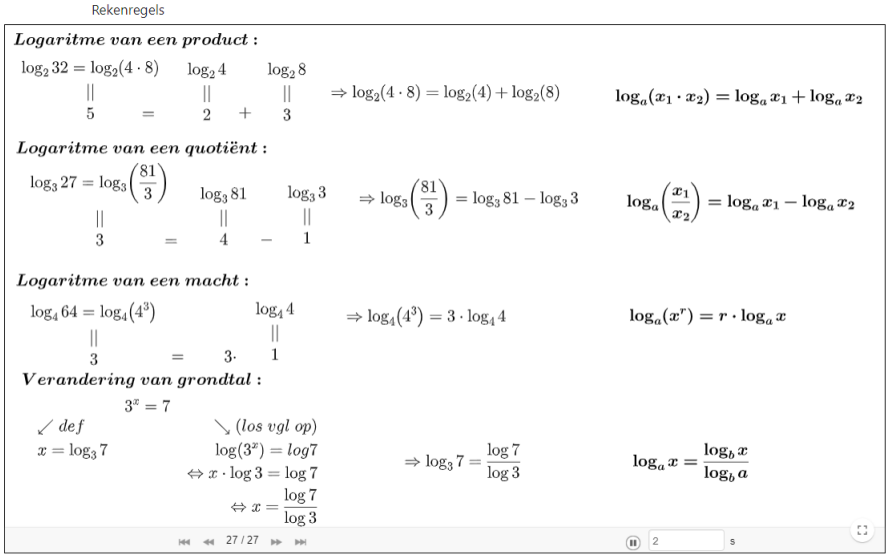


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF

4.2 oefeningen

1. Bereken zonder ZRM
   (a) $log_3 9$
   (b) $log_2 1$
   (c) $log_3 243$
   (d) $log 0.01$
   (e) $log_5 5^7$
   (f) $log_3 - 8$
   (g) $log 10^{\sqrt{7}}$
   (h) $2^{log_2 7}$

2. Er is gegeven dat $log2 \approx 0,30$ en $log3 \approx 0,48$ Bereken dan

   (a) $log20$
   (b) $log0,2$
   (c) $log0,5$
   (d) $log6$
   (e) $log12$
   (f) $log30$
   (g) $log0,16$

3. Bereken zonder ZRM

   (a) $log_{16}8$
   (b) $log_{\sqrt{8}}64$
   (c) $log_4 \sqrt[5]{2}$
   (d) $log_{3\sqrt{3}}log27$

4. Bereken met ZRM

   (a) $log_{50}15$
   (b) $log_{0,6}6$

5. De R waarde van het coronavirus bedroeg op een bepaald moment 1,23 per dag. Bepaal de tijd die het virus dan nodig had om in tijd het aantal besmette mensen te verdubbelen.

6. De jeugdraad van Hasselt heeft beslist dat op fuiven de geluidssterkte moet teruggebracht worden van 100 dB naar 96 dB. Wat is het gevolg hier voor de geluidsintensiteit?

7. De kracht waarmee de geluidsgolven van jouw GSM jouw oren bereiken is met oortjes 3 keer sterker dan zonder oortjes. Bereken het verschil in dB.

8. aardbevingen

   Bijgewerkt: Sun, 30 Aug 13:41 UTC (GMT)

Tijd	Mag. / Diepte	Locatie	KAART	Bron
Sun, 30 Aug 2020 (69 aardbevingen)				
Sun, 30 Aug 13:37 UTC	M 3.7 / 34.1 km - [info]	New Zealand *Ik pragtfulde Het*	[KAART]	GEONET (NZ)
Sun, 30 Aug 13:29 UTC	M 4.1 / 24.7 km - [info]	New Zealand *Ik pragtfulde Het*	[KAART]	GEONET (NZ)

   Bereken de verhouding in kracht tussen deze aardbevingen.

9. Bij een kernramp is een hoeveelheid Jodium 131 vrijgekomen. De radioactieve neerslag heeft een in de buurt gelegen weide besmet. Metingen wijzen uit dat de toegestane hoeveelheid becquerel 10 maal overschreden is. Hoeveel dagen moet men het vee uit de weide verwijderd houden, als je weet dat de halveringstijd van Jodium 131 8 dagen is.

5 logaritmische functies

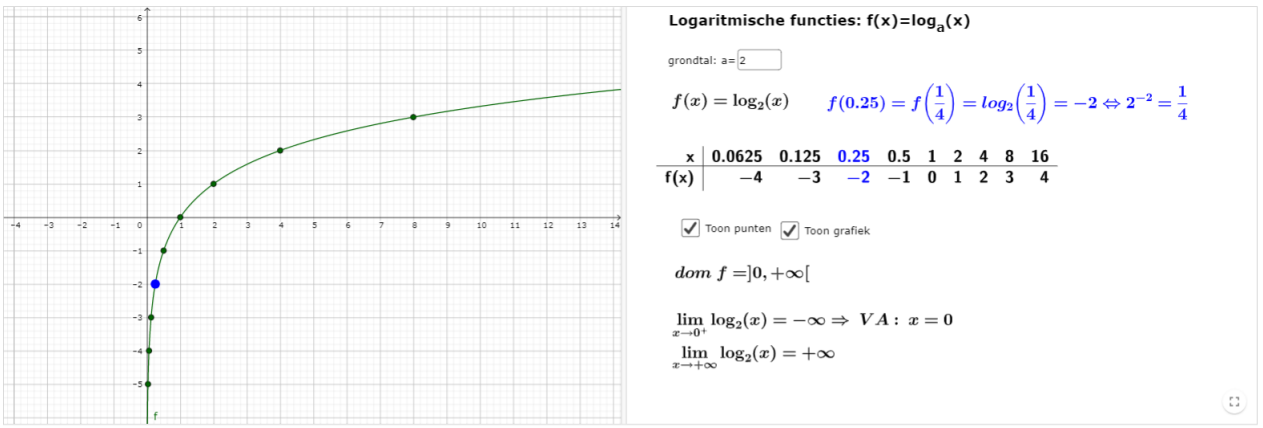


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/ReNNrmut

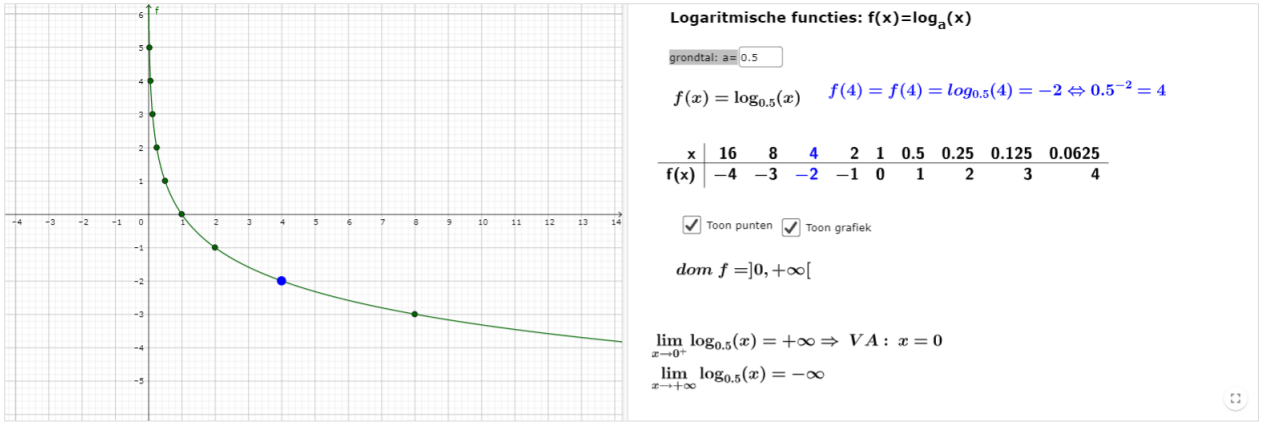


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/ReNNrmut

6 verband grafieken exponentiële functies en logaritmische functies met hetzelfde grondtal

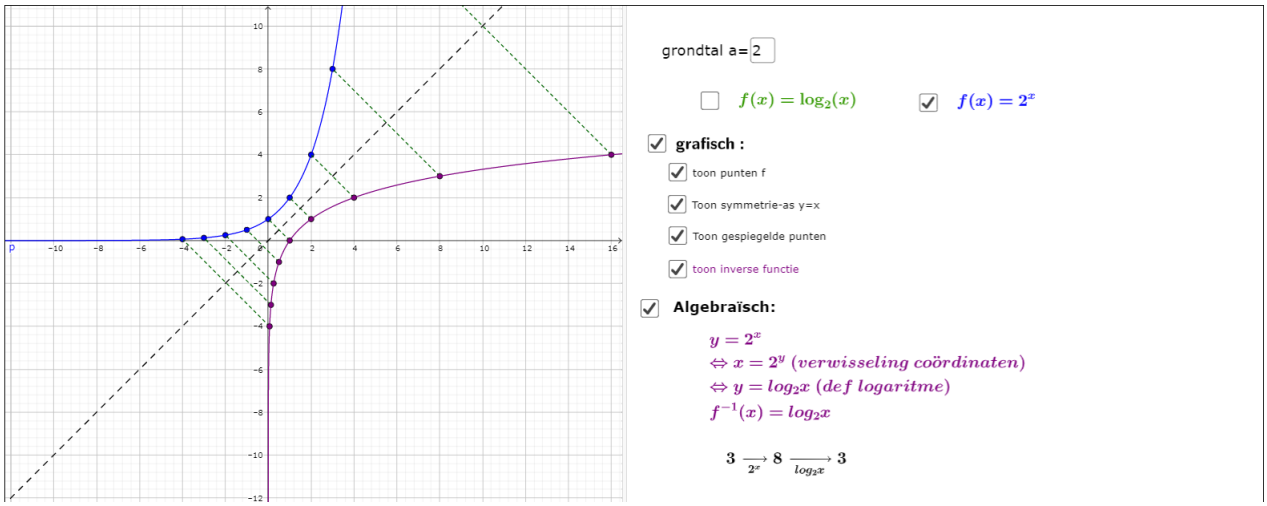


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/YYevVAPy

7 het getal e

7.1 herhaling begrip afgeleide

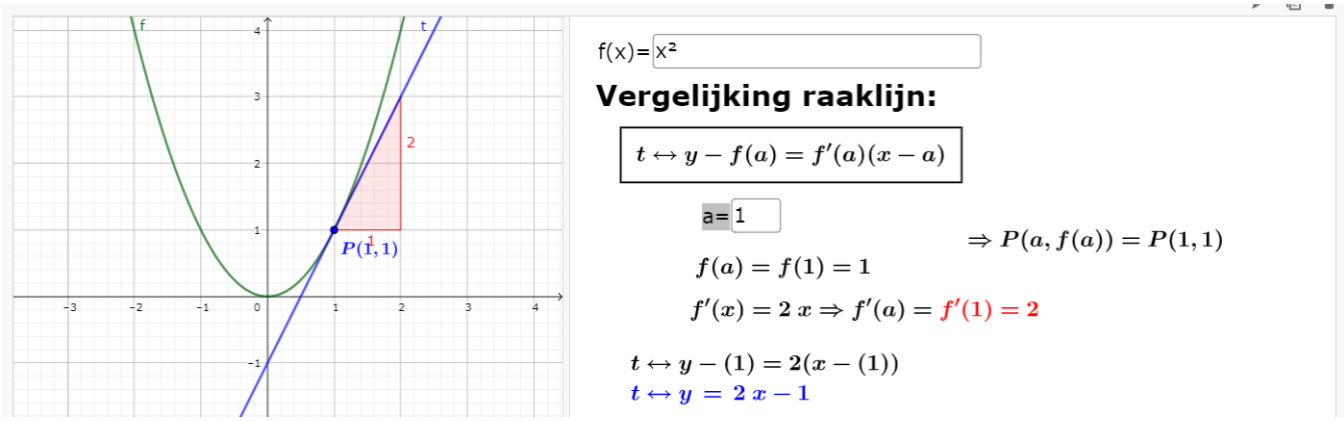


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/EscjM2Rh

7.2 grafische betekenis getal e

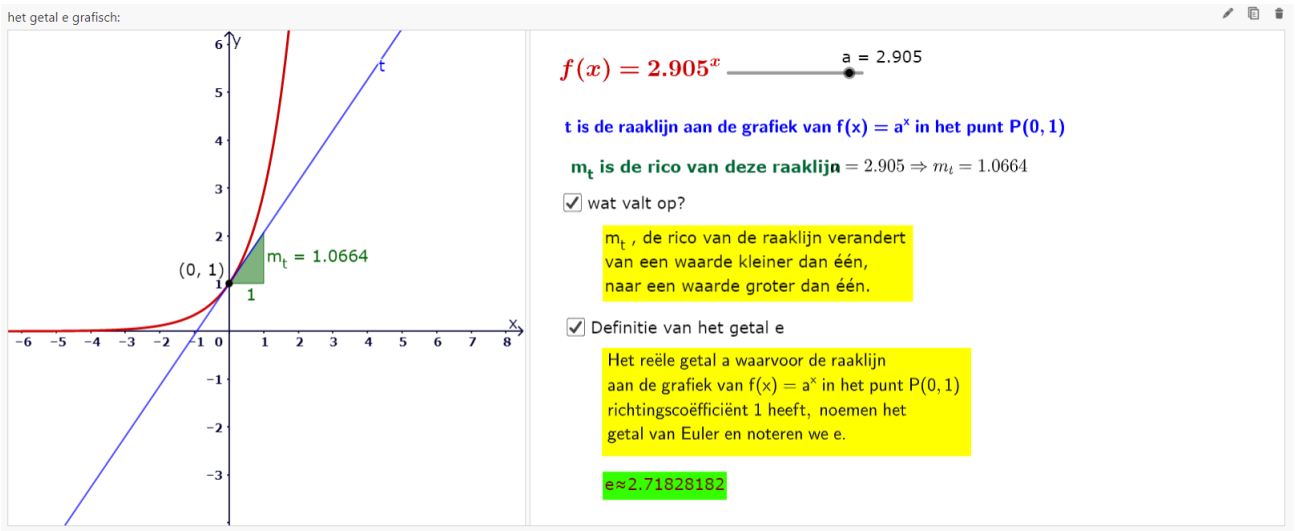


Figure 14: https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW

7.3 economische betekenis getal e

Continue intrest:

1 euro op een spaarboekje zetten met een rente van **geeft op het einde van het jaar:**

100% per jaar: $1 \cdot \left(1+\frac{100}{100}\right)^{1} = 2\ euro$

$\frac{100}{2} = 50\%$ per half jaar $1 \cdot \left(1+\frac{50}{100}\right)^{2} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} = 2,25\ euro$

$\frac{100}{4} = 25\%$ per kwartaal $1 \cdot \left(1+\frac{25}{100}\right)^{4} = \left(1+\frac{1}{4}\right)^{4} = 2,44\ euro$

$\frac{100}{52}\%$ per week $\left(1+\frac{1}{52}\right)^{52} = 2,69\ euro$

$\frac{100}{365 \cdot 24}\%$ per uur $\left(1+\frac{1}{365 \cdot 24}\right)^{365 \cdot 24} = 2,7181\ euro$

1 euro uitgezet aan continue intrest zal op het einde van het jaar

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 2.7182...\ euro\ opbrengen$$

Figure 15: https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW

7.4 rekenregels

Rekenregels exponenten (op voorwaarde dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn). m en n zijn gehele getallen.

1. $e^m \cdot e^n = e^{m+n}$
2. $(e^m)^n = e^{mn}$
3. $\frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$
4. $e^{-m} = \frac{1}{e^m}$
5. $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$
6. $e^0 = 1$
7. $e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m} = (\sqrt[n]{e})^m$

Rekenregels logaritmen (op voorwaarde dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn)

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3. $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$
4. $\ln(e^x) = x$
5. $e^{\ln(x)} = x$
6. $\ln(e) = 1$
7. $\ln(1) = 0$

Figure 16: https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm

1. Vereenvoudig
   (a) e^{ln5}
   (b) $e^{2ln(3)} + ln(e^2)$
   (c) e^{3ln2}
2. Als $f(x) = ln(ln(x)$, wat is dan $f(\sqrt{e}^e)$?
3. Ga na dat de volgende gelijkheden juist zijn
   (a) $lnx - 2 = ln\left(\frac{x}{e^2}\right)$
   (b) $3 + 2lnx = ln(e^3x^2)$

7.5 exponentiële en logarimische functies met grondtal e

grafieken

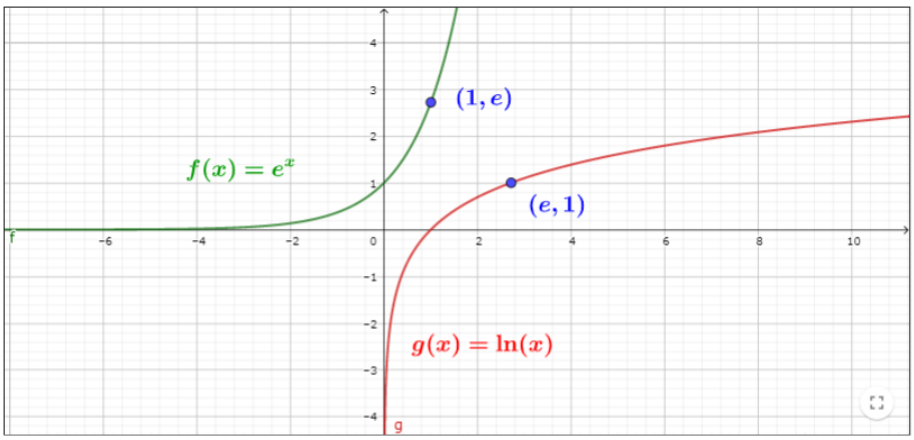


Figure 17: https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm

8 afgeleide exponentiële en logaritmische functies

8.1 rekenregels

$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$(e^{\square})' = e^{\square} \cdot \square'$
$f(x) = a^x \ \ (a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$	$f'(x) = a^x ln a$	$(a^{\square})' = a^{\square} ln a \cdot \square'$
$f(x) = lnx$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(ln\square)' = \frac{1}{\square} \cdot \square'$
$f(x) = {}^a\log x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$({}^a\log\square)' = \frac{1}{\square \ln a} \cdot \square'$

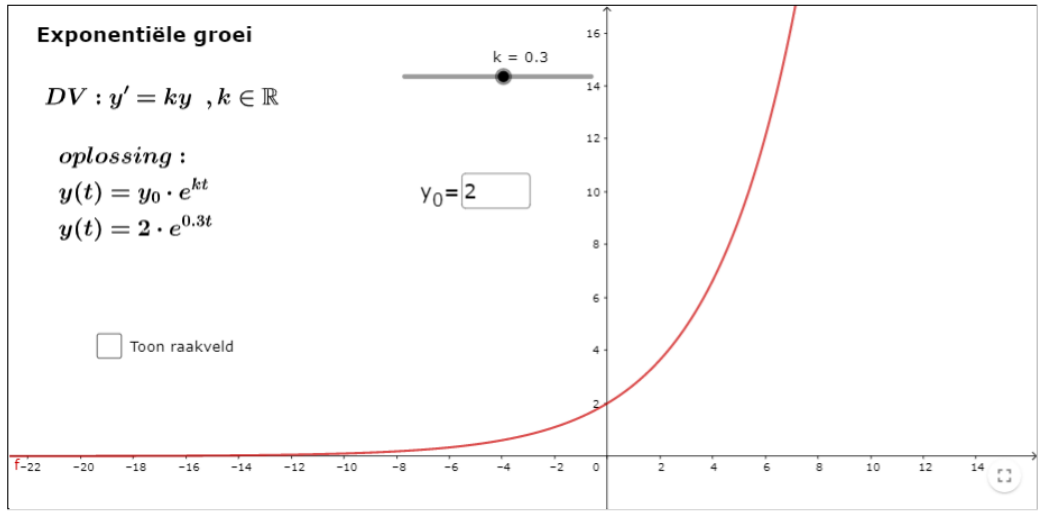
Figure 18: https://www.geogebra.org/m/rkbXbnRv

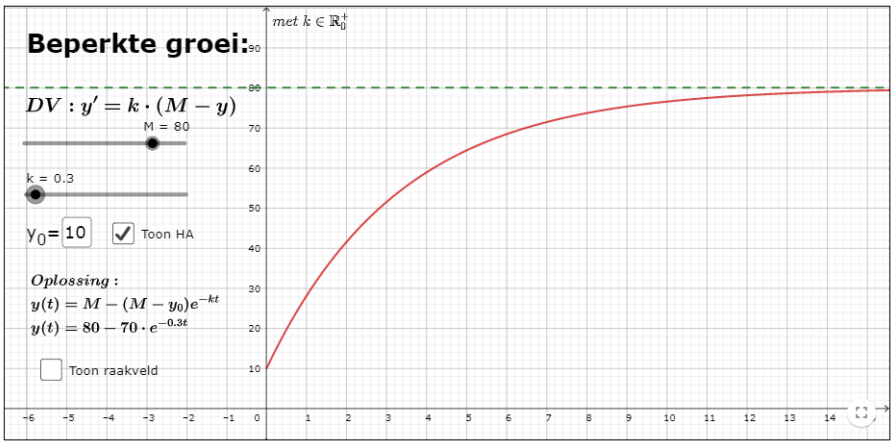
8.2 oefeningen

Bereken de afgeleide van de volgende functies:

1. $f(x) = e^{3x}$
2. $f(x) = 2^x$
3. $f(x) = log_3(x)$
4. $f(x) = ln(4x)$
5. $f(x) = log_2(x^3)$
6. $f(x) = e^{x^2+4x+5}$

9 groeimodellen





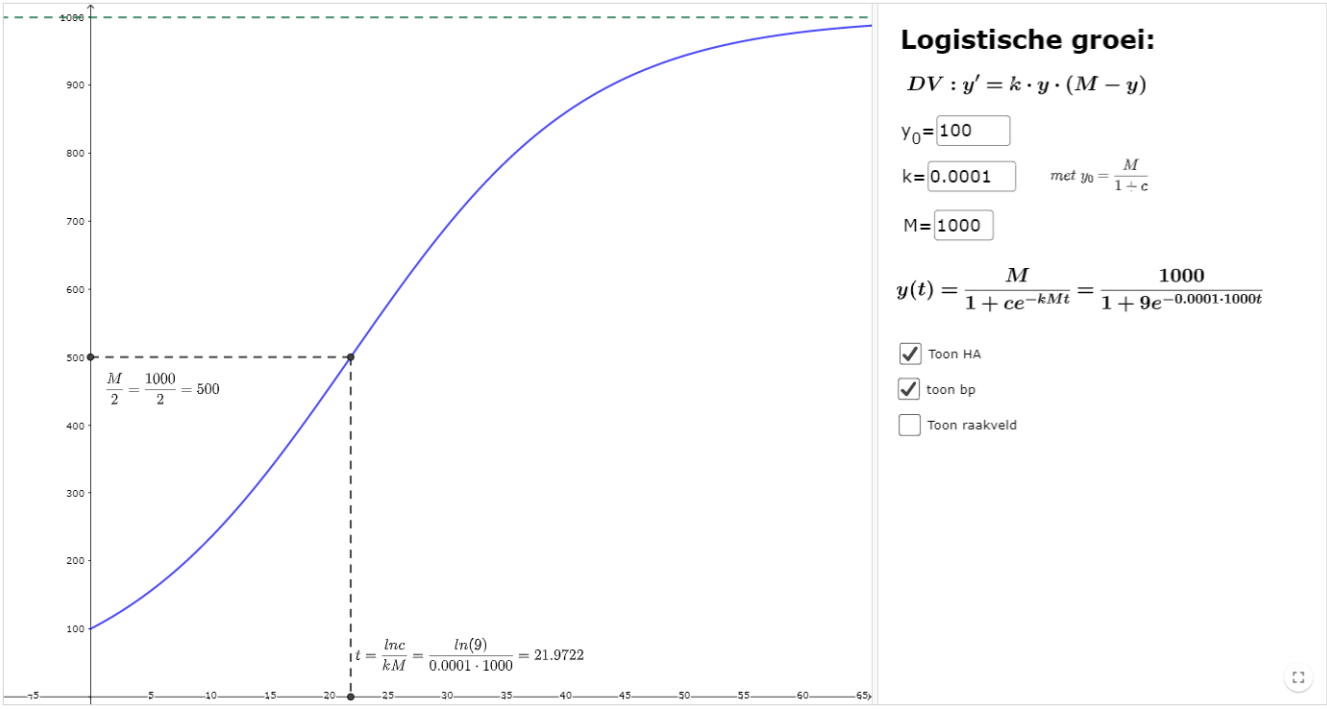


Figure 19: https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ]https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ

Oefeningen

1. het verval van het radioactieve element Radium A verloopt volgens de vergelijking

$$m'(t) = -0.277 \cdot m(t)$$

Daarbij wordt t in minuten en m(t) in mg gemeten. Stel dat voor t=0 de massa m_0 bedraagt

   (a) Bereken m(t)

   (b) Bereken de halveringstijd

   (c) op welk tijdstip is nog 10% van de beginmassa aanwezig

2. De wereldbevolking groeit ongeveer aan volgens de vergelijking

$$N'(t) = 0,019 \cdot N(t) \tag{1}$$

Hierbij wordt de tijd in jaren gerekend vanaf 1986 en wordt N(t) in miljarden uitgedrukt. In 1986 bedroeg de wereldbevolking 5,1 miljard inwoners.

   (a) Schrijf N(t) als functie van t

   (b) Hoeveel mensen zullen er (volgens dit model) zijn in 2025

   (c) Hoelang duurt het vooraleer de wereldbevolking verdubbeld is?

10 exponentiële vergelijkingen

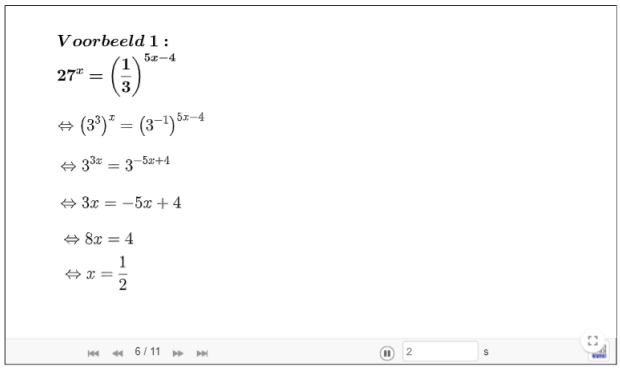


Figure 20: https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf

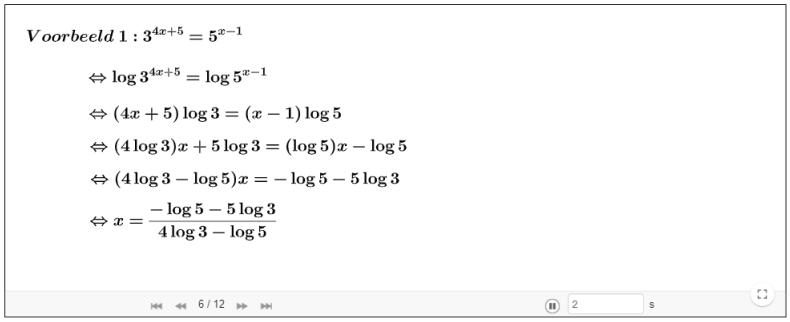


Figure 21: https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf

11 logaritmische vergelijkingen

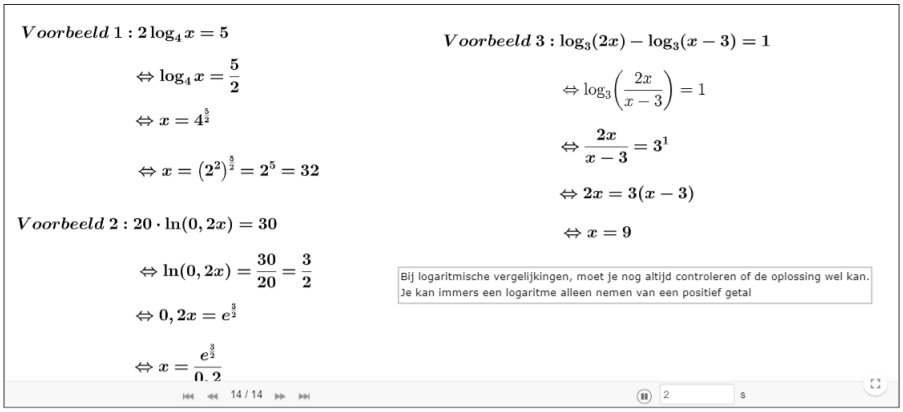


Figure 22: https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf